

Esercitazione 5/12/2023

1) Tracciare il grafico della funzione $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

2) Determinare per quale valore del parametro k in $\mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + 1)}{3kx^2} = -1$$

3) Determinare per quale valore del parametro k in $\mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2kx} = 2$$

4) Determinare per quale valore del parametro k in $\mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^2)^{\frac{3k}{x^2}} = 6$$

5) Determinare per via grafica il dominio della funzione

$$y = \log \left(\sqrt{|x|+1} - \left(\frac{1}{2} \right)^{|x-1|} - 1 \right)$$

6) Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ affinché la funzione

$$y = \begin{cases} \sqrt{x^2+3} + 2a \ln(4x^2-3) + 2bx & x > 1 \\ ax^2 + be^{-x+1} + 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $x=1$

7) Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ affinché la funzione

$$y = \begin{cases} \sqrt{-2x+4} & -6 \leq x < 0 \\ ax^2 - 2bx + 2 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-6;2]$. Trovare poi i punti la cui esistenza è garantita dal teorema.

1) Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

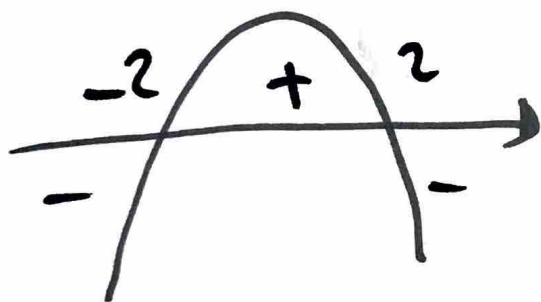
a) Dominio

$$4-x^2 \geq 0$$

$$4-x^2 = 0$$

$$-x^2 = -4$$

$$x^2 = 4 \quad x = \pm 2$$



$$-2 \leq x \leq 2$$

$$A = [-2, 2]$$

b) Par o dispari

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

$$f(-x) = -x\sqrt{4-x^2}$$

$$-f(x) = -x\sqrt{4-x^2}$$

la f. non è pari

la f. è dispari perché

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in A$$

c) Int. om

$$\begin{cases} y = x\sqrt{4-x^2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$y = 0$$

$$x = 0$$

$$\begin{cases} x\sqrt{4-x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{4-x^2} = 0 \\ 4-x^2 = 0 \\ x^2 = 4 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$O(0,0) \quad P(2,0) \quad Q(-2,0)$$

$$\begin{cases} y = x\sqrt{4-x^2} \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

d) Segno

$$x\sqrt{4-x^2} > 0$$

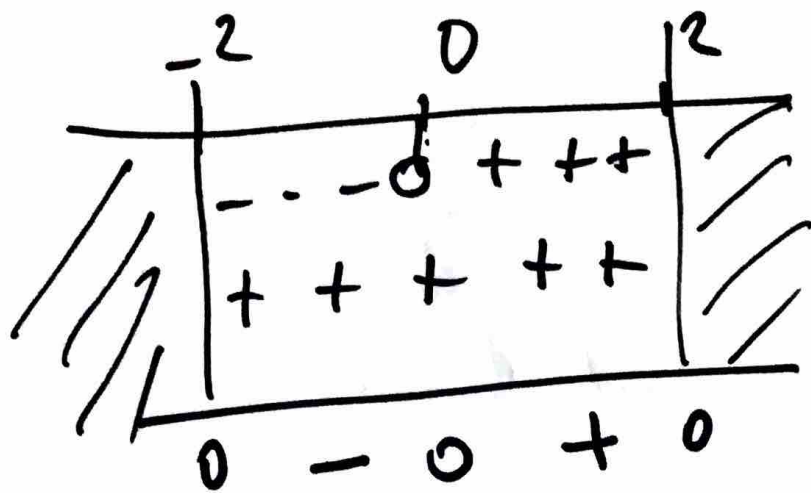
IF

$$x > 0$$

$$\text{II F } \sqrt{4-x^2} > 0$$

$$4-x^2 > 0$$

$$-2 < x < 2$$



e) Asintoti:

$$A = [-2; 2]$$

la f. non ha asintoti.
 (Il comportamento della
 funzione in $x = \pm 2$ si
 ottiene andando a sostituire
 tali valori nella f.)

8) Domínio e intervalo

$$f(x) = x \sqrt{4-x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x)$$

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

C.N $f'(x) = 0$

$$\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$4-2x^2 = 0$$

$$-2x^2 = -4$$

$$x^2 = 2$$

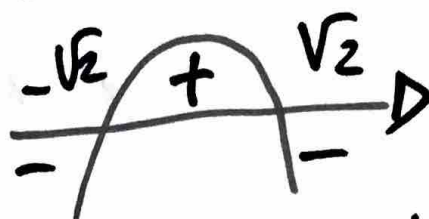
$$x = \pm \sqrt{2} \quad \text{pontos críticos}$$

C.S.

$$\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} > 0$$

$$N > 0$$

$$4-2x^2 > 0$$



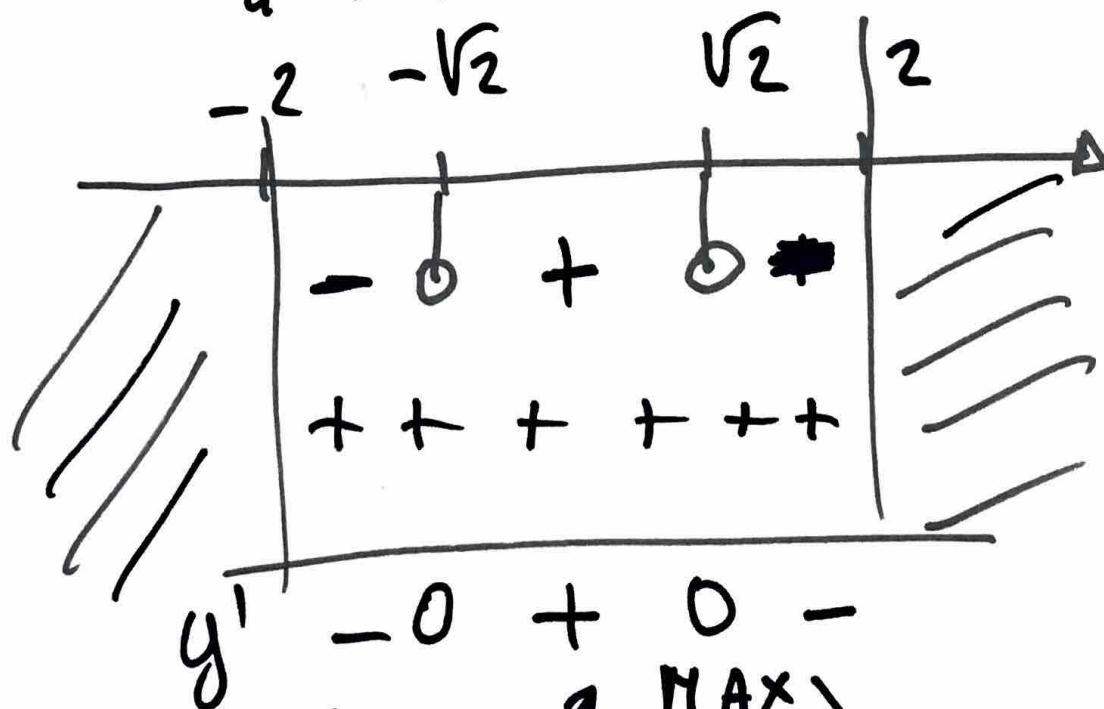
$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

$$D > 0$$

$$\sqrt{4-x^2} > 0$$

$$4-x^2 > 0$$

$$-2 < x < 2$$



$$x = \sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{2}(\sqrt{4-2}) = 2$$

$$R(\sqrt{2}; 2) \quad \text{Max rel.}$$

$$x = -\sqrt{2}$$

$$y = -2$$

$$S(-\sqrt{2}; -2) \quad \text{MIN rel}$$

g) F.lern

$$f'(x) = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x \cdot (\sqrt{4 - x^2}) - (4 - 2x^2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} \cdot (-2x)}{(\sqrt{4 - x^2})^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{4 - x^2} + \frac{4x - 2x^3}{\sqrt{4 - x^2}}}{4 - x^2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{-4x(4 - x^2) + 4x - 2x^3}{\sqrt{4 - x^2}}}{4 - x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-16x + 4x^3 + 4x - 2x^3}{\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{1}{4-x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 12x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

C.N.

$$f''(x) = 0 \quad \frac{2x^3 - 12x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$2x^3 - 12x = 0$$

$$2x(x^2 - 6) = 0 \quad \begin{array}{l} 2x = 0 \quad x = 0 \\ x^2 - 6 = 0 \end{array}$$

$$x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = 6 \quad x = \pm \sqrt{6} \quad \text{N.A.}$$

$x = 0$ probabilité
jointe du flemo

c. s. $f''(x) > 0$

$$\frac{2x(x^2-6)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} > 0$$

N. IF $2x > 0 \quad x > 0$

II F $x^2 - 6 > 0$

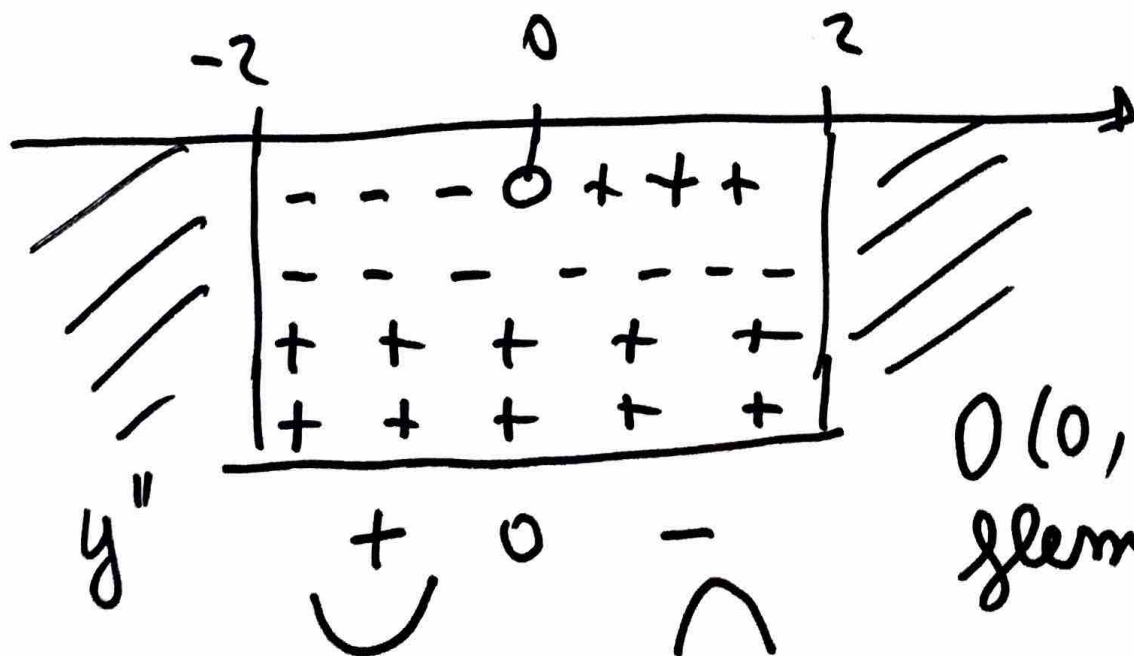


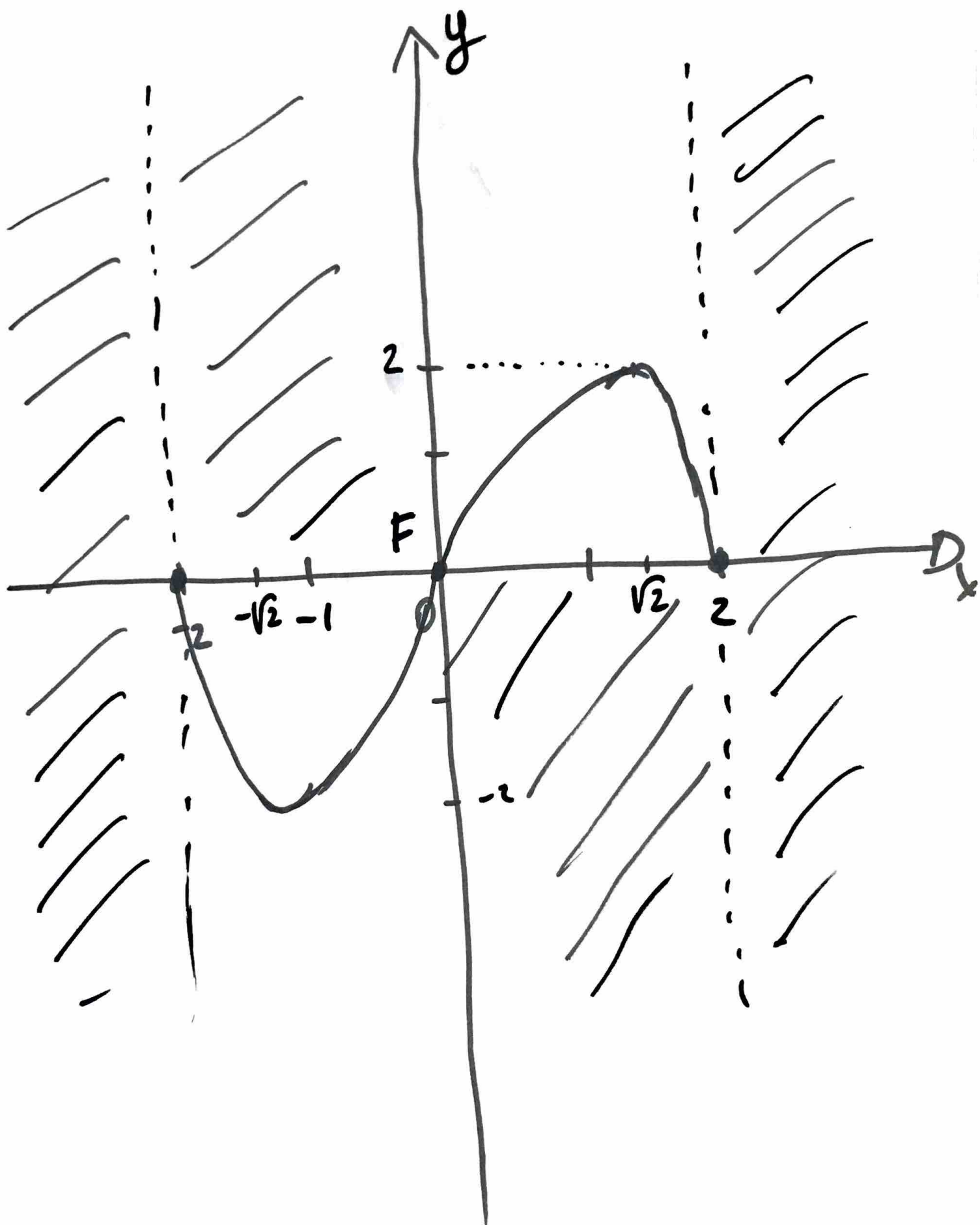
$$x < -\sqrt{6} \vee x > \sqrt{6}$$

(N.B. nel dominio della f
 $\cap$ II F è sempre negativo)

D IF $4 - x^2 > 0 \quad -2 < x < 2$

II F $\sqrt{4 - x^2} > 0 \quad -2 < x < 2$





2) Det. $K \in \mathbb{R}$ in modo tale che si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + 1)}{3Kx^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + 1)}{3Kx^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{FI}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x)+1)}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{\overset{f(x)}{\ln(2x^2 + 1)}}{2x^2} \right] \cdot 2x^2}{3Kx^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3Kx^2} = \frac{2}{3K}$$

Cond. $\frac{2}{3k} = -1$

$$2 = -3k$$

$$\boxed{k = -\frac{2}{3}}$$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2kx} = 2 \quad k = ?$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2kx} = [1^\infty] \text{ FI}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad \left| \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} = e \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, (-\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2kx} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right)^{2kx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2kx}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{2k}} = \frac{1}{e^{2k}}$$

Cond.

$$\frac{1}{e^{2k}} = 2$$

$$1 = 2 e^{2k}$$

$$e^{2k} = \frac{1}{2} \quad \ln e^{2k} = \ln \frac{1}{2}$$

$$2k = \ln 1 - \ln 2$$

$$2k = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^2)^{\frac{3K}{x^2}} = 6 \quad K=?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^2)^{\frac{3K}{x^2}} = [1^\infty] \text{ FI}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{4x^2}} \right)^{\frac{1}{4x^2}} \right]^{4x^2 \cdot \frac{3K}{x^2}} = e$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{12Kx^2}{x^2}} = e^{12K}$$

Cond.

$$e^{12K} = 6 \quad \ln e^{12K} = \ln 6$$

$$12K = \ln 6 \quad K = \frac{\ln 6}{12}$$

5) Det. per via grafica il
dominio della funzione

$$y = \log \left(\sqrt{|x|+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} - 1 \right)$$

$$\begin{cases} \sqrt{|x|+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} - 1 > 0 \\ |x|+1 \geq 0 \text{ sempre I} \end{cases}$$

$$\sqrt{|x|+1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} + 1$$

$$f(x) = \sqrt{|x|+1}$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} + 1$$

Si tratta di determinare
per quali valori di x si ha $f > g$

$$f(x) = \sqrt{|x| + 1}$$

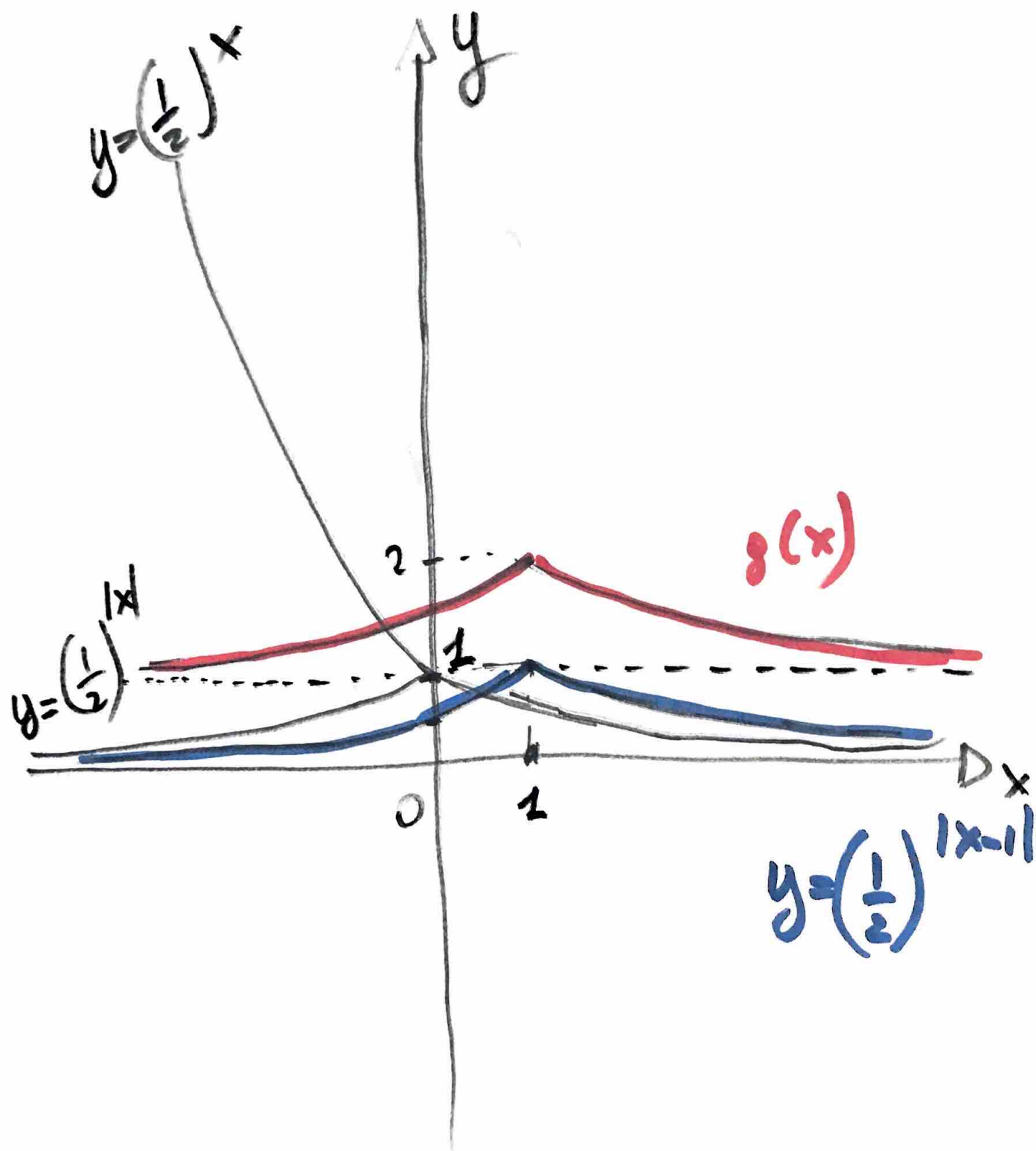
$$y = \sqrt{x} \rightarrow y = \sqrt{x+1} \rightarrow y = \sqrt{|x|+1}$$

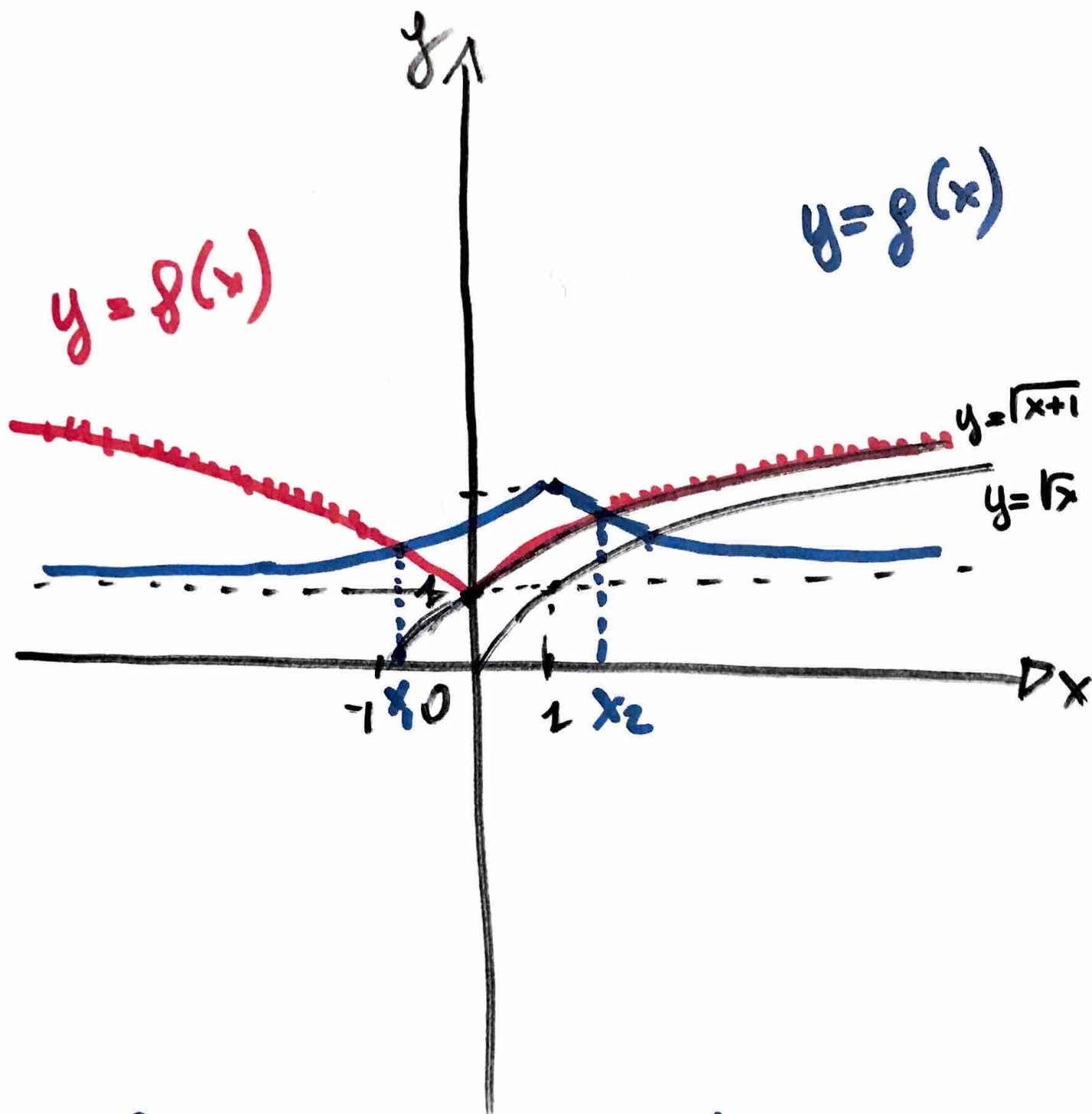
$f(x-k)$ $f(|x|)$
 $k = -1$

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} + 1$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} + 1$$

$f(|x|)$ $f(x-k)$ $f(x)+k$
 $k > 0$ $k = 1$





$$D: x < x_2 \vee x > x_2$$

$$D = (-\infty, x_2) \cup (x_2, +\infty)$$

6) Det $a, b \in \mathbb{R}$ affinché la
funzione

$$y = \begin{cases} \sqrt{x^2+3} + 2a \ln(4x^2-3) + 2bx & x \neq \pm 1 \\ ax^2 + be^{-x+1} + 1 & x = \pm 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile
in $x = 1$

$$\begin{cases} 4x^2 - 3 > 0 & 4x^2 - 3 = 0 \\ 4x^2 = 3 & x^2 = \frac{3}{4} & x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} x &< -\sqrt{\frac{3}{4}} \vee \\ x &> \sqrt{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

la f è def.

nell'insieme di riferimento]

Continua to $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sqrt{x^2+3} + 2a \ln(4x^2-3) + 2bx \right) \\ = 2 + 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(ax^2 + be^{-x+1} + 1 \right) = a + b + 1$$

Cond. di cont. in $x=1$

$$2 + 2b = a + b + 1$$

Derivata in $x=1$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot (2x) + 2a \cdot \frac{1}{4x^2-3} (8x) + 2b & x > 1 \\ 2ax + be^{-x+1} (-1) & x < 1 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{16ax}{4x^2-3} + 2b & x > 1 \\ 2ax - be^{-x+1} & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{16ax}{4x^2-3} + 2b \right) = \frac{1}{2} + 16a + 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax - be^{-x+1}) = 2a - b$$

Cond. di derivabilità

in $x=1$

$$\frac{1}{2} + 16a + 2b = 2a - b$$

$$\begin{cases} 2 + 2b = a + b + 1 \\ \frac{1}{2} + 16a + 2b = 2a - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a - 1 \\ \frac{1}{2} + 16a + \cancel{2a} - 2 = \cancel{2a} - a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a - 1 \\ 1 + 32a - 4 = -2a + 2 \\ b = \frac{5}{34} - 1 = -\frac{29}{34} \\ 34a = 5 \quad a = \frac{5}{34} \end{cases}$$

Per $a = \frac{5}{34}$ $\wedge$ $b = -\frac{29}{34}$ be

f is continuous at $x=1$ value

$$7) \quad y = \begin{cases} \sqrt{-2x+4} & -6 \leq x < 0 \\ ax^2 - bx + 2 & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

det $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la
funzione verifichi le ipotesi del
th di Rolle nell'int. $[-6; 2]$
Trovare i punti la cui esistenza
è garantita dal teorema.

a) Continuità $[-6, 2]$

$$y = \sqrt{-2x+4}$$

$$-2x+4 \geq 0$$

$$-2x \geq -4$$

$$x \leq 2$$

la f è continua per $x \leq 2$ e
ed è più che continua

$$\text{per } -6 \leq x < 0$$

(combinando la f continua)

$$y = ax^2 - 2bx + 2$$

la f è continua in $\mathbb{R}$

perché somma di f .

continua ed è punto

continua in $0 < x \leq 2$

Occorre valutare la cont. in

$$x_0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-2x+4} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 - 2bx + 2) = 2 = f(0)$$

la f è continua in $x=0$

ed è punto continuo

in $[-6; 2]$

[N.B. la f è continua
 $\forall a, b \in \mathbb{R}$]

b) Derivabilität in $(-6; 2)$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-2x+4}} & (-2) \\ 2ax - 2b \end{cases} \quad \begin{matrix} -6 < x < 0 \\ 0 < x < 2 \end{matrix}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{-2x+4}} \\ 2ax - 2b \end{cases} \quad \begin{matrix} -6 < x < 0 \\ 0 < x < 2 \end{matrix}$$

$$-2x + 4 > 0$$

$$x < 2$$

$$\text{da } y' = \frac{-1}{\sqrt{-2x+4}}$$

è derivabile

per $x < 2$ ed è punto
derivabile in $-6 < x < 0$

Derivabilität in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-2x+4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2ax - 2b) = \cancel{2a} - 2b.$$

Condizione di deriv. in

$x_0 = 0$ è che

$$\boxed{-\frac{1}{2} = -2b}$$

$$3) f(a) = f(b) \text{ cioè}$$

$$f(-6) = f(2)$$

$$f(-6) = \sqrt{12+4} = 4$$

$$f(2) = 4a - 4b + 2$$

$$\boxed{4a - 4b + 2 = 4}$$

Le cond. devono essere
verificate cont.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = -2b \\ 4a - 4b + 2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 1 + 2 = 4 & 4a = 3 & a = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Per $a = \frac{3}{4}$ e $b = \frac{1}{4}$

sono soddisfatte le
i p. del Teorema di Rolle

Riscriviamo la y' con
i valori di a e b ottenuti

$$-6 < x < 0$$

$$0 < x < 2$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-2x+4}} \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y' = 0$$

$$\bullet \quad \frac{-1}{\sqrt{-2x+4}} = 0$$

imp.

$$\bullet \quad \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$3x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{3}}$$

$$\bullet \quad c = \frac{1}{3}$$

è il valore
che soddisfa
la tesi del
teor. di Rolle