

Determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione $z = x^2 + y^2 - \ln(x^2 - y^2)$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x - \frac{2x}{x^2 - y^2} = 0 \\ 2y - \frac{-2y}{x^2 - y^2} = 0 \end{cases} \begin{cases} x - \frac{x}{x^2 - y^2} = 0 \\ y + \frac{y}{x^2 - y^2} = 0 \end{cases} \begin{cases} x^3 - xy^2 - x = 0 \\ x^2y - y^3 + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2 - y^2 - 1) = 0 \\ y(x^2 - y^2 + 1) = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y(-y^2 + 1) = 0 \end{cases} \begin{cases} -y^3 + y = 0 \\ y(y^2 - 1) = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ - \end{cases} \begin{cases} x = \pm \sqrt{1 + y^2} \\ y(1 + y^2 - y^2 + 1) = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$P_1(0,0)$ $P_2(0,1)$ $P_3(0,-1)$ $P_4(1,0)$ $P_5(-1,0)$
 $\notin$ DOMINIO $\notin$ DOMINIO $\notin$ DOMINIO $\in$ DOMINIO $\in$ DOMINIO

$$f_{xx} = 2 - \frac{2 \cdot (x^2 - y^2) - 2x(2x)}{(x^2 - y^2)^2} = 2 - \frac{2x^2 - 2y^2 - 4x^2}{(x^2 - y^2)^2} = 2 + \frac{2x^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$f_{xy} = - \frac{-2x(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = - \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$f_{yy} = 2 - \frac{-2(x^2 - y^2) + 2y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = +2 - \frac{-2x^2 - 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = +2 + \frac{2x^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2x^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} & \frac{-4xy}{(x^2 - y^2)^2} \\ \frac{-4xy}{(x^2 - y^2)^2} & 2 + \frac{2x^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} \end{pmatrix}; H(1,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 16 > 0 \quad \begin{matrix} f_{xx} = 4 \\ > 0 \end{matrix}$$

$P(1,0)$
MINIMO REL.

$$H(-1,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 16 > 0 \quad f_{xx} > 0$$

$\Rightarrow Q(-1,0)$ MINIMO RELATIVO.