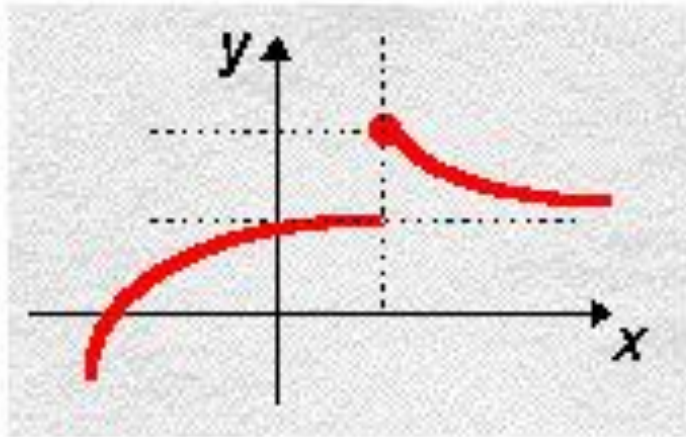
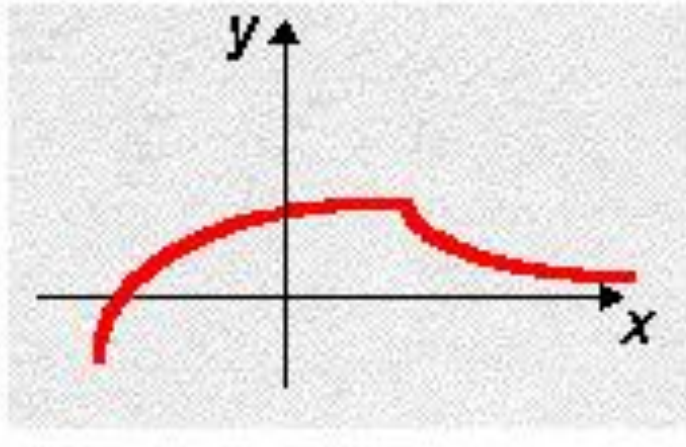


FUNZIONI CONTINUE

(1)



(2)



Fra i due grafici (1) e (2), quale, secondo il vostro intuito, può essere quello di una funzione continua?

IL SECONDO

(Alcuni dicono che una funzione è continua su un intervallo quando la si può rappresentare senza staccare la penna dal foglio)

Data $f : A \rightarrow R$ diamo una
DEFINIZIONE rigorosa di
**continuità della funzione in un
punto $x^* \in A$**

Se $x^* \in A$ ed è un punto di
accumulazione per A , si dirà che
 f è continua in x^* se

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = f(x^*)$$

◆ Se $x^* \in A$ è un punto isolato, si dirà che

f è continua in x^*

◆ Si dirà che

f è continua in A

se essa è continua $\forall x^* \in A$

La **definizione di continuità** in un punto **$x^* \in A$** sta a significare **che:**

$$a) \quad \exists \lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = L$$

$$b) \quad L = f(x^*)$$

Se almeno una delle due
condizioni (a) o (b) viene a
mancare, il punto x^* sarà un

PUNTO DI

DISCONTINUITA'

per la funzione data

I caso

$$\exists \lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = L \quad \text{ma} \quad L \neq f(x^*)$$

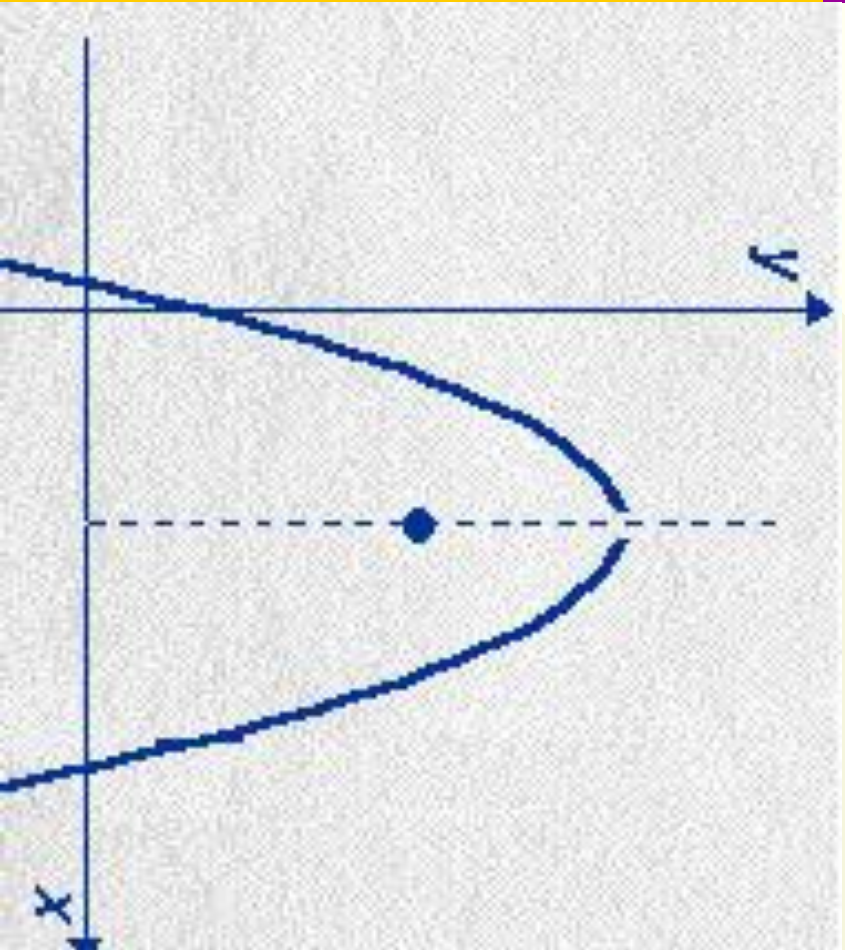


x^* è un punto di discontinuità
eliminabile

La funzione può essere prolungata per
continuità, **ridefinendola** nel punto di
discontinuità con valore uguale a quello del
limite

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 1 & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 4x + 1) = 5 \\ \neq 3 = f(2)$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$$

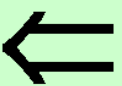
è continua

II caso

~~$\forall \lim_{x \rightarrow x^*} f(x)$~~ ma

$$\exists \lim_{x \rightarrow (x^*)^-} f(x) = L' \text{ e } \exists \lim_{x \rightarrow (x^*)^+} f(x) = L''$$

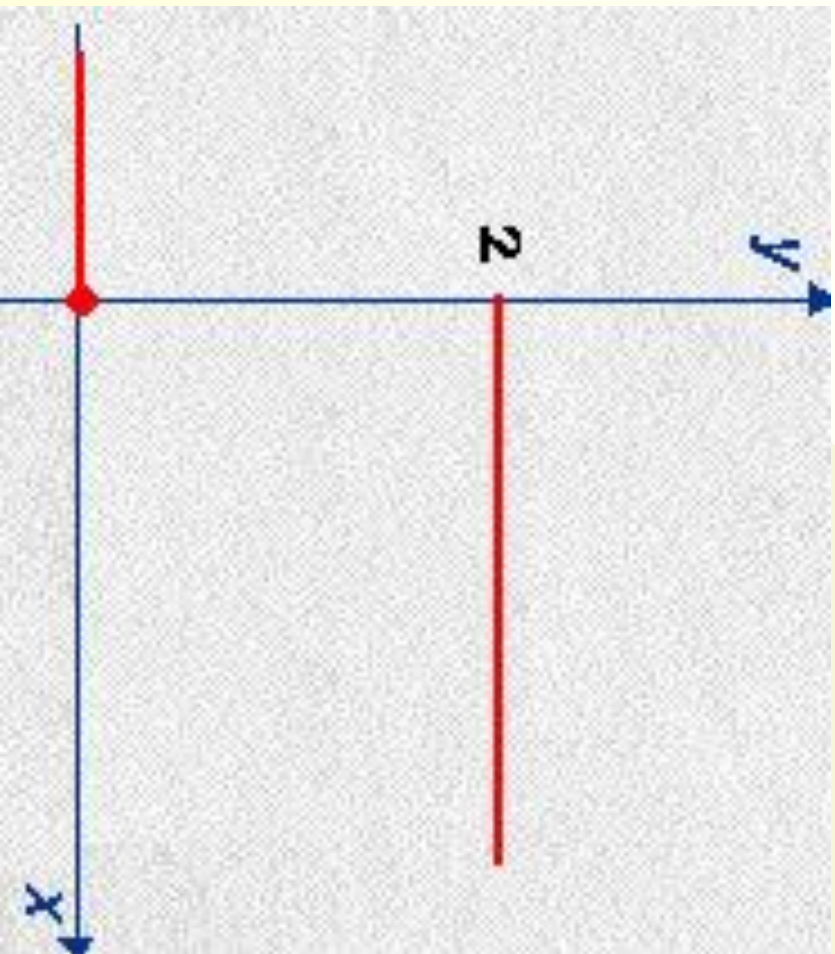
con L' e L'' finiti e $L' \neq L''$



x^* è un punto di discontinuità
di prima specie

ESEMPIO

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} + 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

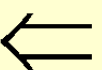
Poichè $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq f(0) = f(0)$ si dice che $f(x)$

è continua a sinistra in x^*

III caso

$$\exists \lim_{x \rightarrow (x^*)^-} f(x) = L' \text{ e } \exists \lim_{x \rightarrow (x^*)^+} f(x) = L''$$

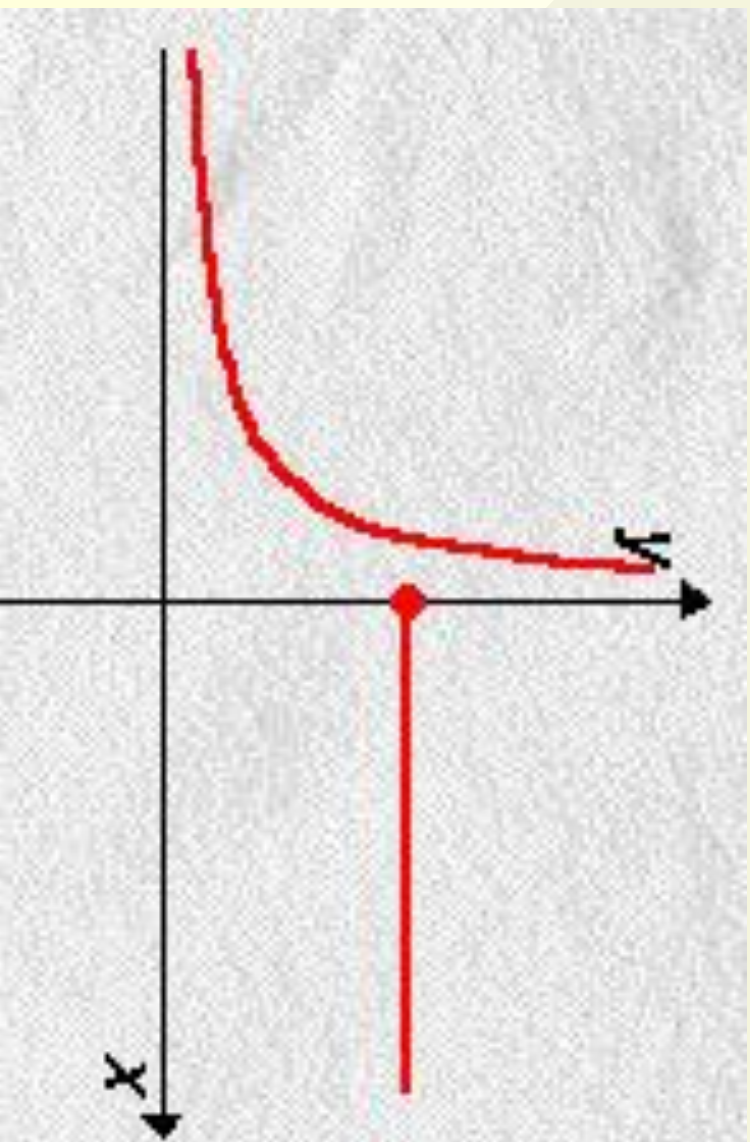
con almeno uno dei due infinito



x^* è un punto di discontinuità
di seconda specie

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

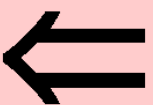


$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

IV caso

~~$\exists$~~ almeno uno dei due limiti

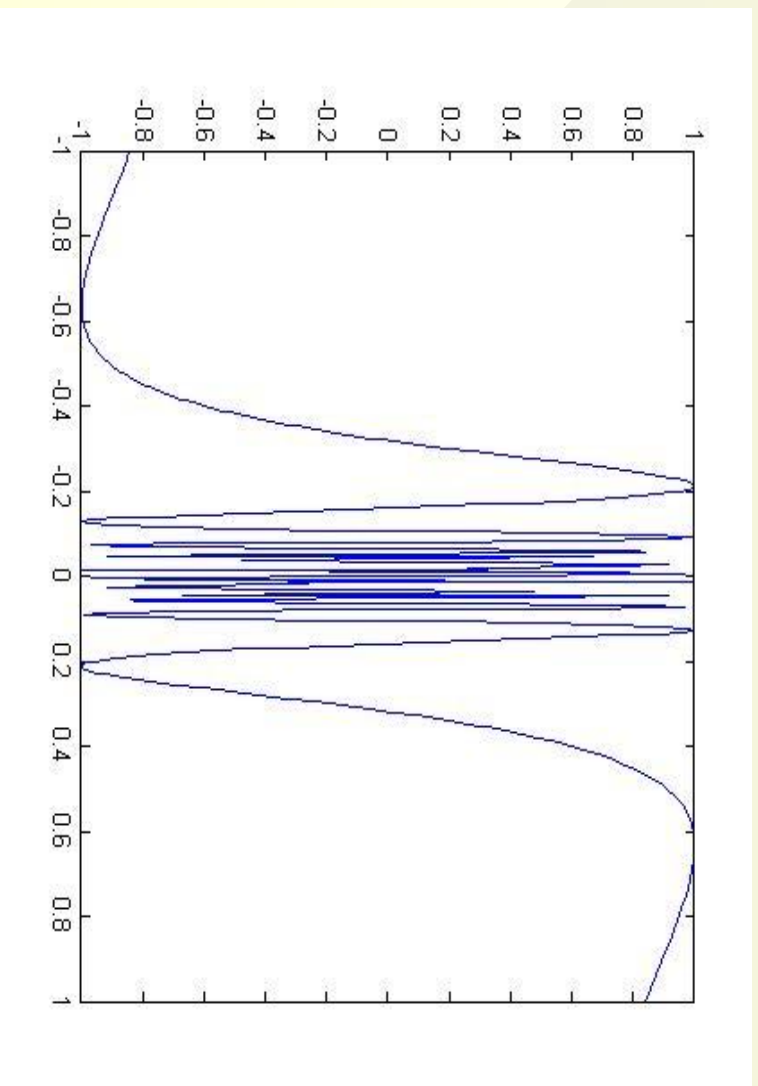
$$\lim_{x \rightarrow (x^*)^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (x^*)^+} f(x)$$



x^* è un punto di discontinuità
di terza specie

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ non esiste

NB: dalle proprietà relative alle operazioni con i limiti, si deduce facilmente che:

- 1 la somma di funzioni continue in x^* è una *funzione continua* in x^*
- 2 il prodotto di funzioni continue in x^* è una *funzione continua* in x^*
- 3 il rapporto di funzioni continue in x^* è una *funzione continua* in x^* se la funzione al denominatore è $\neq 0$ in x^*

Altri due teoremi sulle funzioni continue

TEOREMA (della funzione composta)

Sia g continua in x^* , f continua in $y^*=g(x^*)$



$f \circ g$ è continua in x^*

TEOREMA (della funzione inversa)

Sia $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile $\Rightarrow$

$$f^{-1} : f(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$$

è continua sul suo dominio

ESEMPIO

Stabilire se $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + x^2 + k \cos \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \log(x^2) & x < 0 \end{cases}$$

sia continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

- **per $x > 0$ la funzione è continua $\forall k \in \mathbb{R}$ in quanto**
 $\sin x$ e x^2 sono funzioni continue, $\cos \sqrt{x}$ è composta mediante funzioni continue quindi è continua; **la somma di funzioni continue è continua**
- **per $x < 0$ la funzione è continua $\forall k \in \mathbb{R}$ in quanto**
composta mediante funzioni continue e
indipendente da k

...continua

E per $x=0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$\forall k \in \mathbb{R}$ $x^*=0$ è un punto di discontinuità di
seconda specie



/ $\exists k \in \mathbb{R} : f(x)$ sia continua
 $\forall x \in \mathbb{R}$

Principali teoremi sulle funzioni continue

TEOREMA (di Weierstrass)

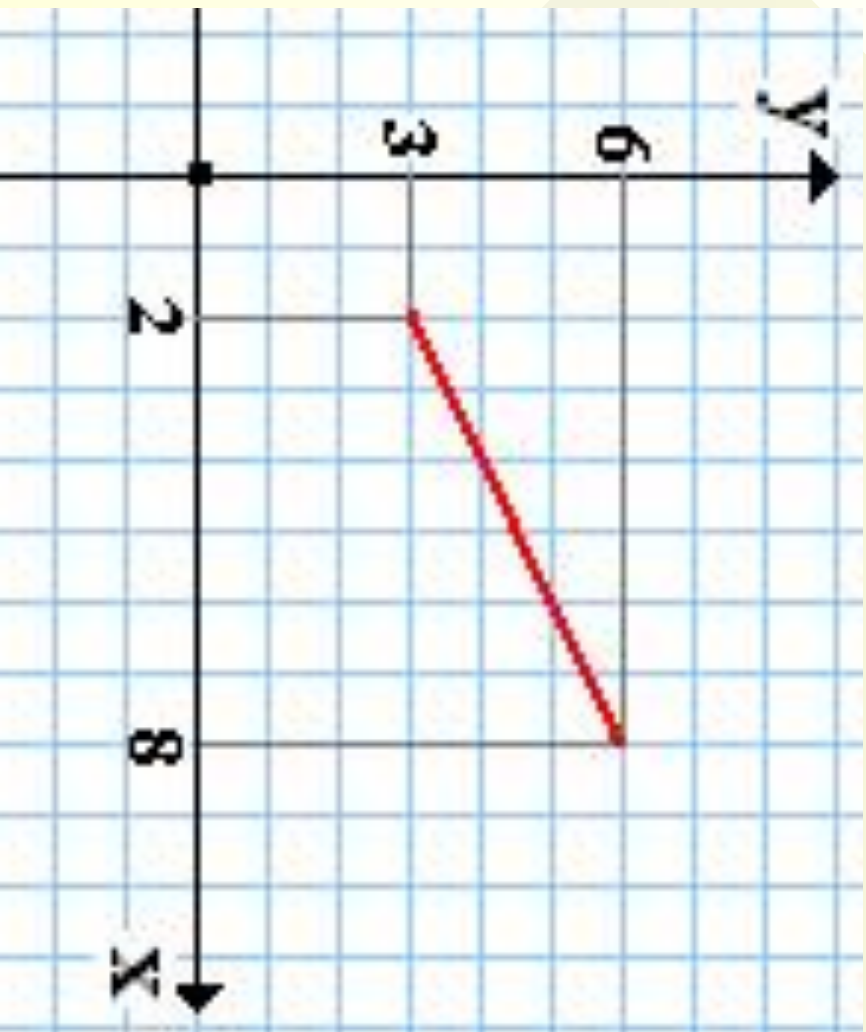
Una funzione **continua** in un intervallo **$[a,b]$ chiuso e limitato**

è dotata di **massimo** e di **minimo** nell'intervallo

Osservazione: se l'intervallo $[a,b]$ non fosse chiuso, la tesi del Teorema non sarebbe necessariamente vera.

ESEMPIO

$$f(2,8) \rightarrow R \text{ con } f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



Non è dotata né di minimo né di massimo ma solo di $\inf=3$ e di $\sup=6$

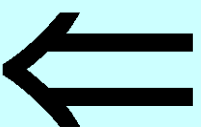
TEOREMA (di esistenza degli zeri)



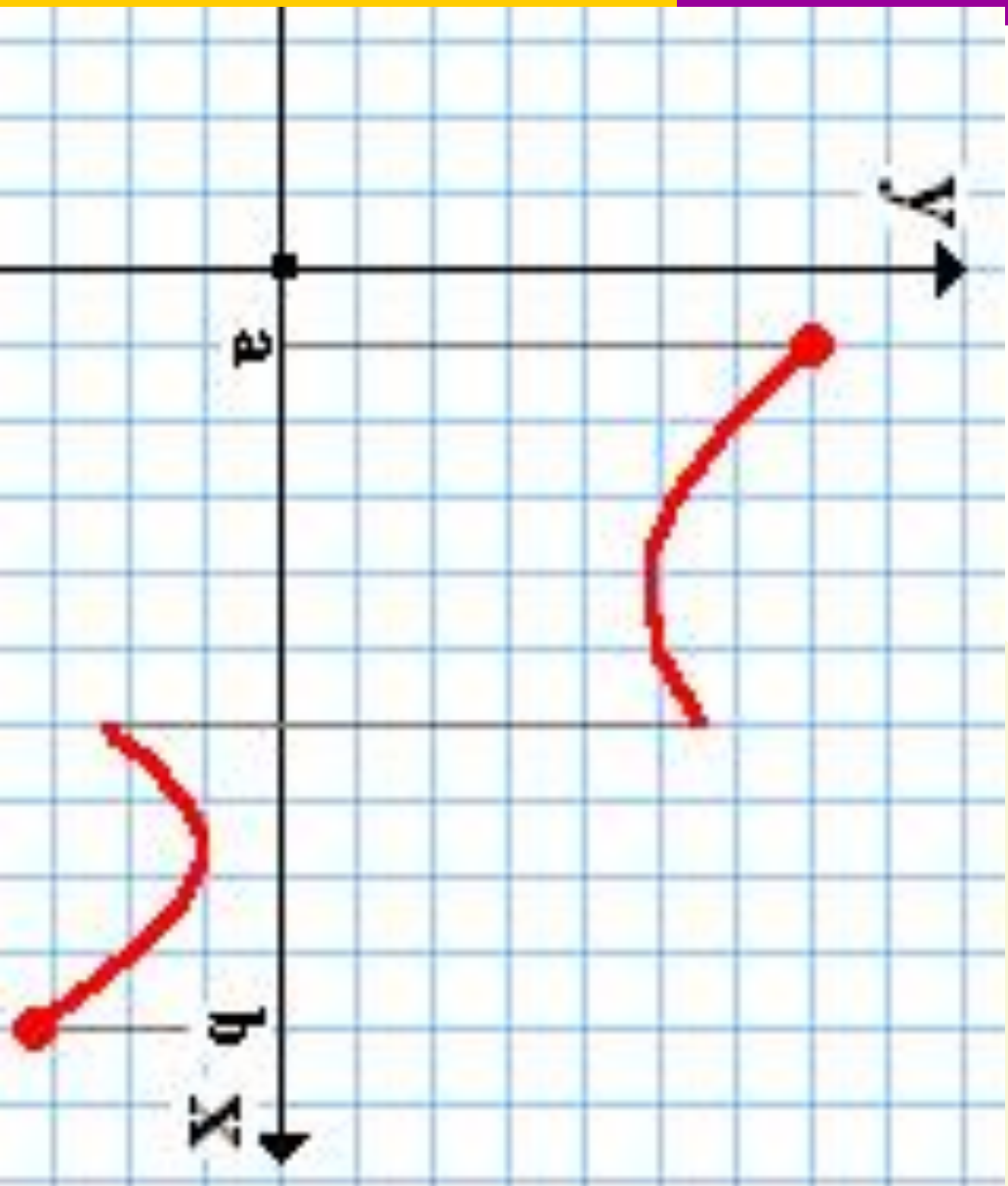
Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione
continua in $[a,b]$



Sia $f(a) \cdot f(b) < 0$



$$\exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = 0$$



Osservazione:
se la funzione
non fosse
continua in
 $[a,b]$, pur
assumendo
valori di segno
opposto agli
estremi
dell'intervallo
potrebbe non
annullarsi per
alcun punto di
 (a,b)

TEOREMA (dei valori intermedi)

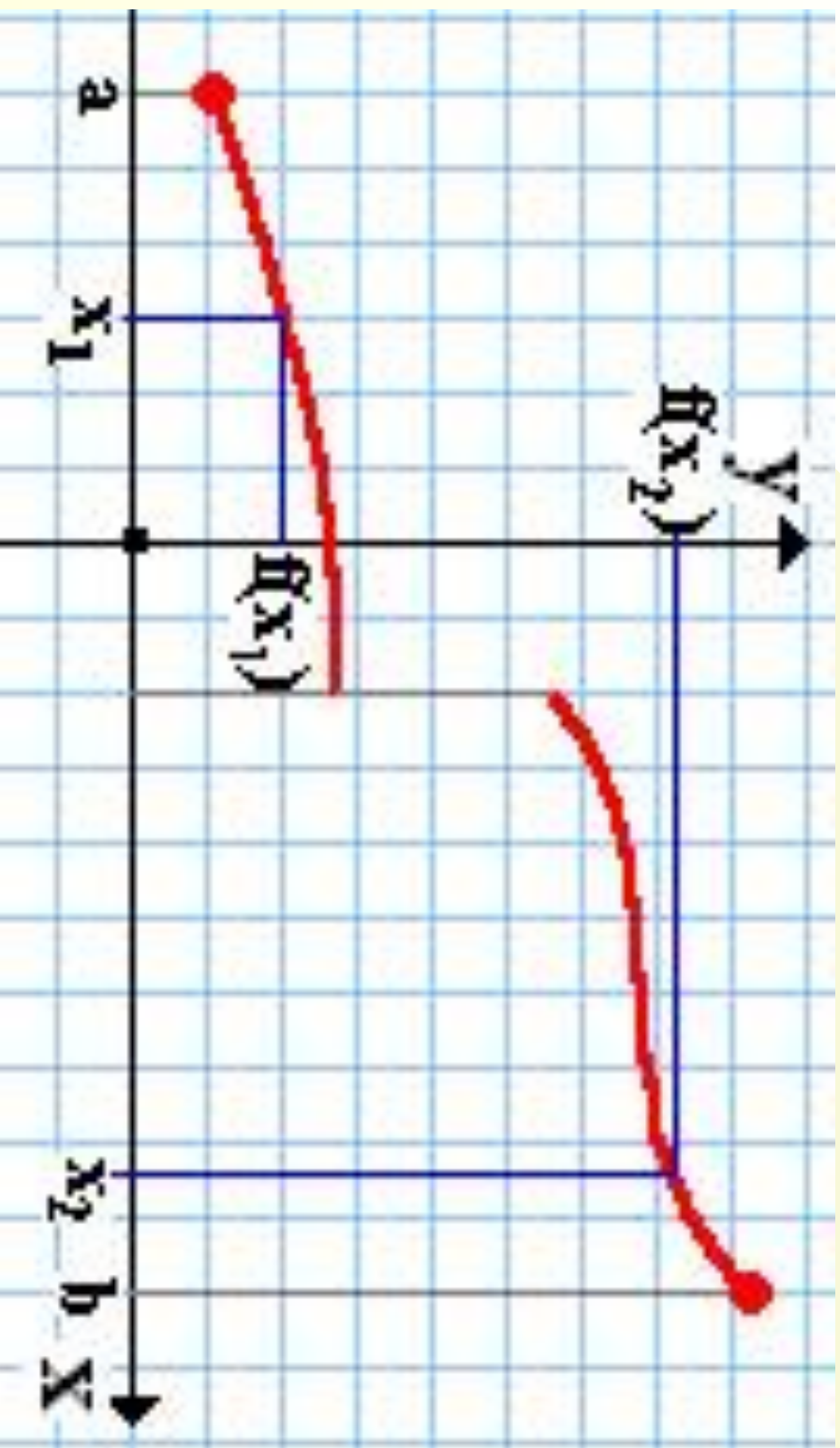
Sia $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione **continua**

Se $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$

allora f assume tutti i valori

compresi fra y_1 e y_2 (y_2 e y_1)

per x compreso tra x_1 e x_2 (x_2 e x_1)



Osservazione: se la funzione non fosse continua in (a,b) , la tesi potrebbe non essere vera