

MATRICI

Def: Una *tabella* di $m \cdot n$ numeri ($n, m \geq 1$) del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

È detta **MATRICE** con m righe e n colonne (o matrice $m \times n$).

Tale matrice si indica anche con

$$[a_{i,j}] \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Una **MATRICE** $m \times n$ può anche considerarsi come

m **vettori riga**,
ciascuno di R^n ,
messi uno
sopra l'altro

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{1,*} \\ \underline{a}_{2,*} \\ \dots \\ \underline{a}_{m,*} \end{pmatrix}$$

n **vettori**
colonna,
ciascuno di R^m ,
messi uno di
fianco all'altro

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{*,1} & \underline{a}_{*,2} & \dots & \underline{a}_{*,n} \end{pmatrix}$$

Def.

Se $A = [a_{i,j}]$ è una **MATRICE** $m \times n$ e $\underline{x} \in R^n$ è un **VETTORE** di componenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ definiamo il **PRODOTTO DELLA**

MATRICE A PER IL VETTORE $\underline{x}$ (che può anche essere scritto come vettore colonna e considerato come una matrice $m \times 1$) nel seguente modo:

$$A \underline{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{1,*} \cdot \underline{x} \\ \underline{a}_{2,*} \cdot \underline{x} \\ \dots \\ \underline{a}_{m,*} \cdot \underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

... osservazione

Il prodotto $A\bar{x}$ ha senso solamente se il **NUMERO DELLE COLONNE** della matrice A è uguale al **NUMERO DI COMPONENTI** del vettore $\bar{x}$ (o al numero delle righe della matrice $n \times 1$ coincidente con il vettore $\bar{x}$)

Il prodotto di una matrice per un vettore, così come è stato definito, è una applicazione

$$: R^n \rightarrow R^m$$

$$: \underline{x} \in R^n \rightarrow A\underline{x} \in R^m$$

ed è facile verificare, in base alle proprietà del prodotto scalare, che se α e $\beta \in \mathbb{R}$,

$$A(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) = \alpha A\underline{x} + \beta A\underline{y}$$

questo significa che il prodotto di una matrice per un vettore è una

APPLICAZIONE LINEARE

Def.

Una applicazione $f : R^n \rightarrow R^m$ si dice

LINEARE

se, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \underline{x}, \underline{y} \in R^n$
si ha

$$f(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = \alpha f(\underline{x}) + \beta f(\underline{y})$$

Risultato importante:

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI LINEARI

$\forall f: R^n \rightarrow R^m$ LINEARE

$\exists$ A matrice (m×n):

$$f(\underline{x}) = A \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in R^n$$

$$A = [f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)]$$

ESEMPIO

$f: R^n \rightarrow R$ è tale che

se $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$f(\underline{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

1) f è lineare?

Siano $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e

$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) &= f(\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) = \\ &= \alpha(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \beta(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \\ &= \alpha f(\underline{x}) + \beta f(\underline{y}) \end{aligned}$$

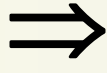
SI, E' LINEARE

2) Qual è la matrice A che rappresenta f ?

$$A = [f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)]$$

$$f(e_1) = 1 + 0 + \dots + 0 = 1; \quad f(e_2) = 0 + 1 + \dots + 0 = 1$$

$$\dots \quad f(e_n) = 0 + 0 + \dots + 1 = 1$$



$$A = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \text{ A matrice } (1 \times n)$$

$$A\bar{x} = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 + \dots + x_n) = f(\bar{x})$$

OPERAZIONI TRA MATRICI

ADDIZIONE TRA MATRICI

Se $A = [a_{i,j}]$ e $B = [b_{i,j}]$

sono due matrici $m \times n$

poniamo

$$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

NB: Per poter fare l'addizione fra due matrici, queste devono essere dello **stesso tipo**:
devono avere lo **stesso numero di righe** e lo **stesso numero di colonne**

PROPRIETA':
SONO LE STESSE
DELL'ADDIZIONE FRA VETTORI!

MOLTIPLICAZIONE DI MATRICI

PER SCALARI

Se $A = [a_{i,j}]$ $i = 1, 2, \dots, m$ $j = 1, 2, \dots, n$

e $\lambda \in \mathbb{R}$

poniamo

$$\lambda A = [\lambda a_{i,j}]$$

$i = 1, 2, \dots, m$ $j = 1, 2, \dots, n$

ESEMPIO

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 10 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ':

**SONO LE STESSA DELLA
MOLTIPLICAZIONE DI UN
VETTORE PER UNO SCALARE!**

MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI

$$\text{Se } A = [a_{i,j}] \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad (m \times n)$$

$$\text{e } B = [b_{i,j}] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (n \times q)$$

poniamo

$$AB = [c_{i,j}] \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, q \quad (m \times q)$$

con

$$c_{i,j} = a_{i,*} \cdot b_{*,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \dots + a_{i,n} \cdot b_{n,j}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} \mathbf{a}_{i,*} \end{matrix} \\
 \left(\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{matrix} \mathbf{b}_{*,j} \end{matrix} \\
 \left(\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{matrix} \mathbf{c}_{i,j} \end{matrix} \\
 \left(\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)
 \end{array}
 \begin{matrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{matrix}$$

Osservazione: per poter effettuare il prodotto fra matrici, le due matrici debbono essere **CONFORMABILI**, cioè il numero delle colonne della prima matrice deve essere uguale al numero delle righe della seconda.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \times 3)$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (3 \times 3)$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,*} \cdot b_{*,1} & a_{1,*} \cdot b_{*,2} & a_{1,*} \cdot b_{*,3} \\ a_{2,*} \cdot b_{*,1} & a_{2,*} \cdot b_{*,2} & a_{2,*} \cdot b_{*,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \times 3)$$

PROPRIETÀ':

1) $(AB)C = A(BC) \Rightarrow ABC$
(p. associativa)

2) $A(B+C) = AB+AC$ e $(B+C)A = BA+CA$
(p. distributiva a dx e a sx)

3) Se $c \in \mathcal{R}$, $c(AB) = (cA)B = A(cB) \Rightarrow cAB$

4) $M \cdot 0 = 0$, $0 \cdot M = 0$
(purché le matrici siano conformabili)

NON VALE LA PROPRIETA' COMMUTATIVA!

*** In generale se A e B sono conformabili non è detto che B ed A lo siano**

*** Anche nel caso particolare di matrici quadrate $n \times n$, in cui si può fare sia AB che BA, in generale $AB \neq BA$**

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

NON VALE LA LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO!

* Se $A=0$ o $B=0 \Rightarrow AB=0$

* Ma $AB=0 \not\Rightarrow A=0$ o $B=0$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICE TRASPOSTA

Data una matrice A ($m \times n$),
scambiando le righe con le colonne

$$A^T \quad (n \times m)$$

otteniamo



MATRICE TRASPOSTA

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ:

1)

$$(A^T)^T = A$$

2)

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

3)

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

4)

$$(AB)^T = B^T A^T$$

PARTICOLARI MATRICI: QUADRATE

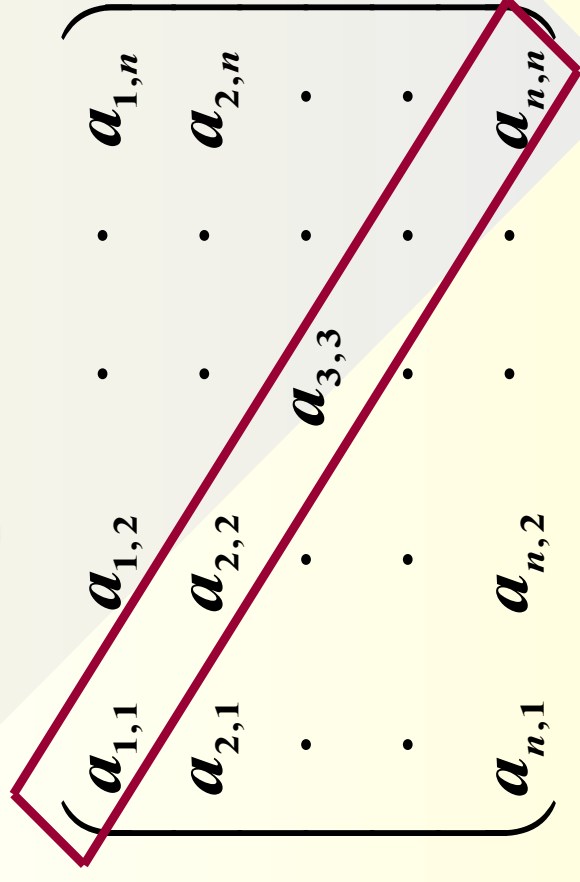
**LE MATRICI QUADRATE DI
ORDINE *n* SONO LE
MATRICI ($n \times n$)**

DIAGONALE PRINCIPALE

Gli elementi

$$a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$$

formano la **diagonale principale** della matrice quadrata di ordine n


$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & a_{3,3} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

MATRICE SIMMETRICA

E' una matrice $A (n \times n)$,

tale che

$$A = A^T$$

***Gli ELEMENTI SIMMETRICI
rispetto alla diagonale principale
sono UGUALI***

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = A$$

A è simmetrica

MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

E' una matrice A ($n \times n$) ,

tale che

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall i > j$$

*Gli ELEMENTI SOTTO LA
DIAGONALE PRINCIPALE
sono NULLI*

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



A è triangolare superiore

MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE

E' una matrice $A (n \times n)$,

tale che

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall i < j$$

*Gli ELEMENTI SOPRA LA
DIAGONALE PRINCIPALE
sono NULLI*

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



A è triangolare inferiore

MATRICE DIAGONALE

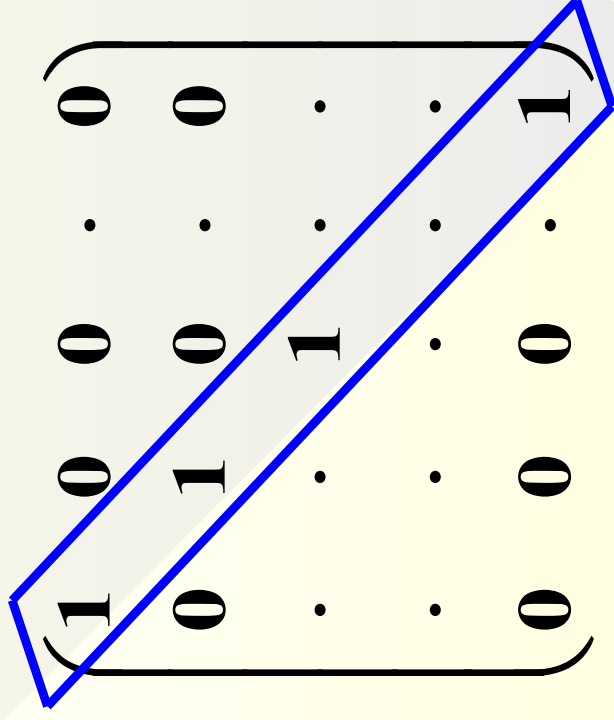
E' una matrice A ($n \times n$) ,
tale che

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall i \neq j$$

MATRICE IDENTITA' (o unità)

E' una matrice A ($n \times n$), tale che

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ 1 & \text{per } i = j \end{cases}$$


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE

di una matrice A di ordine n

Sia M_n l'insieme delle matrici quadrate di ordine n

Definiamo una legge

$$: A \in M_n \rightarrow \det A =$$

a_{11}	$\dots$	a_{n1}	$\in \mathbb{R}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	
a_{1n}	$\dots$	a_{nn}	

Poniamo:

Per $n=1$ $\det A = a_{11}$

Per $n \geq 2$ definiamo COMPLEMENTO

ALGEBRICO di a_{ij} $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,n}A_{i,n} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}A_{i,j}$$

OPPURE

$$\det A = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \dots + a_{n,j}A_{n,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j}A_{i,j}$$

NB: Come si può vedere, in questa definizione **non è specificata** una particolare **riga o colonna** rispetto alla quale si debba **calcolare il determinante**.

La definizione è comunque ben posta
in quanto si può verificare che

**il valore del determinante è
indipendente dalla scelta della
riga o della colonna rispetto
alla quale viene calcolato.**

ESEMPIO

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} =$$

$$= 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)^3 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$$

OPPURE

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = -2 + 3 = 1$$

In generale,

$$\text{se } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ESEMPIO

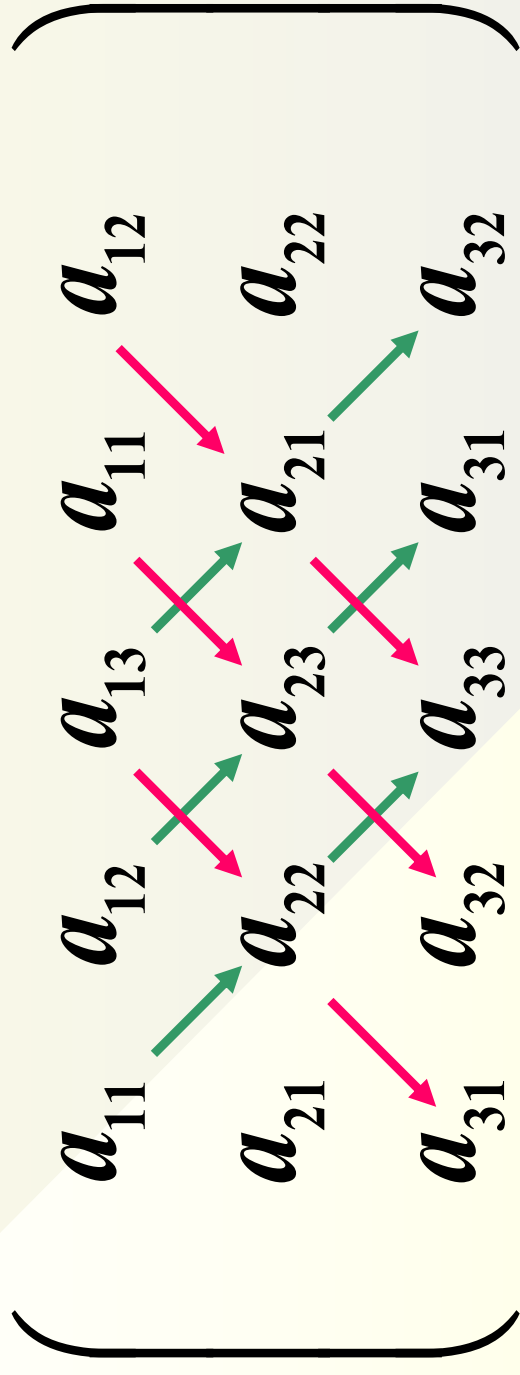
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{Se } n=3 \Rightarrow$$

regola di Sarrus



$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

ESEMPIO

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ -5 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & -7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -7 \cdot \left[3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. -1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= -7 \cdot 141 = -987$$

PROPRIETÀ' dei determinanti

Osservazione: in base alla
definizione di determinante e alla
definizione di matrice trasposta

$$\det A = \det A^T$$



le **proprietà** dei determinanti che sussistono
circa le **righe** valgono anche relativamente alle
colonne

1) Un determinante *cambia di segno* quando si *scambiano* fra loro *due righe* (o colonne)



Un determinante che abbia *due righe* (o colonne) *uguali* è **UGUALE A ZERO**

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Scambiando le prime
due righe si ottiene ↓

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Per la proprietà 1) $\Rightarrow \det A = - \det B$

Poiché $B=A \Rightarrow \det A = - \det A$

$$\Rightarrow \det A = 0$$

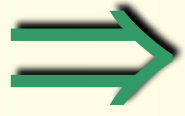
2) Se in un determinante *un vettore riga* (o colonna) è *somma di due vettori*, il determinante è uguale alla *somma di due determinanti* ottenuti da quello iniziale sostituendo tale riga (o colonna) una volta con il *primo* e l'altra volta con il *secondo* dei due *vettori addendi*

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+5 & 3+7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$





Se in un determinante **UNA RIGA** (o colonna) è **SOMMA DI ALTRE DUE**, allora **ESSO E' NULLO**

$$\text{Es. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1+0 & 0 \\ 3 & 3+1 & 1 \\ 5 & 5+0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

3) Se si moltiplica un vettore
riga (o colonna) per un numero,
il determinante risulta
moltiplicato per tale numero

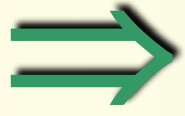
ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 3 \cdot \det A$$



**un determinante avente
due righe (o due colonne)
proporzionali E' NULLO**



Es. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 = 8$$
$$= 4 \cdot 2 = 8$$
$$= 4 \cdot 0 = 0$$

4) Un determinante *non*
cambia se *ad una riga* (o
colonna) *si somma* un'altra riga (o
colonna) *moltiplicata per un*
fattore costante arbitrario

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1	3	5	1	3	5
2	7	0	$2+3 \cdot 1$	$7+3 \cdot 3$	$0+3 \cdot 2$
1	3	2	1	3	2

TEOREMA

Moltiplicando gli **elementi di una riga** (o colonna) per i **complementi algebrici** corrispondenti agli **elementi di un'altra riga** (o colonna) e *sommando* i prodotti ottenuti **si ottiene zero.**

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0$$

TEOREMA

Se

$$A, B \in M_n$$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

NB:

In generale,

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A + B) = 1 \neq 0 = \det A + \det B$$

Le proprietà 1), 2), 3), 4)
sono **molto importanti**
per *semplificare il*
calcolo

dei determinanti

ESEMPIO

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sommando alla seconda colonna, la prima moltiplicata per (-2) , il determinante non cambia per la proprietà 4

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2+(-2) \cdot 1 & 1 \\ 2 & 4+(-2) \cdot 2 & 3 \\ 3 & 1+(-2) \cdot 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

Se n è grande $\Rightarrow$ il calcolo dei determinanti diventa **complicato**

Resta semplice anche per n grande nel caso di **matrici triangolari inferiori e superiori**.

In tal caso il determinante è dato dal **PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE**

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} d_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & d_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$$

In particolare

$$|I_n| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per ogni matrice A di ordine n

$$I_n A = A I_n = A$$



I_n è l'elemento neutro
della moltiplicazione

MATRICE INVERSA

Nell'insieme dei numeri reali,
se $a \in \mathcal{R}$, $a \neq 0 \Rightarrow \exists$ l'inverso di a cioè

$$\exists b \in \mathcal{R}: ba = ab = 1$$

Nell'insieme delle matrici quadrate,

$\exists$ la matrice inversa?

Cioè,

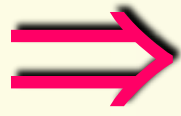
data una matrice A di ordine n ,
esiste una matrice B tale che

$$\begin{aligned} AB (B \text{ inv. destra}) &= \\ = BA (B \text{ inv. sinistra}) &= \\ &= I ? \end{aligned}$$

Poiché il prodotto tra matrici non è commutativo, in generale $AB \neq BA$
CI SI PUÒ CHIEDERE:

1) Potrebbe esistere l'inversa destra e non esistere l'inversa sinistra?

2) Potrebbero esistere entrambe ed essere diverse fra loro?



**Si dimostra che SE ESISTE
L'INVERSA DESTRA (sin),
ESISTE ANCHE L'INVERSA
SINISTRA (destra)**

E SONO UGUALI TRA LORO

Si dice che la matrice A

E' INVERTIBILE

se esiste la matrice inversa A^{-1} :

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

*Ogni matrice A di
ordine n è invertibile?*

NO

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

non è invertibile

Se lo fosse, esisterebbe $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

tale che $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = I_2$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta & 0 \\ 2\gamma + 3\delta & 0 \end{pmatrix} \neq I_2, \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$$

1 Quando una **MATRICE** è
INVERTIBILE ?

2 Come si calcola la
MATRICE INVERSA ?

Diamo una prima risposta alla prima domanda

$$\text{Siano } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Si chiama SISTEMA LINEARE
di n equazioni in n incognite

IL VETTORE

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

che soddisfa l'equazione

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

si chiama

**vettore soluzione
del sistema**

Se A è invertibile,

$$A\bar{x} = \bar{b}$$



$$A^{-1}\bar{b} = A^{-1}Ax = I_n x = \bar{x}$$

Si verifica immediatamente che
 $A^{-1}\bar{b}$ è l'unica soluzione del
sistema dato

A invertibile $\Rightarrow Ax = \underline{b}$
univocamente risolubile per
ogni scelta di $\underline{b}$

Si può vedere facilmente che vale
anche l'inverso di questa proposizione
per cui

A invertibile $\Leftrightarrow Ax = \underline{b}$
univocamente risolubile
per ogni scelta di $\underline{b}$

Teorema di CRAMER

Sia $A\bar{x}=\bar{b}$ un sistema di n equazioni lineari.

Se $\det A \neq 0$ il sistema ammette **una, ed una sola soluzione**, per ogni scelta del vettore $\bar{b}$ dei termini noti;

il vettore soluzione è dato da

$$\bar{x} = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \dots, \frac{D_n}{D} \right)$$

D_j è il determinante dell'amatrice
 ottenuta da A , sostituendo alla
 j -esima colonna il vettore dei
 termini noti $\underline{b}$.

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & \dots & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & b_{i-1} & \dots & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & b_i & \dots & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & b_{i+1} & \dots & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & \dots & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

NB. $\underline{x} = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \dots, \frac{D_n}{D} \right)$ si può anche scrivere

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

e poiché se il sistema è risolubile $\forall$ scelta di $\underline{b}$
 $\Rightarrow$ **A invertibile** (già visto $\Leftrightarrow$) e l'unica soluzione

$$\text{è } \underline{x} = A^{-1} \underline{b}$$



$$A^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix}$$

Ricapitolando:

$$\det A \neq 0$$



sistema univocamente risolubile $\forall \underline{b}$



A invertibile e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ D & \ddots & D \\ \frac{A_{1n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \\ D & & D \end{pmatrix}$$

Det $A \neq 0$ caratterizza le MATRICI **INVERTIBILI**?

SI

Si può vedere facilmente infatti che

$$A \text{ invertibile} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

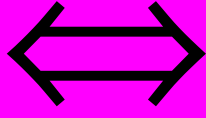
$\Leftarrow$ Già dimostrato

$$\Rightarrow \text{Se } A \text{ è invertibile} \Rightarrow \exists A^{-1} : A^{-1} A = I_n$$

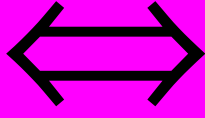
$$\Rightarrow \det(A^{-1} A) = \det I_n \Rightarrow \det A^{-1} \det A = 1$$
$$\Rightarrow \det A \neq 0$$

Conclusion

A invertibile



$A\bar{x}=\bar{b}$ è univocamente risolubile $\forall \bar{b}$



$\text{Det } A \neq 0$