

LIMITI A DUE VARIABILI

1) VERIFICARE CHE $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} = 0$

Per svolgere il limite stimiamo il valore assoluto della funzione;
 $0 \leq \left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \right| = |x| \left| \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$

* discende dal fatto che $0 \leq (A-B)^2$; $0 \leq A^2 - 2AB + B^2$; $2AB \leq A^2 + B^2$
 $\frac{AB}{A^2 + B^2} \leq \frac{1}{2}$ (nel nostro caso $A=x^2$ e $B=y$) $\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} = 0$

2) CALCOLARE, SE ESISTE, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Ripetiamo il ragionamento precedente $0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$
 NULLA POSSIAMO CONCLUDERE.

Cerchiamo quindi di dimostrare che il LIMITE NON ESISTE.
 In che modo? Dobbiamo trovare almeno due curve su cui la restrizione della funzione tende a valori diversi.

→ PRENDIAMO UNA RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE: $y = mx$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot mx}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^2(x^2 + m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0$

→ PRENDIAMO LA PARABOLA $y = x^2$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \left(\frac{x^4}{2x^4} \right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Possiamo dedurre essendo $\frac{1}{2} \neq 0$ CHE IL LIMITE NON ESISTE!