Esercitazione 27/11/2023

1) a) Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{3-x}{(x+1)^2}$

   b) Tracciare il grafico di $g(x)=f(|x|)$.

2) a) Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

   b) Tracciare il grafico di $g(x)=|f(x)|$.

3) Determinare il valore dei parametri a e b in modo che la funzione

$$y=\begin{cases} a\sqrt{2x^2-1}+3bx & x\geq 1 \\ 2bx^2+ax & x<1 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile in x=1.

1) a) Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{3-x}{(x+1)^2}$$

b) Tracciare il grafico di

$$g(x) = f(|x|)$$

$$f(x) = \frac{3-x}{(x+1)^2}$$

a) <u>Dominio</u>

$(x+1)^2 \neq 0 \quad x+1 \neq 0 \quad x \neq -1$

$A = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) <u>Pari o dispari</u>

la f. non è né pari né dispari perché il dominio

c) Intersezione assi

$$\begin{cases} y = \dfrac{3-x}{(x+1)^2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad P(0,3)$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{3-x}{(x+1)^2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3-x}{(x+1)^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3-x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad Q(3,0)$$

d) Segno della funzione

$$\frac{3-x}{(x+1)^2} > 0$$

N: $3 - x > 0$

$-x > -3$

$x < 3$

D: $(x+1)^2 > 0$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

x		-1		3	
N	$+ \; +$	$+$	$+ \; +$	0	$- \; - \; - \; -$
D	$+ \; +$	0	$+ \; +$	$+$	$+ \; +$
	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$

e) Asintoti

$A = \mathbb{R} - \{-1\}$

$(x \to -1^+, \; x \to -1^-, \; x \to +\infty, \; x \to -\infty)$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{3-x}{(x+1)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{3-x}{(x+1)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$x = -1$ è asintoto verticale per la f

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3-x}{(x+1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] FI$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{2(x+1) \cdot 1} = 0$$

g) flesso

$$y' = \frac{x-7}{(x+1)^3}$$

$$y'' = \frac{1(x+1)^3 - (x-7)\left[3(x+1)^2 \cdot 1\right]}{(x+1)^6}$$

$$y'' = \frac{\cancel{(x+1)^2}\left[x+1 - 3(x-7)\right]}{(x+1)^{\cancel{6}\ 4}}$$

$$y'' = \frac{x+1-3x+21}{(x+1)^4}$$

$$y'' = \frac{-2x+22}{(x+1)^4}$$

C.N) $\frac{-2x+22}{(x+1)^4} = 0$

$-2x+22=0$ $\quad x = 11$

probabile punto di flesso

C.N $y'=0$

$$\frac{x-7}{(x+1)^3}=0$$

$x-7=0$ $x=7$

punto critico

C.S.

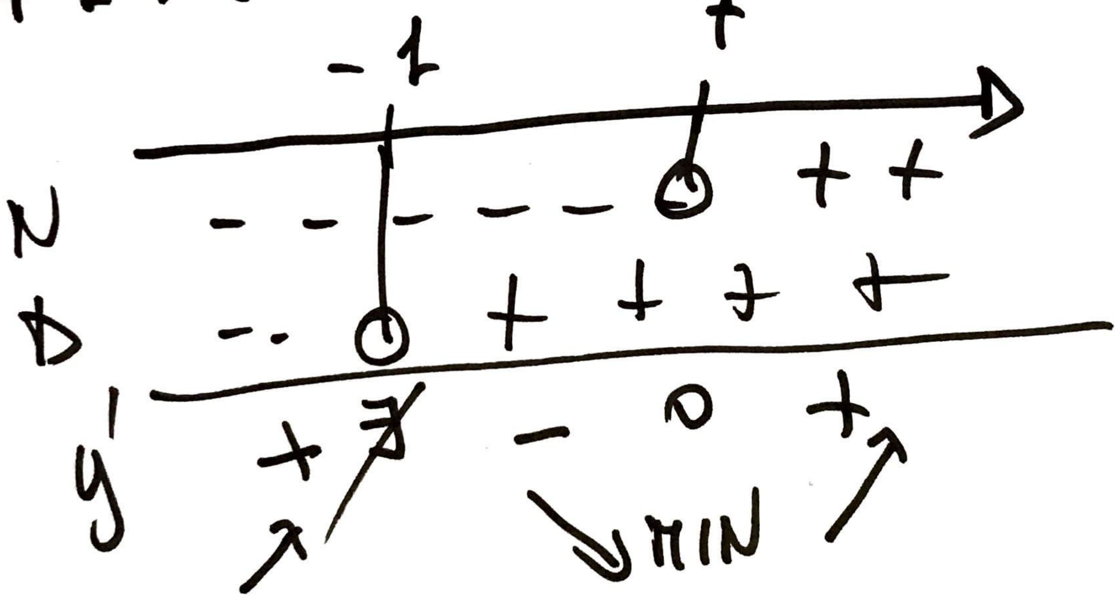
$$\frac{x-7}{(x+1)^3}>0$$

N $x-7>0$

$x>7$

D $(x+1)^3>0$

$x+1>0$ $x>-1$



$x=7$ min rel.

$$y=\frac{-4}{64}=-\frac{1}{16}$$

$\left(7;-\frac{1}{16}\right)$

($A'=\mathbb{R}-\{-1\}$ la f è continua e derivabile nel suo dominio)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3-x}{(x+1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] FI$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-1}{2(x+1)} = 0$$

Conclusioni: $y=0$ è asintoto orizzontale per la f.

f) Massimi e minimi

$$y' = \frac{-1(x+1)^2 - (3-x)[2(x+1)\cdot 1]}{(x+1)^4}$$

$$y' = \frac{\cancel{(x+1)}\cdot[-1(x+1) - 2(3-x)]}{(x+1)^{\cancel{4}\ 3}}$$

$$y' = \frac{-x-1-6+2x}{(x+1)^3} = \frac{x-7}{(x+1)^3}$$

C.S. $\quad y' > 0$

$$\frac{-2x+22}{(x+1)^4} > 0$$

N. $-2x+22 > 0$

$-2x > -22$

$x < 11$

D: $(x+1)^4 > 0$

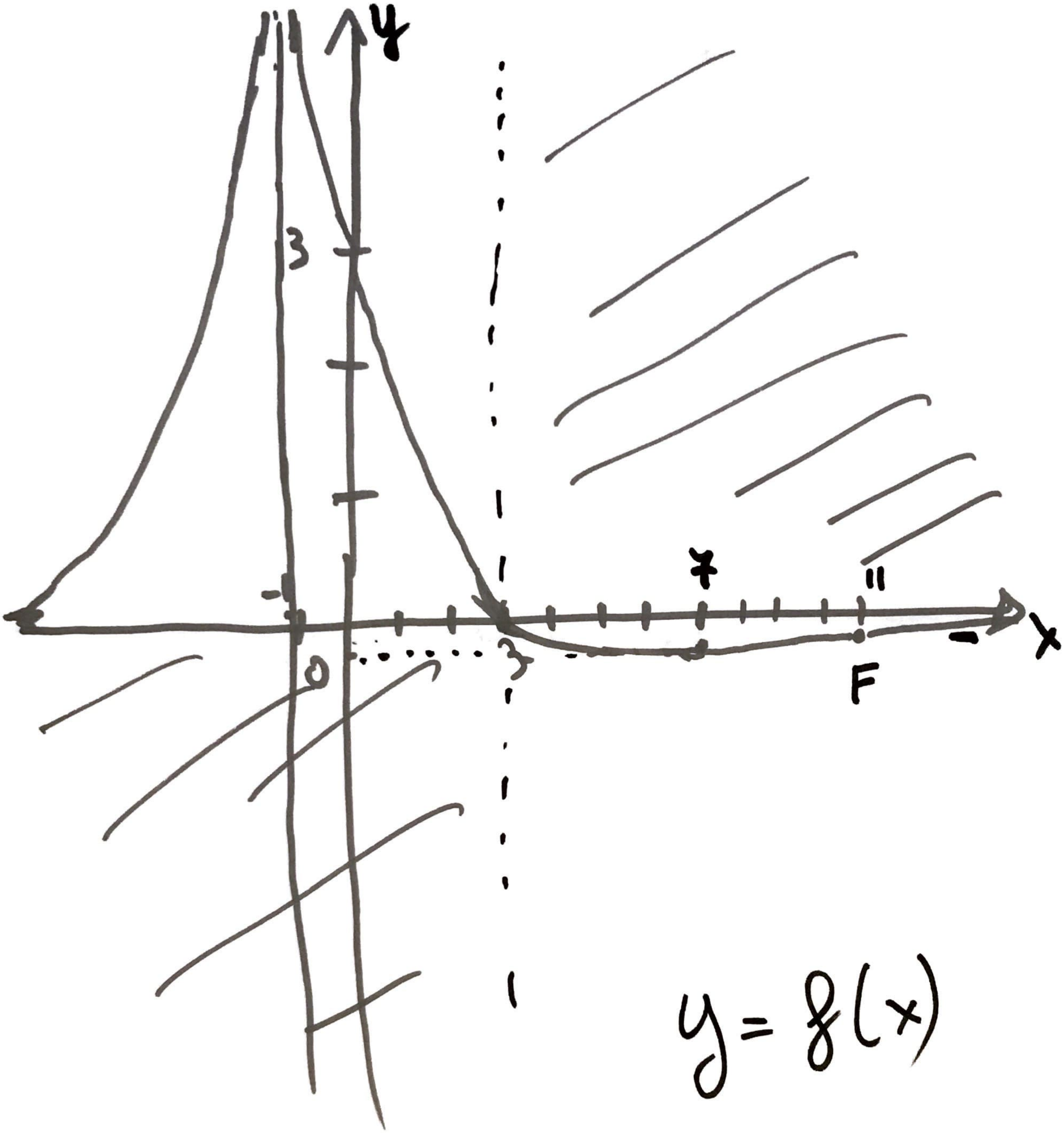
$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

		-1		11	
N	$+\ +$		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$
D	$+\ +$	0	$+\ +$		$+\ +$
y''	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
	$\cup$		$\cup$	$=$	$\cap$

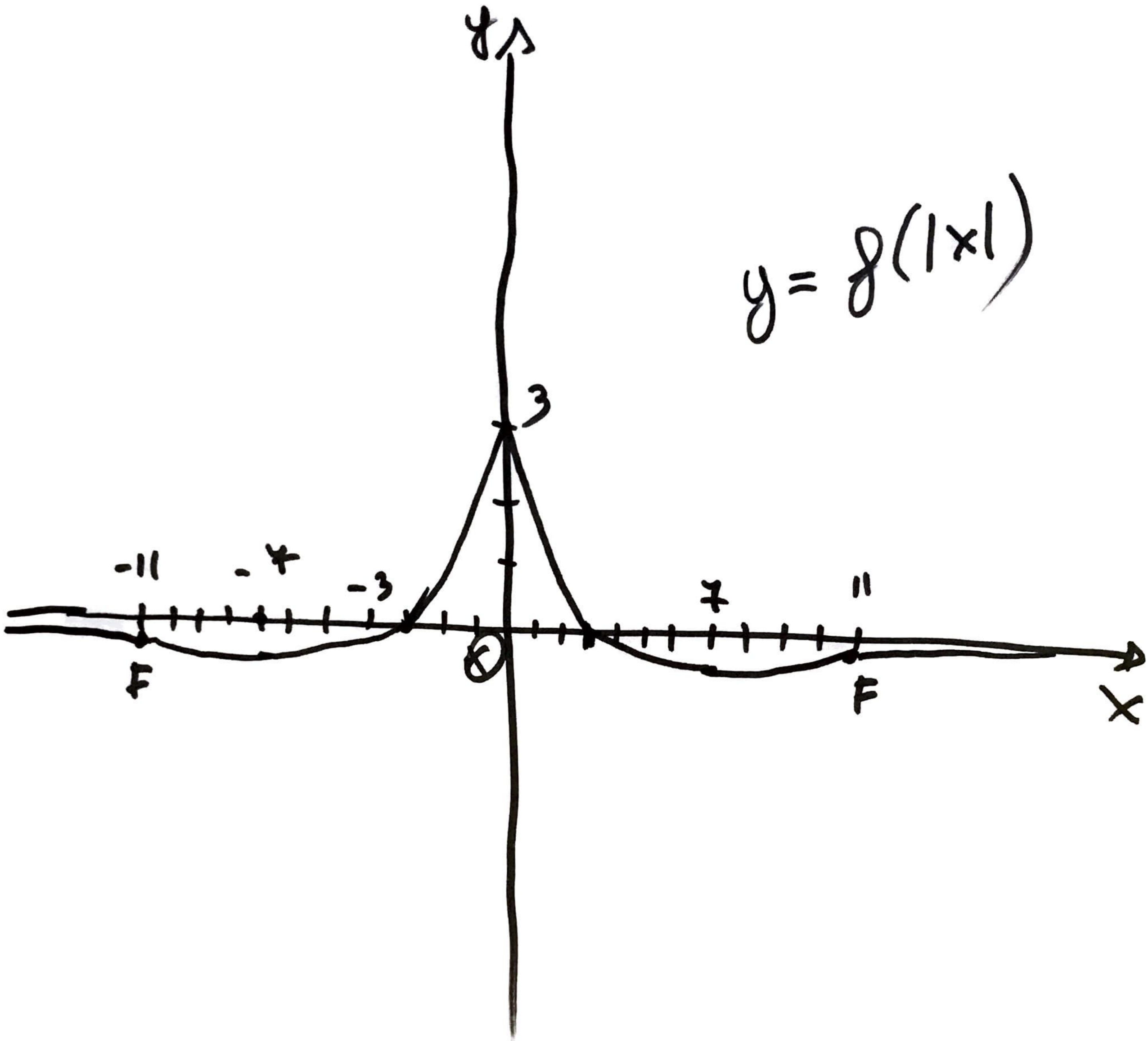
$x = 11$ punto de flexo

$$y = \frac{3-11}{12^2} = \frac{-8}{144} = \frac{-4}{72} = -\frac{1}{18}$$

$F\left(11; -\frac{1}{18}\right)$ flexo



$y = f(x)$


y
$y = f(|x|)$
3
-11
-7
-3
7
11
O
F
F
x

2) a) Studiare la funzione

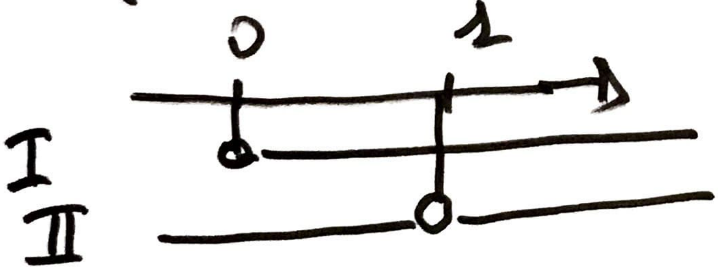
$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

b) tracciare il grafico di $y = |f(x)|$

$$y = \frac{x}{\ln x}$$

a) <u>Dominio</u>

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \to e^{\ln x} \neq e^{0} \end{cases} \qquad x \neq 1$$



$$A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

b) <u>Pari o dispari</u>

la f. non è né pari né dispari

c) Int. assi

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{\ln x} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

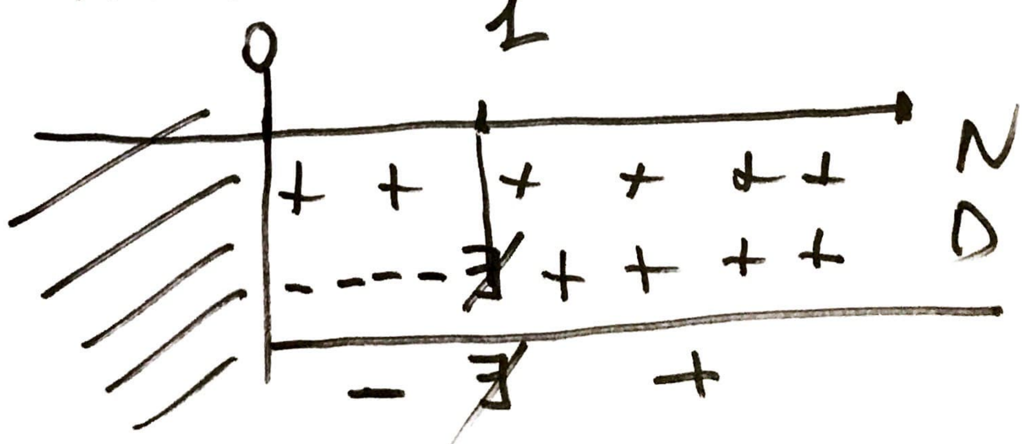
$$\begin{cases} x = 0 \quad \text{N.A.} \\ y = 0 \end{cases}$$

d) Segno funzione

$$\frac{x}{\ln x} > 0 \qquad N: x > 0$$

$$D: \ln x > 0 \qquad e^{\ln x} > e^{0}$$

$$x > 1$$



e) Asintoti

$A = (0,1) \cup (1,+\infty)$

$(x \to 0^+ , x \to 1^- , x \to 1^- , x \to +\infty)$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} &= \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x = 1 \\ &\text{as. vert} \\ &\text{per la } f. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ FI}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x = \underline{\underline{+\infty}}$$

$\nexists$ as. oriz. destro

f) Massimo e minimo

$$y' = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

C.N. $y' = 0$

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \quad \ln x - 1 = 0$$

$$\ln x = 1 \quad e^{\ln x} = e^1$$

$x = e$ punto critico

C.S. $y' > 0$ N: $\ln x - 1 > 0$

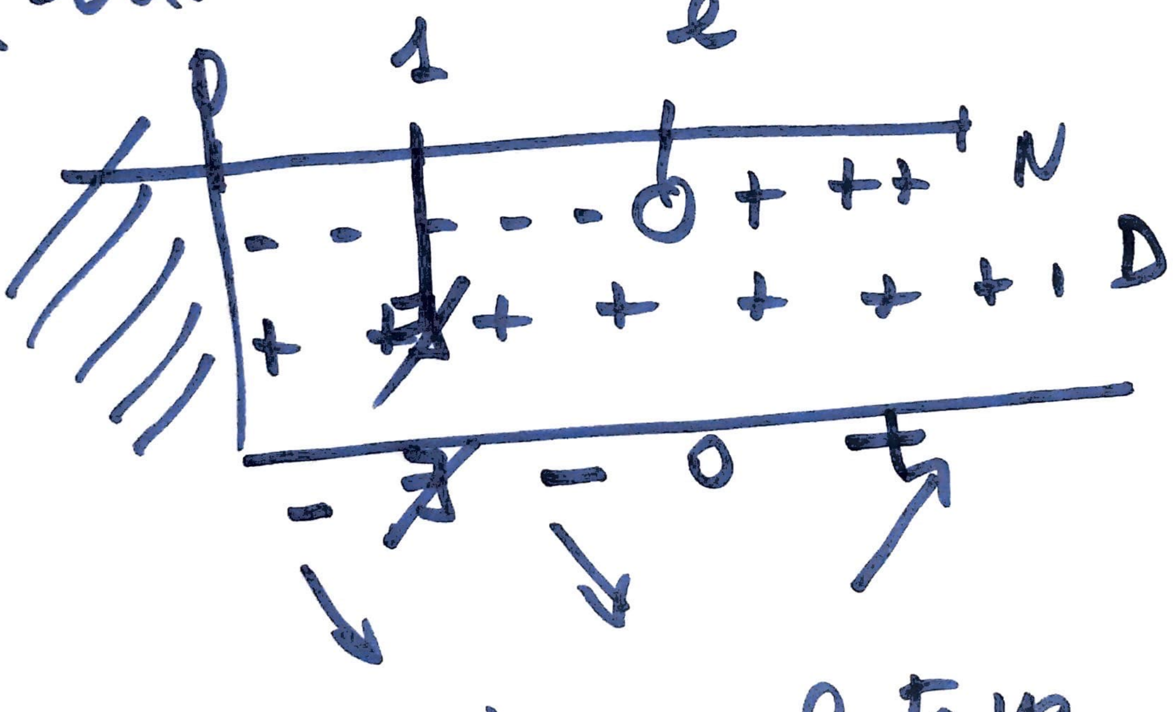
$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0$$

$\ln x > 1$

$x > e$

D $(\ln x)^2 > 0$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \end{cases}$$



$x = e$ minimo relativo

$$y = \frac{e}{\ln e} = e \qquad P(e, e)$$

min rel.

g) Flessi

$$y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$y'' = \frac{\frac{1}{x}(\ln^2 x) - (\ln x - 1)\, 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x}$$

$$y'' = \frac{\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2 \ln^2 x}{x} + \frac{2 \ln x}{x}}{\ln^4 x}$$

$$y'' = \frac{\frac{-\ln^2 x + 2 \ln x}{x}}{\ln^4 x}$$

$$y'' = + \frac{\cancel{\ln x}\,(-\ln x + 2)}{x} \cdot \frac{1}{\ln^{\cancel{4}\,3} x}$$

$$y'' = \frac{-\ln x + 2}{x \ln^3 x} = \frac{-\ln x + 2}{x (\ln x)^3}$$

C.N. $y'' = 0$

$$\frac{-\ln x + 2}{x(\ln x)^3} = 0 \qquad -\ln x + 2 = 0$$

$$-\ln x = -2 \qquad \ln x = 2$$

$$e^{\ln x} = e^2 \qquad x = e^2$$

probabile punto di flesso

C.S $y'' > 0$

$$\frac{-\ln x + 2}{x(\ln x)^3} > 0$$

N. $-\ln x + 2 > 0$

$$-\ln x > -2 \qquad \ln x < 2$$

$$\begin{cases} e^{\ln x} < e^2 \to x < e^2 \\ x > 0 \end{cases}$$

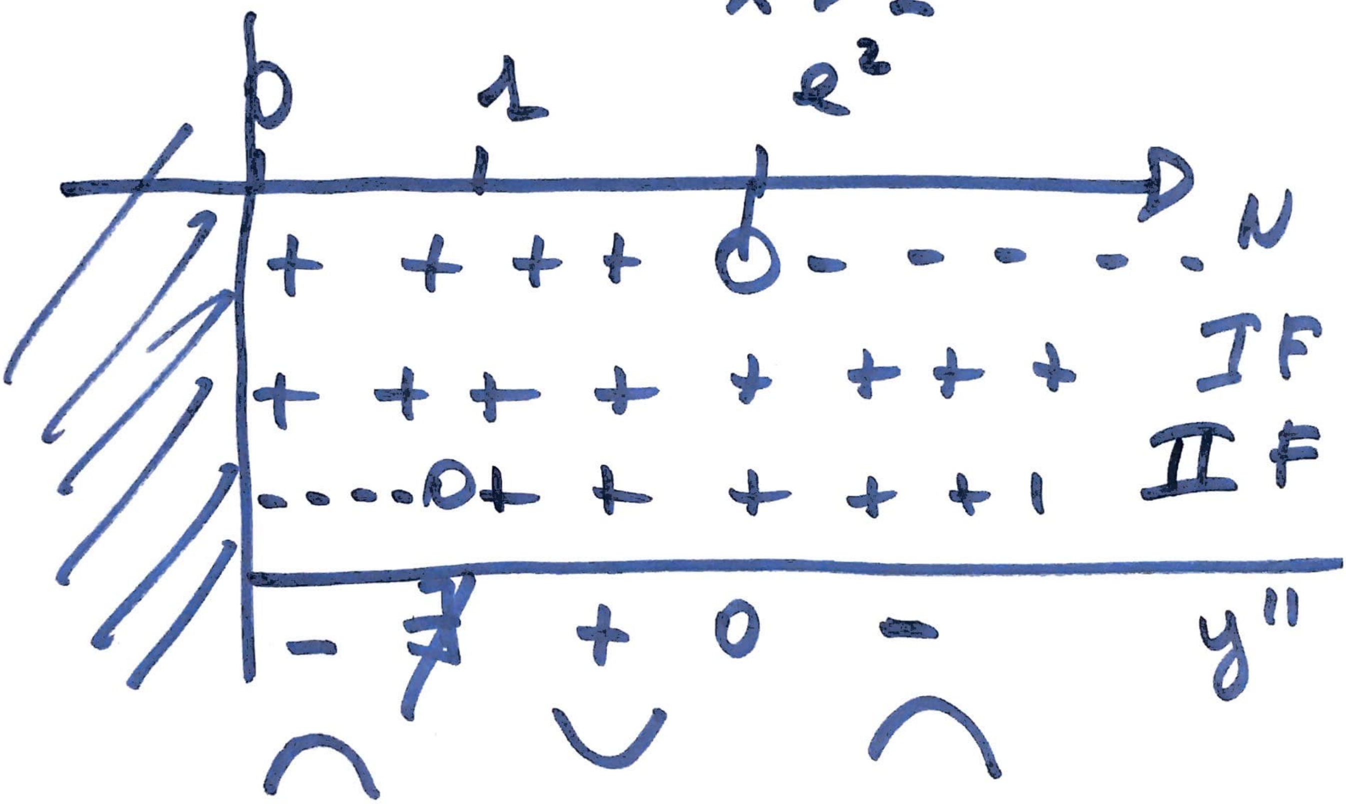
$$0 < x < e^2$$

D I $x>0$

II $(\ln x)^3>0$ $\quad \ln x>0$

$e^{\ln x} > e^0$

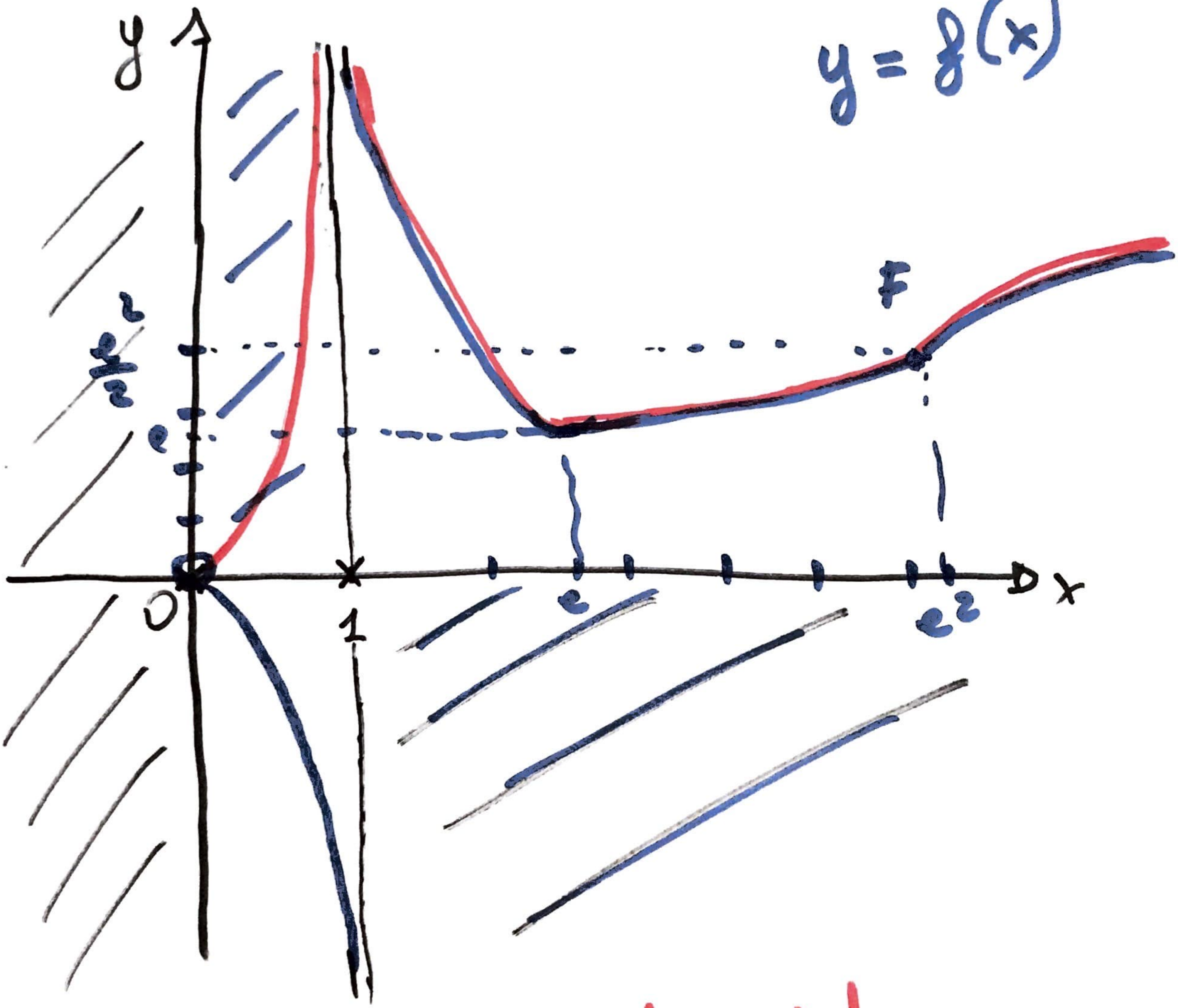
$x>1$



$x = e^2$ punto di flesso

$$y = \frac{e^2}{\ln e^2} = \frac{e^2}{2}$$

$$F\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$$



$g(x) = |f(x)|$
è la funzione
in rosso

3) Det $a, b \in \mathbb{R}$
in modo che la funzione f
sia continua e derivabile
in $x_0 = 1$

$$y = \begin{cases} a\sqrt{2x^2-1} + 3bx & x \geq 1 \\ 2bx^2 + ax & x < 1 \end{cases}$$

[Occorre verificare se la funz.
$y = a\sqrt{2x^2-1}$ è definita
nell'int. di riferimento

$2x^2 - 1 \geq 0$

$2x^2 - 1 = 0 \qquad x^2 = \frac{1}{2} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$A = \left(-\infty; -\sqrt{\frac{1}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$

OK la f è definita]

a) continuitate în $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \left(a\sqrt{2x^2-1} + 3bx \right) = \underbrace{a+3b}_{f(1)}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \left(2bx^2 + ax \right) = 2b+a$$

Cond. de continuitate în $x_0 = 1$

$$\boxed{a+3b = 2b+a}$$

b) derivabilitate în $x_0 = 1$

$$y' = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-1}} \cdot \overset{2}{\cancel{4}}x + 3b & x > 1 \\ 4bx + a & x < 1 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \dfrac{2ax}{\sqrt{2x^2-1}} + 3b & x > 1 \\ 4bx + a & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2a x}{\sqrt{2x^2-1}}+3b\right)=2a+3b$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(4bx+a\right)=4b+a$$

condizione di derivabilità in $x_0=1$

$$2a+3b=4b+a$$

N.B le condizioni devono coesistere cont.

$$\begin{cases} \cancel{a}+3b=2b+\cancel{a} \\ 2a+3b=4b+a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ 2a-a=0 \quad a=0 \end{cases}$$

Per $a=0$ e $b=0$ la f è cont e derivabile in $x_0=1$