

Determinare per quali valori di t le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2t & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -t \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2t & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -t & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso rango.

Si osserva che B contiene $A \Rightarrow r(B)$ non può essere inferiore a $r(A)$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2t & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -t \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2(0-2) + t(6t-2) = 6t^2 - 2t - 4$$

$$\det A = 0 \quad 3t^2 - t - 2 = 0 \quad \begin{cases} t=1 \\ t=-2/3 \end{cases} ; \text{DISTINGUIAMO I SEGUENTI CASI:}$$

1° CASO $t \neq 1$ e $t \neq -\frac{2}{3}$ $\boxed{r(A) = 3 \quad \text{e} \quad r(B) = 3}$

2° CASO $t = 1$ si ottiene $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ mentre $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{r(A) = 2}$$

$B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ tutti i minori ordine 3 sono nulli
 $\Rightarrow \boxed{r(B) = 2}$

3° CASO $t = -\frac{2}{3}$ $A = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$r(A) = 2$ ma $\begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \quad r(B) = 3$

$\Rightarrow$ LE 2 MATRICI HANNO LO STESSO RANGO
 $\forall t \neq 1$ e $t \neq -\frac{2}{3}$ e se $t = 1$ (2)
 (3)