

Esercitazione 21/11/2023

1) Verificare se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle e, in caso affermativo, calcolare le ascisse dei punti che verificano la tesi di tale teorema:

a) $y = \sqrt{3x - x^2}$ nell'intervallo $[0;3]$

b) $y = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ nell'intervallo $[-1;5]$

2) Verificare la seguente funzione soddisfa le ipotesi teorema di Lagrange e in caso affermativo calcolare le ascisse dei punti che verificano tale teorema:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ 3x + \frac{1}{x+1} & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{nell'intervallo } [-1;1]$$

3) Determinare i massimi e minimi relativi della seguente funzione

$$y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x)^2}$$

4) Tracciare il grafico della funzione $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$

$$1) y = \sqrt{3x - x^2} \quad [0, 3]$$

Vérifier l'application du théorème de Rolle

Ip $y = f(x)$ $[a, b]$
 continue in $[a, b]$
 dérivable (a, b)
 $f(a) = f(b)$

Donc $\exists c \in (a, b) / f'(c) = 0$

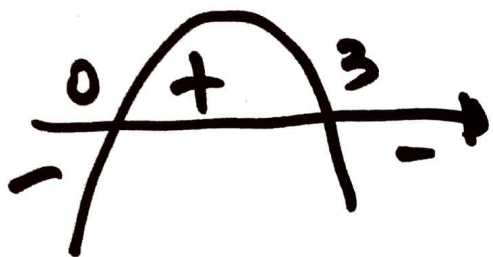
$$y = \sqrt{3x - x^2}$$

$$3x - x^2 \geq 0$$

$$3x - x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$x(3 - x) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$



$$0 \leq x \leq 3$$

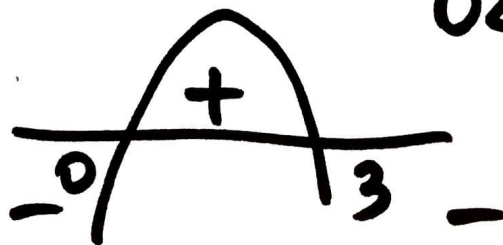
$$A = [0, 3]$$

la fonction est continue
in $[0; 3]$ cherche la
composante de fonction
continue

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3x-x^2}} \cdot (3-2x)$$

$$y' = \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$$

$$3x - x^2 > 0$$



$$0 < x < 3$$

$$A' = (0; 3)$$

[la f è derivabile in
(0,3)]

$$\begin{array}{l} f(a) = f(0) = 0 \\ f(b) = f(3) = \sqrt{9-9} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} f(a) = \\ f(b) \end{array}$$

Sono soddisfatte le cf.
del teorema di Rolle

$$f'(x) = 0 \quad \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}} = 0$$

$$3-2x=0 \quad x=\frac{3}{2}$$

$$\exists c \in (0,3) / f'(c) = 0$$

$$\text{con } c = \frac{3}{2}$$

$$2) y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ 3x + \frac{1}{x+1} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Verificare se sono soddisfatte
le ipotesi del Teorema di
Lagrange in $[-1, 1]$

Ip. $y = f(x)$ $[a, b]$
cont in $[a, b]$
deriv. in (a, b)

ten $\exists c \in (a, b) /$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$y = x^2 + 2x + 1 \quad A = \mathbb{R}$$

la f è continua in $\mathbb{R}$
 ed è punto continuo
 per $-1 \leq x < 0$

$$y = 3x + \frac{1}{x+1}$$

$$x+1 \neq 0 \quad x \neq -1 \quad A = \mathbb{R} - \{-1\}$$

la f è continua in $\mathbb{R} - \{-1\}$
 perché non ne so f . continua
 ed è punto continuo

$$\text{per } 0 < x \leq 1$$

la f è continua in $x_0 = 0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x + \frac{1}{x+1} \right) = 1 = f(a)$$

la f è continua in $x_0 = 0$
ed è quindi continua
in $[-1; 1]$

Derivabilità?

$$y' = \begin{cases} 2x+2 & -1 < x < 0 \\ 3 + \frac{-1}{(x+1)^2} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2x+2 & -1 < x < 0 \\ 3 - \frac{1}{(x+1)^2} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 - \frac{1}{(x+1)^2} \right) = 2$$

f è
derivabile
in $x_0 = 0$

Se f è derivabile
 in $(-1, 1)$
 le ip. del teor. de Lagrange
 $\exists c \in (-1, 1) / \cancel{f(c)}$ soddisf. verificata

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(a) = f(-1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$f(b) = f(1) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{7}{2}}{2} = \frac{7}{4}$$

$$2x + 2 = \frac{7}{4}$$

$$8x + 8 = 7$$

$$8x = -1$$

$$x = -\frac{1}{8} \quad \text{Q.E.D.}$$

$$3 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{12(x+1)^2 - 4}{4(x+1)^2} = \frac{7(x+1)^2}{4(x+1)^2}$$

$$5(x+1)^2 - 4 = 0$$

$$5(x^2 + 1 + 2x) - 4 = 0$$

$$5x^2 + 10x + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 20}}{10}$$

$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{80}}{10} = \begin{cases} \frac{-10 - \sqrt{80}}{10} \text{ N.A.} \\ \frac{-10 + \sqrt{80}}{10} \text{ N.A.} \end{cases}$$

Totò valore non può acc.
 perché negativo e primo
 non eff. all' int (0, 2)

$\exists c \in (-1, 1)$ che soddisfa
le tesi del Teorema
di Lagrange con

$$c = -\frac{1}{8}$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x-2)^2} \quad [-1, 5]$$

Verificare se yoten oel
Teorema de Rolle

- continuous in $[-1, 5]$

$$A = \mathbb{R}$$

la funzione è continua in
 $\mathbb{R}$ perché come fatto da
f. continua ed è quindi
continua in $[-1, 5]$

- derivabilità in $(-1, 5)$

$$y = (x-2)^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{2}{3} (x-2)^{\frac{2}{3}-1} \cdot 1$$

$$y' = \frac{2}{3} (x-2)^{-\frac{1}{3}} \quad y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$

$$y' = \frac{2}{3^3 \sqrt{x-2}}$$

$$x-2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

$$A' = \mathbb{R} - \{2\}$$

Occorre valutare la derivabilità
in $x_0 = 2$ (criterio)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{3^3 \sqrt{x-2}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{3^3 \sqrt{x-2}} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

in $x_0 = 2$ la f non è
derivabile (cuspidale)

La f non è derivabile in
 $(-1, 5)$ quindi non sono
raddoppiate le ipotesi del
D. 10.0.

$$4) y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x)^2}$$

Det. max e min relativi.

↓
punti con
derivate
nulle

↓
punti di
non
derivabilità

agli estremi
dell'intervallo
di definizione

$$A = \mathbb{R}$$

$$y = (x^2 - 4x)^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{2}{3} (x^2 - 4x)^{\frac{2}{3} - 1} \cdot (2x - 4)$$

$$y' = \frac{2}{3} (x^2 - 4x)^{-\frac{1}{3}} (2x - 4)$$

$$y' = \frac{2(2x - 4)}{\sqrt[3]{x^2 - 4x}}$$

$$x^2 - 4x \neq 0 \quad x(x - 4) \neq 0$$

$$x \neq 0 \quad x \neq 4$$

$$A' = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

$x=0$ e $x=4$ sono punti
giunti da una derivabile

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(2x-4)}{3\sqrt[3]{x^2-4x}} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4x=0 \\ x=0 \quad x=4 \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ \text{graph} \\ - \\ 4 \end{array} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(2x-4)}{3\sqrt[3]{x^2-4x}} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$$

in $x_0=0$ la f non è
derivabile (cuspide)

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2(2x-4)}{3\sqrt[3]{x^2-4x}} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2(2x-4)}{3\sqrt[3]{x^2-4x}} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

in $x_0=4$ la f non è
derivabile (cuspidale)

Troviamo i max e min
rel con derivata nulla

C.N. $f'(x)=0$

$$\frac{2(2x-4)}{3^3\sqrt{x^2-4x}} = 0$$

$$2x-4=0$$

$$3^3\sqrt{x^2-4x}$$

$$x=2$$

just with ∞ o
stationario

C.S. $f'(x) > 0$

$$\frac{2(2x-4)}{3^3\sqrt{x^2-4x}} > 0$$

$$2x-4 > 0$$

$$x > 2$$

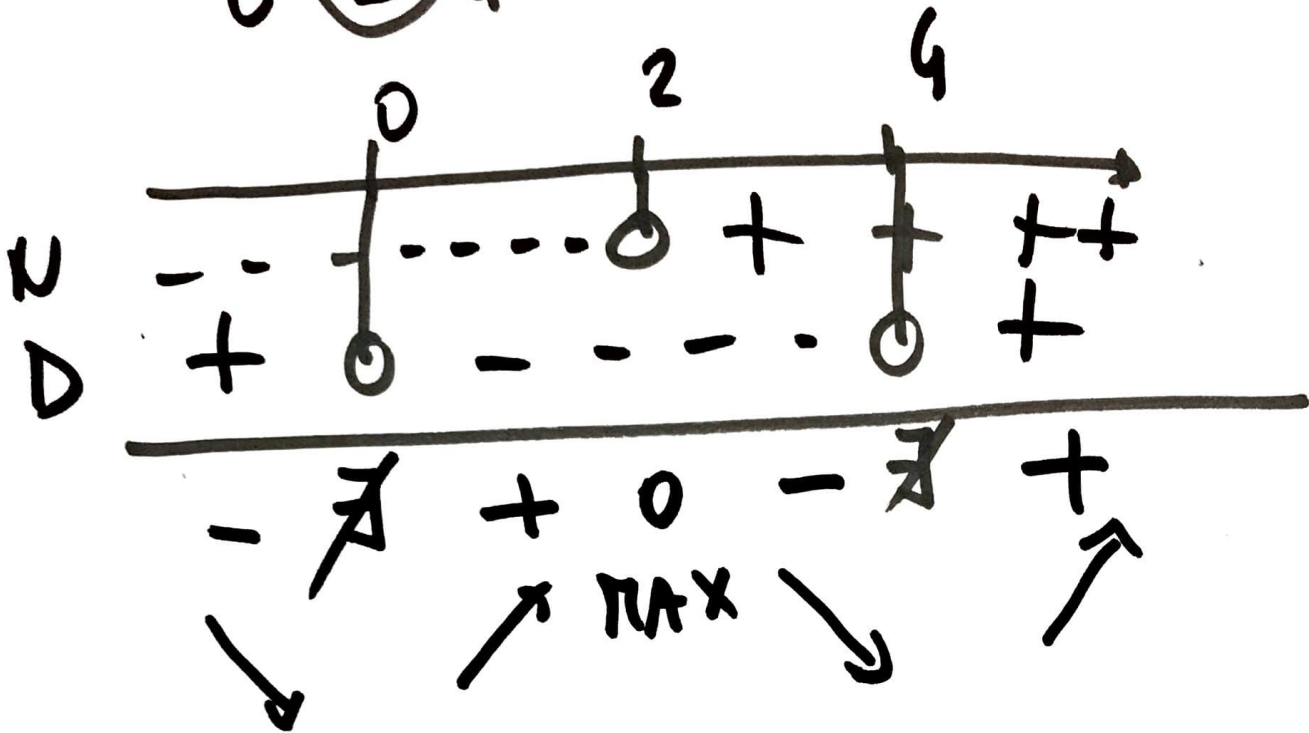
$$x^2-4x > 0$$

$$x^2-4x = 0 \quad x=0$$

$$x(x-4)=0 \quad x=4$$

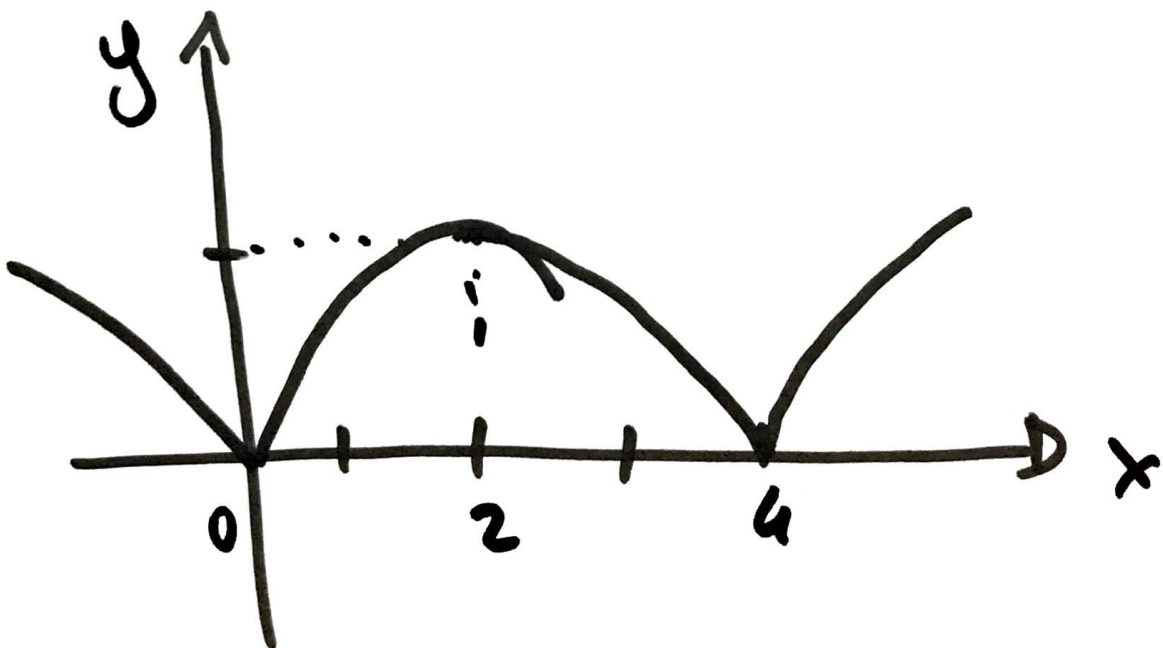


$$x < 0 \vee x > 4$$



$x_0 = 2$ max rel.

$x = 0$ e $x = 4$ sono min rel.



5) Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

a) Dominio

$$x-1 \neq 0 \quad x \neq 1 \quad A = \mathbb{R} - \{1\}$$

b) Pari o dispari

La f non è né pari né dispari perché il dominio A non è simmetrico rispetto all'origine

c) Int. con

$$\begin{cases} y = e^{\frac{x}{x-1}} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\frac{x}{x-1}} = 0 \quad \nexists x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = e^{\frac{x}{x-1}} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = e^0 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad P(0, 1)$$

d) Regno della f .

$$e^{\frac{x}{x-1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$
$$\forall x \in A$$

e) Asintoti

($x \rightarrow 1^+$ $x \rightarrow 1^-$ $x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x}{x-1}} = e^{\frac{1}{0^+}} = (e^{+\infty}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x}{x-1}} = e^{\left(\frac{1}{0^-}\right)} = 0$$

$x=1$ è asintoto verticale
dentro per la f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x-1}} =$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \neq I$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{FI}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e$$

$y = e$ as. horizontale
pour la f

f) Max e min rel.

$$y' = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \left(\frac{1(x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} \right)$$

$$y' = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \left(\frac{x-1-x}{(x-1)^2} \right) =$$

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 - & - & - & - & - & - & - \\
 + & + & + & 0 & + & + & +
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 - & - & - & - & - & - & - \\
 \downarrow & & & & & & \downarrow
 \end{array}
 \end{array}$$

la f è decrescente nel dominio

g) Fletti

$$y' = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= \left[e^{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right) \right] \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right) \\
 &+ e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \left[\frac{0 \cdot (x-1)^2 - (-1) 2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} \right]
 \end{aligned}$$

$$y'' = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^4} + e^{\frac{x}{x-1}} \frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$y'' = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \left[\frac{1}{(x-1)^4} + \frac{2}{(x-1)^3} \right]$$

$$y'' = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \left(\frac{1 + 2x - 2}{(x-1)^4} \right)$$

$$y'' = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \left(\frac{2x - 1}{(x-1)^4} \right)$$

c.N $y'' = 0$

$$e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{2x-1}{(x-1)^4} = 0$$

$e^{\frac{x}{x-1}} = 0 \nexists x$
 $2x-1 = 0$
 $x = \frac{1}{2}$

$$y' = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right)$$

$$A' = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$C.N. \quad f'(x) = 0$$

$$\frac{-e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2} = 0$$

$$-e^{\frac{x}{x-1}} = 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$$

be f non ha punti critici

C.S.

$$\frac{-e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2} > 0$$

I 2 numeratore
è negativo
 $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$(x-1)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$x = \frac{1}{2}$ candidato ad essere
finto du flemo

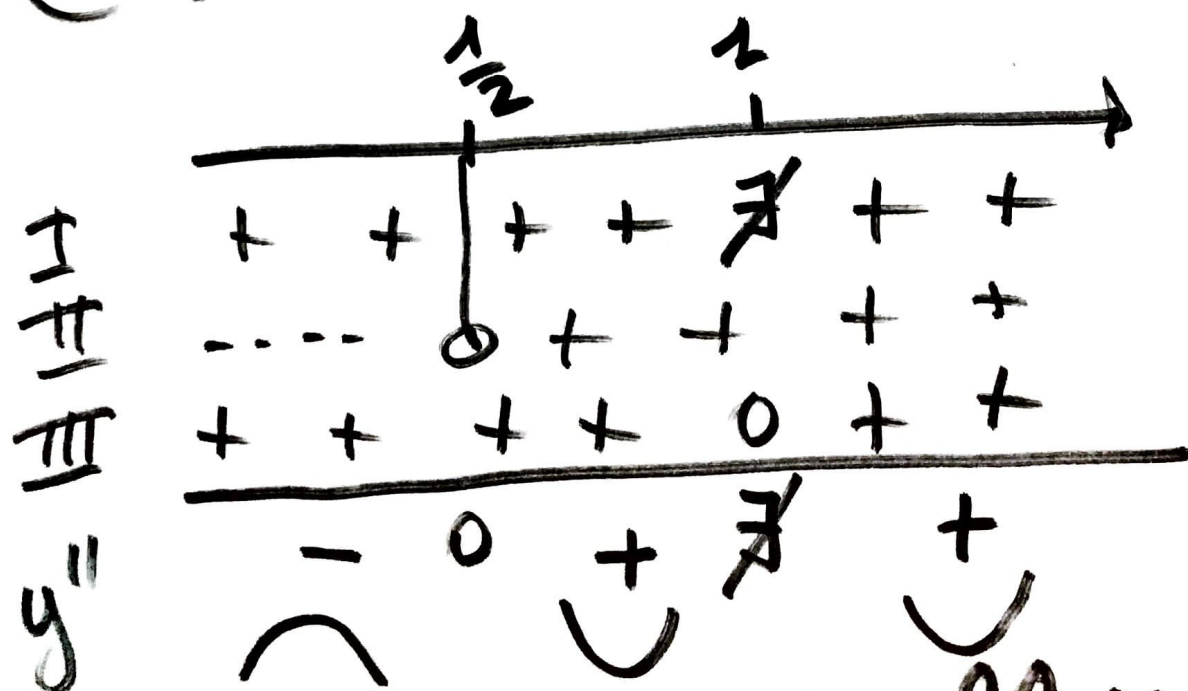
C.S $y'' > 0$

$$e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{2x-1}{(x-1)^4} > 0$$

$$e^{\frac{x}{x-1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$2x-1 > 0 \quad x > \frac{1}{2}$$

$$(x-1)^4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$



$x_0 = \frac{1}{2}$ finto du flemo

$$x_0 = \frac{1}{2} \quad y = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$y_0 = e^{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}} = e^{\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{e}\right)$$

