7 Durata media finanziaria e immunizzazione finanziaria

"Ho denaro sufficiente per il resto della mia vita,
a meno che non compri qualcosa."
– Jackie Mason (comico statunitense, 1931 –)

7.1 Premessa

Chi investe in un titolo a reddito fisso, quale un'obbligazione, nel tempo vedrà variare il valore del proprio investimento, e ciò per diversi motivi. Quando, nel Capitolo 4, abbiamo discusso l'ammortamento di un'obbligazione, abbiamo visto che il valore ammortizzato di un'obbligazione segue una naturale progressione verso il valore di rimborso man mano che ci si avvicina alla scadenza del titolo. Nel tempo di vita dell'obbligazione, anche il suo valore di mercato convergerà al valore di rimborso. Queste variazioni di lungo termine del valore delle obbligazioni sono in qualche misura prevedibili, ma il valore di mercato è soggetto a fluttuazioni, a causa delle variazioni delle condizioni del mercato, quali i tassi di interesse e la percezione della possibile insolvenza dell'emittente rispetto a qualche pagamento.

Ad ogni epoca, il valore di mercato di un'obbligazione è influenzato dai rendimenti correnti quotati sul mercato obbligazionario. Una variazione dei tassi di rendimento può avere un impatto repentino e significativo sul valore di mercato di un'obbligazione. Quando un investitore acquista un'obbligazione, non ha alcuna certezza riguardo al fatto che il tasso di rendimento al quale ha effettuato l'acquisto rimanga costante fino alla scadenza del titolo. In effetti, è raro che non si verifichino variazioni. Questa eventualità è detta RISCHIO DI TASSO. Il prossimo esempio descrive una situazione in cui i tassi di rendimento di un'obbligazione variano nel tempo.

Esempio 7.1 Spostamento della curva dei rendimenti

Supponiamo che la corrente struttura per scadenze dei tassi di interesse preveda i seguenti tassi a pronti per le scadenze a 1, 2, 3 e 4 anni:

Scadenza	1 anno	2 anni	3 anni	4 anni
Tasso a pronti	$i_0(1) = 0{,}05$	$i_0(2) = 0{,}10$	$i_0(3) = 0{,}15$	$i_0(4) = 0{,}20$

Supponiamo inoltre di acquistare un'obbligazione senza cedole (Zero Coupon Bond, ZCB o Titolo a Cedola Nulla, TCN) con scadenza 4 anni e valore nominale 100 €; supponiamo altresì che al trascorrere del tempo la struttura dei tassi coincida con quella osservata un anno prima. In altre parole, al tempo 1 si ha $i_1(1) = 0{,}05$, $i_1(2) = 0{,}10$ ecc.; al tempo 2 si ha $i_2(1) = 0{,}05$, $i_2(2) = 0{,}10$ ecc. Determiniamo il prezzo d'acquisto del titolo all'epoca 0 e i suoi valori contabile e di mercato alle epoche 1, 2 e 3 anni.

Soluzione

Il prezzo di acquisto dello ZCB all'epoca 0 è $100 \cdot 1{,}2^{-4} = 48{,}23$ €. Il valore contabile è valutato a costo storico, dunque con il rendimento alla scadenza definito dal prezzo d'acquisto (20%, in questo caso). Al tempo 1 (dopo un anno) il valore contabile sarà $100 \cdot 1{,}2^{-3} = 57{,}87$ €. All'epoca 1 l'obbligazione si troverà a tre anni dalla scadenza, perciò il rendimento di mercato sarà uguale al 15% (siamo nell'ipotesi che la struttura dei tassi coincida con quella dell'anno precedente, perciò un'obbligazione senza cedole a tre anni avrà un tasso di rendimento $i_1(3) = i_0(3) = 15\%$). Al tempo 1 il valore di mercato dell'obbligazione sarà pertanto $100 \cdot 1{,}15^{-3} = 65{,}75$ €. Si noti che, dopo un anno, come obbligazionisti avremo un RENDIMENTO PER IL PERIODO DI DETENZIONE (HOLDING PERIOD) di un anno pari a $\frac{65{,}75}{48{,}23} - 1 = 0{,}3634$ (36,34%). Si noti, però, che per poter realizzare questo rendimento il titolo dovrebbe essere venduto all'epoca 1.

Al tempo 2 (la fine del secondo anno) il valore contabile sarà $100 \cdot 1{,}2^{-2} = 69{,}44$ € e quello di mercato sarà $100 \cdot 1{,}1^{-2} = 82{,}64$ €. Al tempo 3 il valore contabile sarà $100 \cdot 1{,}2^{-1} = 83{,}33$ € e il valore di mercato sarà $100 \cdot 1{,}05^{-1} = 95{,}24$ €. Al tempo 4 l'obbligazione giunge a scadenza e il suo valore (contabile e di mercato) sarà 100 €. Riassumiamo nel seguente schema i valori contabili e di mercato che abbiamo calcolato.

Epoca	Valore contabile	Valore di mercato
0	48,23 €	48,23 €
1	57,87 €	65,75 €
2	69,44 €	82,64 €
3	83,33 €	95,24 €
4	100,00 €	100,00 €

L'espressione "spostamento della curva dei rendimenti" nel titolo del precedente esempio fa riferimento a una situazione in cui nel tempo si osserva un allontanamento del valore di mercato dal valore contabile. Ciò accade quando la struttura per scadenze non evolve nel tempo in modo coerente con la struttura iniziale. Siccome la struttura $i_0(s)$ è crescente, ritrovare $i_t(s) = i_0(s)$ significa che i tassi non hanno seguito l'evoluzione descritta dalla struttura all'epoca 0. Per esempio, al tempo 0 il tasso a termine $i_{0|1}(1) = 15{,}24\%$, ma arrivati al tempo 1 il tasso a pronti $i_1(1) = 5\%$.

Nel tempo, i rendimenti richiesti dagli investitori possono variare, il che ha effetti sulla struttura per scadenze e sul valore di mercato dei titoli obbligazionari. Se per una data obbligazione il tasso di rendimento del mercato è maggiore del rendimento originale (contabile) ottenuto dall'obbligazionista, allora il valore attuale dei pagamenti futuri dell'obbligazione calcolato con il rendimento di mercato sarà inferiore a quello calcolato con il rendimento originale (e viceversa, se il rendimento di mercato è minore di quello contabile).

L'obbligazionista può vendere il titolo prima della scadenza oppure no; se non lo fa, realizzerà come tasso interno di rendimento dell'investimento il rendimento alla scadenza originale (definito dal prezzo di acquisto), indipendentemente dalle variazioni dei tassi di interesse intervenute nel frattempo sul mercato. Se invece vende il titolo prima della scadenza a un prezzo diverso dal valore contabile, il suo rendimento per il periodo in cui ha detenuto il titolo sarà con tutta probabilità diverso dal rendimento alla scadenza originale, essendo influenzato dal prezzo di vendita, e cioè dal rendimento di mercato al momento della vendita.

Lo scostamento tra valore di mercato e valore contabile di un titolo obbligazionario può emergere in tempi più brevi di un anno, per esempio giornalmente. Supponiamo, con riferimento all'Esempio 7.1 precedente, di acquistare lo ZCB con scadenza a 4 anni all'epoca 0, al tasso di rendimento del 20%, pagando il prezzo di 48,23 €. Successivamente, lo stesso giorno dell'acquisto, interviene qualche evento significativo che modifica la previsione economica e finanziaria degli investitori, per cui il tasso a pronti a 4 anni sale improvvisamente al 22%. Il valore di mercato dello ZCB diventa $100 \cdot 1{,}22^{-4} = 45{,}14$ €, con una perdita (rispetto al valore di mercato) immediata di 3,09 €. Se l'investitore vendesse il titolo a fine giornata, subirebbe questa perdita; viceversa, se mantiene l'investimento, la perdita è solo potenziale, in quanto non realizzata.

Per questo esempio abbiamo utilizzato valori numerici che è improbabile incontrare nei principali mercati finanziari mondiali e che ingigantiscono le possibili conseguenze di eventuali variazioni a breve termine dei tassi di interesse. Nella prossima sezione presentiamo un'analisi sistematica della sensibilità del prezzo di un titolo a reddito fisso rispetto alle variazioni dei tassi di rendimento.

7.2 Durata media finanziaria per più flussi di cassa e per un'obbligazione

Nel 1938, l'economista canadese Frederick Macaulay, figlio di un famoso attuario, nel suo libro *The Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856* pubblicò uno studio particolareggiato sull'andamento dei tassi di interesse dal 1856 al 1938. Una parte di tale studio era dedicata al concetto di assenza di rischio relativamente alla possibilità che, per effetto di una variazione dei rendimenti, il valore di mercato di un titolo (o di un prestito) possa discostarsi dal suo valore contabile. Questo rischio è oggi noto come RISCHIO DI TASSO D'INTERESSE (nella valutazione di Macaulay non era invece considerato il rischio di insolvenza, che quindi escluderemo dal ragionamento che segue). Secondo Macaulay, "solo i prestiti a breve termine possono essere considerati assolutamente privi di rischio (di tasso)". Macaulay definì, quindi, l'"arco temporale" rispetto al quale valutare l'assenza di rischio.

Nella definizione introdotta da Macaulay, la nozione di "arco temporale" non riguarda il tempo mancante alla scadenza del prestito. Come esempio puramente illustrativo di tale nozione, si considerino i seguenti due prestiti. Per entrambi la durata complessiva è 10 anni, l'importo iniziale è 100 € e il tasso effettivo di interesse su base annuale è il 10%. Per i due prestiti, la restituzione avviene con i seguenti pagamenti:

Prestito 1: un unico pagamento di 259,37 € dopo 10 anni (100 € $= 259{,}37 \cdot 1{,}1^{-10}$);

Prestito 2: un pagamento di 100 € dopo 1 anno e uno di 23,60 € dopo 10 anni (100 € $= 100 \cdot 1{,}1^{-1} + 23{,}60 \cdot 1{,}1^{-10}$).

Macaulay volle definire una misura in base alla quale il Prestito 1 verrebbe classificato con "arco temporale più lungo" rispetto al Prestito 2, in quanto per il primo prestito "la maggior parte" del pagamento che restituisce il prestito è versata più tardi. Chiamò questa misura temporale DURATA MEDIA FINANZIARIA (O MEAN DURATION O MACAULAY DURATION O semplicemente DURATION). Essa tiene conto sia dell'importo sia del tempo in cui viene effettuato ogni pagamento (successivo all'epoca corrente); risulta infatti essere una media ponderata degli intervalli tra l'epoca corrente e le epoche in cui hanno luogo i pagamenti futuri (una media ponderata, cioè, delle durate residue, rispetto all'epoca corrente, dei flussi futuri).

La durata media finanziaria è definita per un insieme predeterminato di flussi di cassa, tutti in entrata o tutti in uscita, quali per esempio quelli che si hanno per una rendita o per un titolo obbligazionario. La *duration* fu originariamente formulata assumendo una struttura per scadenze piatta; la definizione originale è però facilmente adattabile a una struttura per scadenze non piatta.

Definizione 7.1 DURATA MEDIA FINANZIARIA
CON STRUTTURA PER SCADENZE PIATTA

Consideriamo una struttura per scadenze piatta, con tassi annuali a pronti pari a i per tutte le scadenze.

Consideriamo un insieme di flussi di cassa a reddito fisso, costituito dai pagamenti (prefissati e tutti in entrata) A_1, $A_2, \ldots, A_n$ alle epoche (espresse in anni) $1, 2, \ldots, n$. Si definisce DURATA MEDIA FINANZIARIA (O MEAN DURATION O MACAULAY DURATION O semplicemente DURATION) dei flussi di cassa, e la si indica con D, sottintendendo il riferimento all'epoca corrente 0, la seguente media (aritmetica ponderata):

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i)^{-t}}. \tag{7.1}$$

CON STRUTTURA PER SCADENZE GENERICA

Consideriamo ora la struttura per scadenze $\{i_0(t)\}_{t>0}$, dove $i_0(t)$ è il tasso a pronti, quotato all'epoca 0, che esprime il rendimento annuale a scadenza di uno ZCB con scadenza dopo t periodi.

La DURATA MEDIA FINANZIARIA è in questo caso:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1 + i_0(t))^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1 + i_0(t))^{-t}}. \tag{7.2}$$

Si noti che nel calcolo della *duration* si considerano flussi futuri rispetto all'epoca corrente, cioè dovuti ad epoche $t > 0$; inoltre, i flussi hanno tutti lo stesso segno. Nella definizione, abbiamo considerato flussi in entrata; se i flussi fossero in uscita, possiamo calcolarne la durata media finanziaria considerandone il valore assoluto.

La durata media finanziaria calcolata con una struttura dei tassi piatta è nota come FLAT YIELD DURATION. La *flat yield duration* ha alcune proprietà algebriche che consentono di ottenere dalla *duration* informazioni sulla sensibilità del valore di mercato di un titolo obbligazionario a variazioni dei rendimenti. Quando sfrutteremo queste proprietà algebriche e avremo bisogno di mettere in chiaro che stiamo utilizzando la *flat yield duration*, utilizzeremo il simbolo D_{fy} per denotarla; utilizzeremo invece il simbolo D per riferirci genericamente alla *duration*, qualunque sia la struttura per scadenze dei tassi (piatta oppure con altra forma).

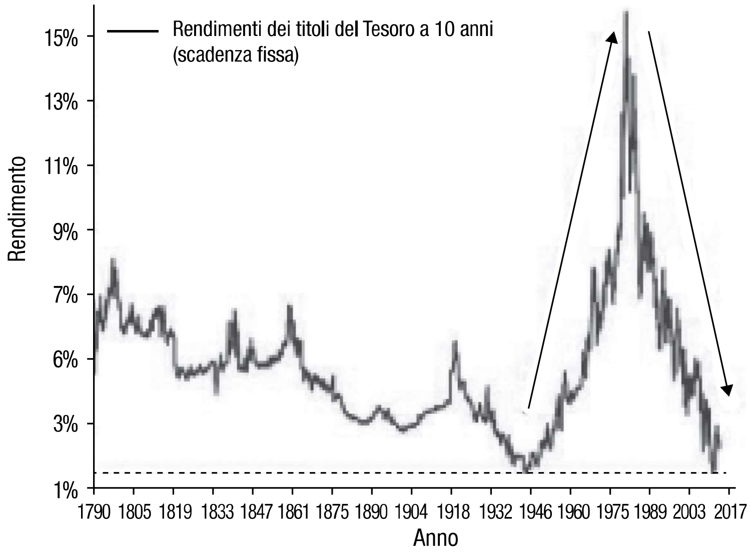
Mettiamo in evidenza che la durata media finanziaria è una media ponderata delle durate residue (rispetto all'epoca corrente), dove i "pesi" sono i valori attuali dei flussi futuri. Data l'Equazione (7.2) (o anche la (7.1)), definiamo il coefficiente $w_t = \frac{A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t}}$. Risulta, ovviamente, $\sum_{t=1}^{n} w_t = 1$. Notiamo anche che il denominatore, $\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1 + i_0(t))^{-t}$, corrisponde al valore di mercato all'epoca 0 dei flussi futuri, in quanto $V(0) = \sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1 + i_0(t))^{-t}$. Sostituendo w_t nella (7.2), si può riesprimere la durata media finanziaria come segue: $D = \sum_{t=1}^{n} t \cdot w_t$. Il fattore w_t può allora essere considerato un "peso" applicato a t.

Per come è definito, il peso w_t risulta essere il contributo relativo del pagamento effettuato al tempo t al valore attuale complessivo dei pagamenti del titolo (o del prestito). A parità di valore attuale complessivo (a parità, cioè, di denominatore $V(0) = \sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1 + i_0(t))^{-t}$), tanto più elevato il pagamento effettuato al tempo t, tanto più elevato sarà il suo contributo al valore attuale complessivo e, dunque, tanto più elevato sarà w_t. Questo comporterà un maggior peso assegnato all'epoca t rispetto ad altre epoche.

Come accennato, dalla *duration* si possono ottenere alcune informazioni sulla variabilità del prezzo di un titolo obbligazionario a fronte di variazioni dei rendimenti di mercato. Non sembra che quando Macaulay introdusse il concetto di durata media finanziaria intendesse utilizzarlo a questo scopo. Nonostante, come accennato all'inizio della sezione, Macaulay avesse presente il problema del rischio di tasso, prima del 1938 i tassi di interesse erano rimasti piuttosto stabili per molti anni. È perciò probabile che il rischio di tasso di interesse non sia stato considerato così importante come lo è stato in tempi più recenti, in particolare a partire dagli anni Settanta, quando si è registrata una notevole volatilità dei tassi stessi e, di conseguenza, del prezzo dei titoli obbligazionari. A titolo di esempio della volatilità dei tassi, il grafico riportato in Figura 7.1 mostra l'andamento dei rendimenti dei Buoni del Tesoro USA dal 1790 a oggi.

Il grafico indica appunto che i tassi di interesse sono divenuti volatili in modo significativo solo dagli anni Settanta del secolo scorso. All'aumentare della volatilità e

Figura 7.1 **Rendimenti dei Buoni del Tesoro USA, dal 1790 al 2017.**



Fonte: BofA Merrill Lynch Global Investment Strategy, Global Financial data, Bloomberg

del rischio di tasso di interesse, l'industria finanziaria ha prestato un'attenzione sempre maggiore all'analisi della sensibilità dei prezzi delle obbligazioni alle variazioni dei tassi di rendimento; a tale riguardo, è stata introdotta una versione alternativa alla *duration* di Macaulay, detta DURATA MEDIA FINANZIARIA MODIFICATA (O DURATION MODIFICATA O MODIFIED DURATION). Si tratta di un indice definito mediante la derivata del prezzo dell'obbligazione rispetto al rendimento di mercato. Di seguito definiamo la durata media finanziaria modificata nel caso di una struttura per scadenze piatta.

Definizione 7.2 DURATA MEDIA FINANZIARIA MODIFICATA
Ipotizziamo che la struttura per scadenze sia piatta, con tassi annuali a pronti pari a i per tutte le scadenze.

Consideriamo un insieme di flussi di cassa a reddito fisso, costituito dai pagamenti (prefissati e tutti in entrata) $A_1, A_2, \dots, A_n$ alle epoche (espresse in anni) $1, 2, \dots, n$, con valore attuale (al tempo 0) uguale a $V(0;i) = \sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i)^{-t}$. La notazione utilizzata per indicare il valore attuale al tempo 0 esprime la dipendenza di tale valore dal tasso d'interesse. La DURATA MEDIA FINANZIARIA MODIFICATA dell'insieme di flussi di cassa, indicata con D^*, è

$$D^* = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V(0;i)}{V(0;i)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} \ln V(0;i). \tag{7.3}$$

I fattori di sconto diminuiscono all'aumentare dei tassi di interesse, perciò se si ha un insieme di flussi di cassa positivi la derivata $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V(0;i)$ è negativa. Per esprimere con un numero positivo la sensibilità del valore di un titolo alle variazioni dei tassi di interesse si utilizza perciò l'opposto della derivata. Da qui in avanti, quando citeremo la "durata media finanziaria" intenderemo riferirci alla versione di Macaulay, mentre quando vorremo indicare la versione modificata lo diremo esplicitamente.

Nella durata media finanziaria l'unità di misura è l'anno, dato che essa esprime una media pesata di durate (i tempi fino ai pagamenti). La durata media finanziaria modificata, invece, esprime una variazione percentuale del valore attuale per unità di variazione del tasso d'interesse. La durata media finanziaria modificata è stata sviluppata, in parte, per ottenere un'approssimazione delle variazioni del prezzo delle obbligazioni quando vi è una piccola variazione del rendimento alla scadenza. La durata media finanziaria di Macaulay può però fornire un'approssimazione più accurata a questo riguardo. Affronteremo questo argomento nella prossima sezione.

Un aspetto da sottolineare è il seguente. Da $V(0;i) = \sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i)^{-t}$ otteniamo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V(0;i) = -\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i)^{-t-1}$ e possiamo quindi scrivere $D^* = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i)^{-t-1}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i)^{-t}}$. Se confrontiamo questa espressione con quella per D_{fy} data dall'Equazione (7.1), vediamo che nel caso di una struttura per scadenze piatta D_{fy} e D^* sono legate dalla relazione $D^* = \frac{D_{\text{fy}}}{1+i}$.

7.2.1 Durata media finanziaria e *duration* modificata di un'obbligazione senza cedole

Iniziamo considerando la sensibilità del valore di un'obbligazione senza cedole, cioè di uno ZCB, alle variazioni del tasso di rendimento. Consideriamo uno ZCB di valore nominale unitario e scadenza dopo n anni, attualmente con rendimento alla scadenza i (espresso su base annuale). Il valore attuale o prezzo dell'obbligazione al tempo corrente (tempo 0) è $V(0;i) = (1+i)^{-n}$. La durata media finanziaria è $D = \frac{n \cdot (1+i)^{-n}}{(1+i)^{-n}} = n$.

Se consideriamo il prezzo come funzione del tasso di rendimento i e deriviamo tale funzione rispetto a i, otteniamo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V(0;i) = -n \cdot (1+i)^{-n-1}$. Come detto, la derivata è negativa perché al crescere del tasso di rendimento si ha una diminuzione del valore attuale ($V(0;i)$ è una funzione decrescente di i). La durata media finanziaria modificata dello ZCB è

$$D^* = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V(0;i)}{V(0;i)} = \frac{n \cdot (1+i)^{-n-1}}{(1+i)^{-n}} = n \cdot (1+i)^{-1} = \frac{D}{1+i}. \qquad (7.4)$$

Si noti che nel caso di uno ZCB la nozione di *flat yield duration* perde di significato, in quanto è coinvolta un'unica scadenza e dunque si fa riferimento ad un solo tasso a pronti (anzi, la durata media finanziaria assume valore n qualunque sia il rendimento alla scadenza).

7.2.2 Durata media finanziaria di un'obbligazione con cedole

Le cedole pagate da un'obbligazione sono di importo relativamente piccolo rispetto al pagamento alla scadenza, che è di importo più consistente. Nella formula di Macaulay per la durata media finanziaria, i pesi della media ponderata assegnati alle scadenze di cedola risultano perciò relativamente bassi, mentre il peso assegnato alla data di rimborso dell'obbligazione risulta relativamente alto. Ci si aspetta, dunque, che la durata media finanziaria di un'obbligazione con cedole sia prossima alla scadenza n. Quando si confrontano le durate medie finanziarie di due obbligazioni, l'obbligazione che ha cedole di importo maggiore tende ad avere la *duration* minore. È quanto mostra il seguente esempio.

Esempio 7.2 Durata media finanziaria di un'obbligazione con cedole

Un'obbligazione che paga cedole annuali ha valore nominale C, tasso cedolare annuale i_{ced}, n cedole sino a scadenza ed è valutata al tasso di rendimento annuale i. Calcoliamo la durata media finanziaria dell'obbligazione per tutte le possibili combinazioni dei seguenti valori alternativi dei parametri: $i_{\text{ced}} = 0{,}05, 0{,}10, 0{,}15$; $n = 2, 10, 30, 60$; $i = 0{,}05, 0{,}10, 0{,}15$.

Soluzione

I pagamenti dell'obbligazione ai tempi $1, 2, \ldots, n$ sono di importo $A_t = C \cdot i_{\text{ced}}$ per $t = 1, 2, \ldots, n-1$ e di importo finale $A_n = C + C \cdot i_{\text{ced}}$. La durata media finanziaria è perciò

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot C \cdot i_{\text{ced}} \cdot (1+i)^{-t} + n \cdot C \cdot (1+i)^{-n}}{\sum_{t=1}^{n} C \cdot i_{\text{ced}} \cdot (1+i)^{-t} + C \cdot (1+i)^{-n}}. \tag{7.5}$$

Si osservi che il primo termine a numeratore dell'Equazione (7.5) è il valore attuale di una rendita posticipata con rata crescente in progressione aritmetica, e quindi può essere sostituito con $C \cdot i_{\text{ced}} \cdot (Ia)_{\overline{n}|i}$. Il primo termine a denominatore è invece il valore attuale di una rendita a rata costante e può pertanto essere sostituito con $C \cdot i_{\text{ced}} \cdot a_{\overline{n}|i}$.

Le Tabelle 7.1a–c riportano le durate medie finanziarie per le diverse combinazioni di parametri.

Tabella 7.1a **Durata media finanziaria con rendimento annuale 5%.**

Tasso cedolare	Cedole sino a scadenza			
	2	10	30	60
0,05	1,952	8,108	16,141	19,876
0,10	1,913	7,270	14,328	18,772
0,15	1,880	6,797	13,613	18,391

Tabella 7.1b **Durata media finanziaria con rendimento annuale 10%.**

Tasso cedolare	Cedole sino a scadenza			
	2	10	30	60
0,05	1,950	7,661	11,434	11,124
0,10	1,909	6,759	10,370	10,964
0,15	1,875	6,281	9,987	10,910

Tabella 7.1c **Durata media finanziaria con rendimento annuale 15%.**

Tasso cedolare	Cedole sino a scadenza			
	2	10	30	60
0,05	1,948	7,170	8,209	7,689
0,10	1,905	6,237	7,719	7,671
0,15	1,870	5,772	7,551	7,665

7.2.3 Durata media finanziaria e valore attuale: approssimazioni al primo ordine

La durata media finanziaria può essere utilizzata per approssimare la variazione che il valore di una sequenza di flussi di cassa subisce a fronte di piccole variazioni del tasso di interesse utilizzato per la valutazione. L'approssimazione più elementare è quella lineare.

L'idea alla base dell'approssimazione lineare è piuttosto semplice. Consideriamo una generica funzione $f(x)$; usando la notazione convenzionale per indicare la derivata della funzione $f(x)$ rispetto a x, si ha per definizione $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Se consideriamo il valore attuale di una sequenza di flussi di cassa come una funzione del tasso di interesse i, e la indichiamo con $V(0;i)$, allora per una "piccola" variazione del tasso da un livello iniziale i_0 a i_0+h, il rapporto $\frac{V(0;i_0+h)-V(0;i_0)}{h}$ è approssimativamente uguale a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}V(0;i)|_{i=i_0} = V'(0;i_0)$, per cui dalla definizione di *duration* modificata segue

$$V(0;i_0+h) - V(0;i_0) \approx h \cdot V'(0;i_0) = -h \cdot V(0;i_0) \cdot D^*_{(i_0)}, \tag{7.6}$$

dove l'indice a deponente della *duration* modificata specifica a quale tasso è calcolata (il tasso iniziale i_0). Se poniamo $h = i - i_0$, possiamo riscrivere la (7.6) come segue:

$$V(0;i) \approx V(0;i_0) - (i - i_0) \cdot V(0;i_0) \cdot D^*_{(i_0)}. \tag{7.6a}$$

Possiamo riferirci a questa approssimazione lineare chiamandola APPROSSIMAZIONE AL PRIMO ORDINE (del valore attuale) PER MEZZO DELLA DURATION MODIFICATA.

È possibile vedere che l'Equazione (7.6) segue dallo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine della funzione (del tasso) $V(0;i)$: $V(0;i_0+h) \approx V(0;i_0) + h \cdot V'(0;i_0)$. Si ottiene l'Equazione (7.6a) qualora si sostituisca $V'(0;i_0)$ con $-V(0;i_0) \cdot D^*_{(i_0)}$.

L'espressione (7.6) non è da intendersi come il metodo più appropriato o preciso per approssimare la variazione del valore attuale della sequenza di flussi di cassa prodotta da una variazione del tasso di interesse. Se i flussi di cassa sono pochi, non è difficile calcolare il loro valore attuale esatto al nuovo tasso di interesse, senza far ricorso all'approssimazione. Se, per esempio, la sequenza dei flussi di cassa è costituita da un solo ZCB, è molto facile calcolarne il valore attuale in modo esplicito, a qualsiasi tasso di interesse.

Anche se l'approssimazione al primo ordine è un metodo comunemente usato per approssimare la variazione di una funzione generica, se la funzione è il valore attuale di una sequenza di flussi di cassa in entrata e la variabile indipendente è il tasso d'interesse, esiste un metodo di approssimazione che dà risultati più precisi. Tale metodo prevede l'uso della *flat yield duration* calcolata al tasso iniziale. Dovendo specificare che si tratta della *flat yield duration* e dovendo inoltre specificare a quale tasso è calcolata, useremo la notazione $D_{\mathrm{fy}(i_0)}$. L'approssimazione per il valore attuale al variare del tasso d'interesse è la seguente:

$$V(0;i_0+h) \approx V(0;i_0) \cdot \left(\frac{1+i_0}{1+i_0+h}\right)^{D_{\mathrm{fy}(i_0)}}. \tag{7.7}$$

È possibile ricavare l'Equazione (7.7) applicando l'approssimazione lineare alla funzione

$$g(i) = V(0;i) \cdot (1+i)^{D_{\mathrm{fy}(i_0)}}, \tag{7.8}$$

che esprime all'epoca $D_{\mathrm{fy}(i_0)}$ il valore della sequenza di flussi, calcolato al tasso i. L'approssimazione lineare della funzione $g(i)$ è:

$$g(i_0+h) \approx g(i_0) + h \cdot g'(i_0). \tag{7.9}$$

Applicando la regola della derivata del prodotto, per la derivata della funzione $g(i)$ abbiamo:

$$g'(i_0) = V'(0;i_0) \cdot (1+i_0)^{D_{\mathrm{fy}(i_0)}} + V(0;i_0) \cdot D_{\mathrm{fy}(i_0)} \cdot (1+i_0)^{D_{\mathrm{fy}(i_0)}-1}. \tag{7.10}$$

Ora, poiché (per una struttura per scadenze piatta)

$$D_{\mathrm{fy}(i_0)} = D^*_{(i_0)} \cdot (1+i_0) = -\frac{V'(0;i_0)}{V(0;i_0)} \cdot (1+i_0),$$

sostituendo nella (7.10) si ottiene

$$g'(i_0) = V'(i_0) \cdot (1+i_0)^{D_{\mathrm{fy}(i_0)}} + V(0;i_0) \cdot \left[-\frac{V'(0;i_0)}{V(0;i_0)} \cdot (1+i_0)\right] \cdot (1+i_0)^{D_{\mathrm{fy}(i_0)}-1} = 0.$$

Perciò la (7.9) si riduce a:

$$g(i_0+h) \approx g(i_0). \tag{7.11}$$

Sostituendo nella (7.11) l'espressione (7.8), si ottiene

$$V(0;i_0+h) \cdot (1+i_0+h)^{D_{\mathrm{fy}(i_0)}} \approx V(0;i_0) \cdot (1+i_0)^{D_{\mathrm{fy}(i_0)}}, \tag{7.12}$$

da cui segue l'Equazione (7.7).

Indicheremo questa approssimazione come APPROSSIMAZIONE DI MACAULAY AL PRIMO ORDINE.

In precedenza abbiamo anticipato che l'approssimazione di Macaulay al primo ordine è in generale più precisa di quella che impiega la *duration* modificata. Questo è sicuramente vero per gli ZCB, perché in questo caso (considerando un valore nominale unitario)

$V(0;i) = (1+i)^{-n}$, per cui $g(i) = (1+i)^{-n} \cdot (1+i)^{D_{\text{fy}}(i_0)} = (1+i)^{-n} \cdot (1+i)^n = 1$ per ogni i. La funzione $g(i)$, in questo caso, è il valore a scadenza del titolo e, di conseguenza, l'Equazione (7.12), così come la (7.7), è verificata in forma di uguaglianza. Al contrario, l'approssimazione (7.6a) non fornisce il valore esatto di $V(0;i_0+h)$, ma solo un valore approssimato.

Nel prossimo esempio utilizziamo alcuni risultati numerici dell'Esempio 7.2 per confrontare la precisione dei due metodi di approssimazione applicati a obbligazioni con cedole.

Esempio 7.3 Approssimazione della variazione del valore attuale mediante la durata media finanziaria

Confrontiamo le due approssimazioni (7.6a) e (7.7), stimando la variazione del prezzo di due obbligazioni a fronte di un aumento del tasso di rendimento di 10 punti base (0,1%). Consideriamo due obbligazioni dell'Esempio 7.2, ciascuna di valore nominale 100 €:

(a) obbligazione con 10 cedole annuali al 5% e tasso di rendimento del 10%;
(b) obbligazione con 60 cedole annuali al 10% e tasso di rendimento del 5%.

I prezzi esatti delle obbligazioni (a) e (b) ai tassi iniziali i_0 sono:

$$100 \cdot 1{,}1^{-10} + 5 \cdot a_{\overline{10}|0{,}1} = 69{,}2772 \text{ € e}$$
$$100 \cdot 1{,}05^{-60} + 10 \cdot a_{\overline{60}|0{,}05} = 194{,}6464 \text{ €}.$$

I prezzi esatti ai nuovi tassi di rendimento $i_0 + h = i_0 + 0{,}001$ sono:

$$100 \cdot 1{,}101^{-10} + 5 \cdot a_{\overline{10}|0{,}101} = 68{,}7969 \text{ € e}$$
$$100 \cdot 1{,}051^{-60} + 10 \cdot a_{\overline{60}|0{,}051} = 191{,}2204 \text{ €}.$$

Le durate medie finanziarie delle due obbligazioni ai tassi iniziali (cfr. Tabelle 7.1 a e b) sono 7,661 anni per l'obbligazione (a) e 18,772 anni per l'obbligazione (b). Le *duration* modificate ai tassi iniziali sono $\frac{7{,}661}{1{,}1} = 6{,}965$ per l'obbligazione (a) e $\frac{18{,}772}{1{,}05} = 17{,}878$ per l'obbligazione (b).

Applicando l'approssimazione al primo ordine per mezzo della *duration* modificata (cioè l'approssimazione (7.6a)), il prezzo dell'obbligazione (a) con tasso di rendimento pari al 10,1% è così stimato: $69{,}2772 - 0{,}001 \cdot 6{,}965 \cdot 69{,}2772 = 68{,}7947$ €. In questa approssimazione l'errore relativo è $\frac{|68{,}7947-68{,}7969|}{68{,}7969} = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$.

Applicando l'approssimazione di Macaulay al primo ordine (cioè l'approssimazione (7.7)), il prezzo dell'obbligazione (a) con tasso di rendimento pari al 10,1% è così stimato: $V(0;0{,}101) \approx V(0;0{,}10) \cdot \left(\frac{1{,}1}{1{,}101}\right)^{7{,}661} = 69{,}2772 \cdot 0{,}9931 = 68{,}7966$ €. In questa approssimazione l'errore relativo è $\frac{|68{,}7966-68{,}7969|}{68{,}7969} = 4{,}4 \cdot 10^{-6}$, inferiore al precedente.

Per l'obbligazione (b), l'approssimazione al primo ordine (7.6a) dà 191,167 €, con un errore relativo uguale a $2{,}8 \cdot 10^{-4}$; l'approssimazione di Macaulay al primo ordine (7.7) è 191,199 €, con un errore relativo uguale a $1{,}1 \cdot 10^{-4}$.

Vediamo così che in entrambi gli esempi l'approssimazione (7.7) fornisce un errore relativo più piccolo di quello dell'approssimazione (7.6a).

7.2.4 Durata media finanziaria di un portafogli di titoli

Consideriamo m titoli e quindi m sequenze distinte di flussi di cassa, a cui ci si riferisce come un PORTAFOGLI DI TITOLI; supponiamo che ogni insieme di flussi di cassa sia costituito da una sequenza di n pagamenti annuali. Indichiamo i pagamenti della sequenza k con $A_{(k)1}, A_{(k)2}, \ldots, A_{(k)n}$. Assumiamo come in precedenza che la curva dei rendimenti sia piatta. Al tasso di interesse effettivo annuale i, il valore attuale $V_{(k)}(0;i)$ della sequenza di flussi di cassa k, per $k = 1, 2, \ldots, m$, è

$$V_{(k)}(0;i) = A_{(k)1} \cdot (1+i)^{-1} + A_{(k)2} \cdot (1+i)^{-2} + \ldots + A_{(k)n} \cdot (1+i)^{-n}.$$

La durata media finanziaria del flusso di cassa k-esimo è $D_{(k)} = -(1+i) \cdot \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V_{(k)}(0;i)}{V_{(k)}(0;i)}$, perciò $D_{(k)} \cdot V_{(k)}(0;i) = -(1+i) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V_{(k)}(0;i)$.

Il valore attuale complessivo di tutte le sequenze di flussi di cassa è $V(0;i) = \sum_{k=1}^{m} V_{(k)}(0;i)$; risulta $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V(0;i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} \sum_{k=1}^{m} V_{(k)}(0;i)$. La DURATA MEDIA FINANZIARIA dell'insieme dei flussi di cassa, cioè DEL PORTAFOGLI, è quindi:

$$D = -(1+i) \cdot \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V(0;i)}{V(0;i)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} -(1+i) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V_{(k)}(0;i)}{V(0;i)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} D_{(k)} \cdot V_{(k)}(0;i)}{V(0;i)}. \quad (7.13)$$

Definendo il fattore $w_{(k)} = \frac{V_{(k)}(0;i)}{V(0;i)}$, notiamo che risulta $\sum_{k=1}^{m} w_{(k)} = 1$ ed inoltre:

$$D = \sum_{k=1}^{m} D_{(k)} \cdot w_{(k)}.$$

Possiamo dunque vedere che la durata media finanziaria del portafogli, cioè dell'insieme di flussi di cassa, può essere rappresentata come media ponderata delle durate medie finanziarie delle singole sequenze di flussi, dove il peso assegnato alla durata media finanziaria $D_{(k)}$ è $w_{(k)} = \frac{V_{(k)}(0;i)}{V(0;i)}$, ossia il contributo al valore attuale complessivo del portafogli da parte della sequenza di flussi di cassa k.

Un'analoga relazione si applica alla DURATION MODIFICATA DEL PORTAFOGLI:

$$D^* = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V(0;i)}{V(0;i)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V_{(k)}(0;i)}{V(0;i)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} D^*_{(k)} \cdot V_{(k)}(0;i)}{V(0;i)} = \sum_{k=1}^{m} D^*_{(k)} \cdot w_{(k)},$$

con ovvio significato del simbolo $D^*_{(k)}$.

Esempio 7.4 Durata media finanziaria di un portafogli di obbligazioni

Un portafogli è costituito da quattro obbligazioni, ciascuna delle quali ha cedole annuali. I quattro titoli hanno le seguenti caratteristiche:

(i) obbligazione a 2 anni di valore nominale 100.000 € e tasso cedolare 5%;
(ii) obbligazione a 10 anni di valore nominale 80.000 € e tasso cedolare 10%;

(iii) obbligazione a 30 anni di valore nominale 120.000 € e tasso cedolare 5%;
(iv) obbligazione a 60 anni di valore nominale 75.000 € e tasso cedolare 15%.

Calcoliamo la durata media finanziaria di questo portafogli sapendo che la struttura per scadenze è piatta con tasso di interesse annuale effettivo del 10% per tutte le scadenze.

Soluzione

I prezzi delle obbligazioni sono: (i) 91.322 €, (ii) 80.000 €, (iii) 63.439 € e (iv) 112.377 €.

Il prezzo complessivo del portafogli è $91.322+80.000+63.439+112.377=347.138$ €.

In base ai risultati dell'Esempio 7.2, le durate medie finanziarie delle obbligazioni sono: (i) 1,950 anni, (ii) 6,759 anni, (iii) 11,434 anni e (iv) 10,91 anni.

La durata media finanziaria del portafogli è

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sum_{k=1}^{m} D_{(k)} \cdot V_{(k)}(0;0{,}10)}{V(0;0{,}10)} \\ &= \frac{1{,}950 \cdot 91.322 + 6{,}759 \cdot 80.000 + 11{,}434 \cdot 63.439 + 10{,}910 \cdot 112.377}{347.138} \\ &= 7{,}69 \text{ anni.} \end{aligned}$$

7.2.5 Durata media finanziaria e spostamenti della struttura per scadenze

Due differenti sequenze di flussi di cassa aventi lo stesso valore attuale e la stessa durata media finanziaria a un tasso di rendimento comune i devono avere la medesima sensibilità alle variazioni del tasso di rendimento. Possiamo descrivere le due sequenze come ALLINEATE in quanto a valore attuale e durata media finanziaria. Si tratta di un concetto che approfondiremo nella prossima sezione, quando esamineremo l'allineamento dei flussi di cassa e l'immunizzazione finanziaria; vogliamo però già presentarne qui un semplice esempio.

Consideriamo un portafogli costituito da due obbligazioni, ciascuna di valore nominale 50 €:

(i) obbligazione con 2 cedole e tasso cedolare del 5% per periodo di cedola;

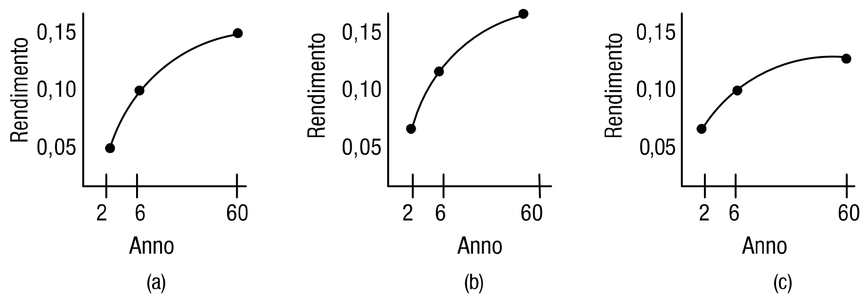
(ii) obbligazione con 60 cedole e tasso cedolare del 15% per periodo di cedola.

Supponiamo che il tasso di rendimento per l'obbligazione con 2 cedole sia pari al 5% per periodo di cedola, mentre quello per l'obbligazione con 60 cedole sia pari al 15%. Essendo il tasso cedolare di ciascuna obbligazione uguale al tasso di rendimento, entrambi i titoli sono attualmente valutati alla pari, cioè a 50 € l'uno, per cui il valore complessivo del portafogli è 100 €. Troviamo queste obbligazioni nelle Tabelle 7.1a e 7.1c, con durate medie finanziarie uguali rispettivamente a 1,952 e 7,665 anni. Per i ragionamenti svolti nella precedente sezione, ne segue che la durata media finanziaria del portafogli è $0{,}5 \cdot (1{,}952+7{,}665)=4{,}81$ anni.

Consideriamo ora un secondo portafogli, composto da una singola obbligazione di valore nominale 100 €, con 6 cedole e un tasso cedolare pari al 10%, valutata al tasso di rendimento del 10% per periodo di cedola. Questa obbligazione è quotata 100 € e la sua durata media finanziaria è 4,79 anni. Perciò, ai tassi di rendimento correnti, questo portafogli ha lo stesso valore e quasi la stessa durata media finanziaria del portafogli precedente.

Possiamo riportare i tassi di rendimento delle tre obbligazioni su una curva (Figura 7.2a). Consideriamo l'effetto che una variazione istantanea della curva ha sui portafogli esaminati. Se si verifica uno SPOSTAMENTO (SHIFT) PARALLELO della curva dei rendimenti, significa che vi è la stessa variazione (in valore assoluto) dei tassi di rendimento per tutte le scadenze (Figura 7.2b); supponiamo, per esempio, che i tassi di rendimento per tutte le scadenze aumentino di un punto percentuale (cioè il tasso di rendimento per l'obbligazione a 2 anni passa dal 5% al 6%, quello per l'obbligazione a 6 anni passa dal 10% all'11% ecc.). Il valore del primo portafogli diventa 95,96 €, quello del secondo portafogli diventa 95,77 €. Come ci si attendeva, in conseguenza della variazione del tasso di rendimento, i valori di entrambi i portafogli diminuiscono all'incirca dello stesso importo, dal momento che tali portafogli hanno circa la stessa durata media finanziaria. La nozione fondamentale di durata media finanziaria si basa su spostamenti paralleli di una struttura per scadenze piatta. La stima o l'approssimazione delle variazioni del valore attuale diventano più complicate se la curva dei rendimenti non è piatta e se le variazioni non seguono uno spostamento parallelo.

Figura 7.2 **Esempi di spostamento della curva dei rendimenti: (a) curva iniziale; (b) spostamento parallelo; (c) spostamento non parallelo.**



Supponiamo, ora, che la curva dei rendimenti tenda ad appiattirsi leggermente (Figura 7.2c); per esempio, il rendimento per l'obbligazione con 2 cedole passa dal 5% al 6%, quello per l'obbligazione con 6 cedole resta al 10% e quello per l'obbligazione con 60 cedole passa dal 15% al 14%. Il valore del primo portafogli diventa 102,65 €, mentre quello del secondo rimane uguale a 100 €. Ciò che vogliamo sottolineare è che, nonostante i due portafogli possano avere attualmente valori e durate medie finanziarie allineate, gli effetti prodotti su di essi da spostamenti paralleli o non paralleli della curva dei rendimenti possono differire da un portafogli a un altro.

Si noti che le curve dei rendimenti qui rappresentate non sono curve di strutture per scadenze, bensì grafici dei rendimenti alla scadenza delle obbligazioni considerate; a ciascun rendimento alla scadenza è associata la durata residua del corrispondente titolo. Una curva della struttura per scadenze rappresenterebbe, invece, i tassi a pronti per le varie scadenze incluse nell'orizzonte temporale.

Un'importante valutazione che otteniamo dalla durata media finanziaria è la seguente: due diverse sequenze di flussi di cassa aventi la stessa durata media finanziaria risponderanno allo stesso modo a piccole variazioni (spostamenti paralleli) dei rendimenti alla scadenza. In particolare, se la durata media finanziaria di una sequenza di flussi di cassa è D, allora uno ZCB con scadenza (e cioè *duration*) tra D anni che abbia oggi lo stesso valore attuale della sequenza di flussi di cassa, a fronte di piccole variazioni del rendimento alla scadenza conserverà un valore attuale all'incirca uguale a quello della sequenza di flussi di cassa.

È chiaro che se un investitore ha la percezione che i tassi di interesse aumenteranno, il rischio di perdita di valore connesso alla detenzione di un'obbligazione sarà più limitato se questa ha una durata media finanziaria breve; se invece ha la percezione che i tassi scenderanno, il guadagno potenziale di valore sarà maggiore se l'obbligazione ha una durata media finanziaria più lunga. Si può utilizzare la durata media finanziaria per confrontare la volatilità dei prezzi delle obbligazioni rispetto al tasso di rendimento e, inoltre, per effettuare previsioni approssimate sulle variazioni del valore attuale in caso di un piccolo spostamento parallelo della curva dei rendimenti. Nella pratica, quando si usa la durata media finanziaria per quest'ultimo scopo, si preferisce adottare l'approssimazione di Macaulay al primo ordine anziché quella che coinvolge la *duration* modificata, per via della sua maggiore precisione.

7.3 Allineamento attività-passività e immunizzazione finanziaria

Nello svolgimento della propria attività, un'impresa si assume impegni finanziari che comportano esborsi e incassi futuri. Per mantenere una posizione autosufficiente (e proficua), l'azienda effettuerà investimenti in modo da avere, al momento opportuno, la disponibilità dei fondi necessari per far fronte agli impegni assunti.

Consideriamo un esborso L_t al tempo $t > 0$. Alle epoche che precedono t, questo pagamento rappresenta per l'azienda una PASSIVITÀ (LIABILITY). I fondi che al tempo t forniranno la liquidità A_t per la copertura della passività rappresentano invece per l'azienda un'ATTIVITÀ (ASSET). Se l'azienda può strutturare i propri investimenti in modo che gli incassi coprano esattamente gli esborsi ad ogni istante, così che $A_t = L_t$ per ogni epoca t, allora si dice che le passività e le attività sono PERFETTAMENTE (O ESATTAMENTE) ALLINEATE (in inglese: PERFECTLY O EXACTLY MATCHED).

L'allineamento tra attività e passività viene in genere considerato per flussi di cassa in entrata e in uscita definiti a tempo discreto, con epoche di pagamento di solito ugualmente distanziate, $t = 0, 1, 2, \dots, n$. È anche possibile considerare modelli a tempo continuo, in cui A_t e L_t sono intensità istantanee rispettivamente di incasso e di esborso all'epoca t. Nel seguito ci limiteremo a considerare flussi definiti a tempo discreto.

Esempio 7.5 Allineamento perfetto tra attività e passività (*Perfect asset-liability matching*)

Una piccola impresa che sta cessando l'attività ha deciso di garantire a titolo di beneficio di fine rapporto a ciascuno dei propri tre dipendenti il pagamento di 10.000 € l'anno, alla fine di ogni anno, sino al compimento del 65-esimo anno di età compreso, più all'età 65 un importo finale *una* *tantum* di 100.000 €. In caso di decesso di uno dei dipendenti prima dei 65 anni, i pagamenti continueranno agli eredi, sino all'anno in cui il dipendente avrebbe compiuto i 65 anni. La durata e i flussi dei pagamenti sono pertanto certi. Le età esatte dei dipendenti sono oggi 50, 53 e 55 anni. L'impresa stabilisce di coprire gli esborsi previsti da questo impegno tramite gli incassi generati da tre obbligazioni, ciascuna di valore nominale 100.000 € e tasso cedolare 10%, le quali scadono rispettivamente tra 10, 12 e 15 anni. Determiniamo il costo che l'azienda deve sostenere per finanziare il beneficio di fine rapporto nel caso in cui le tre obbligazioni abbiano, in ordine di scadenza, tassi di rendimento (effettivi su base annuale) del 10%, dell'11% e del 12%.

Soluzione

Applicando una delle formule per il prezzo delle obbligazioni viste nel Capitolo 4, si ottengono i prezzi di: 100.000 € per l'obbligazione a 10 anni, 93.507,64 € per quella a 12 anni e 86.378,27 € per quella a 15 anni, per una spesa totale di 279.885,91 €. Con l'acquisto di queste obbligazioni, le attività sono esattamente allineate alle passività dell'azienda per il debito nei confronti dei dipendenti.

Come variante dell'Esempio 7.5, supponiamo che siano disponibili obbligazioni con ampia varietà di scadenze e tassi cedolari (incluso il tasso cedolare 0%, cioè le obbligazioni senza cedola). L'azienda, per coprire le passività, ha quindi a disposizione varie combinazioni di investimenti; conviene scegliere quella a costo minimo, che si può individuare utilizzando la programmazione lineare.

Nell'Esempio 7.5, una volta che l'azienda acquista le obbligazioni, si garantisce (salvo *default* della controparte) le risorse necessarie per rispettare gli impegni nei confronti dei dipendenti, sia per quanto riguarda gli importi sia per quanto riguarda le epoche di pagamento. Si parla di allineamento perfetto tra attività e passività quando i flussi in entrata coincidono con quelli in uscita, come nell'esempio. Non è detto, però, che sia sempre possibile ottenere un allineamento perfetto tra le entrate e le uscite previste. Il seguente Esempio 7.6 prende in esame modi alternativi per selezionare le attività a copertura delle passività, non imponendo che l'allineamento sia perfetto. Nella sezione successiva esamineremo poi a quale rischio si è esposti quando l'allineamento non è perfetto.

Esempio 7.6 Allineamento attività-passività (*Asset-liability matching*)

Supponiamo che vi siano flussi di cassa in uscita di importo 1 € alle epoche 1 e 2, per cui $L_0 = 0$ €, $L_1 = L_2 = 1$ €. Supponiamo inoltre che la struttura per scadenze sia piatta con tasso del 10% per tutte le scadenze e che le forme di investimento disponibili siano: ZCB per tutte le scadenze, conti di deposito e linee di credito. Il tasso è del 10% per tutte le forme d'investimento e per qualunque scadenza. Il valore attuale al tempo 0 delle passività è:

$$1{,}1^{-1} + 1{,}1^{-2} = 1{,}735537 \text{ €}.$$

Ci sono vari modi per tentare di far sì che i flussi di cassa in entrata coprano le passività. Un primo requisito è che il valore attuale al tempo 0 dei flussi in entrata sia uguale a quello dei flussi in uscita. Consideriamo le seguenti sequenze (alternative) di flussi in entrata:

(i) $A_0 = 0$ €, $A_1 = A_2 = 1$ €;
(ii) $A_0 = 1{,}735537$ €, $A_1 = A_2 = 0$ €;
(iii) $A_0 = A_1 = 0$ €, $A_2 = 2{,}10$ €

e verifichiamo che per ciascuna di esse il valore attuale, al tempo 0 e al tasso d'interesse del 10%, dei flussi in entrata è uguale a quello dei flussi in uscita. Esaminiamo, poi, come dovrebbero essere scelti gli *asset* in modo da fornire i fondi necessari per coprire gli esborsi alle varie epoche.

Soluzione

(i) Questi flussi in entrata garantiscono un allineamento perfetto rispetto ai flussi in uscita. Per ottenere i flussi in entrata si acquistano uno ZCB con scadenza un anno e valore nominale 1 € e uno ZCB con scadenza due anni e valore nominale 1 €. Il costo al tempo 0 dei due ZCB è 1,735537 €; essi forniranno esattamente la liquidità necessaria per coprire gli esborsi quando sarà necessario.

(ii) Non c'è un allineamento perfetto tra attività e passività, ma i valori attuali a tasso $i = 10\%$ sono uguali (e dunque allineati) al tempo 0. Se si hanno a disposizione i flussi in entrata $A_0 = 1{,}735537$ €, $A_1 = A_2 = 0$ € si può procedere come segue. Assumiamo di poter depositare denaro contante su un conto al quale è applicato un tasso di interesse del 10%. Al tempo 0 si depositano 1,735537 € sul conto. Al tempo 1 il deposito avrà generato un montante pari a $1{,}735537 \cdot 1{,}1 = 1{,}909091$ €. L'esborso di 1 € al tempo 1 viene coperto effettuando un prelevamento dal conto, lasciando su di esso un saldo di 0,909091 €. Al tempo 2, il saldo sarà diventato $0{,}909091 \cdot 1{,}1 = 1{,}000000$ €. L'esborso di 1 € viene coperto effettuando un prelevamento dal conto, che resta a saldo zero.

(iii) Non c'è un allineamento perfetto tra attività e passività, ma i valori attuali a tasso $i = 10\%$ sono allineati (cioè uguali) al tempo 0; infatti $2{,}10 \cdot 1{,}1^{-2} = 1{,}735537$ €. Se si hanno a disposizione i flussi in entrata $A_0 = A_1 = 0$ €, $A_2 = 2{,}10$ €, si può procedere come segue. Supponiamo di poter aprire all'epoca 0 una linea di credito a cui è applicato il tasso d'interesse del 10%, sia sui saldi positivi sia su quelli negativi. L'esborso di 1 € al tempo 1 viene coperto mediante un prelevamento in tale data di 1 € dalla linea di credito. Il debito sulla linea di credito al tempo 2 è 1,1 € (il saldo all'epoca 1 accresciuto dall'interesse). I 2,10 € che si incassano all'epoca 2 sono utilizzati per pagare la passività di 1 € al tempo 2 e per azzerare il saldo negativo della linea di credito. La posizione netta attività-passività al tempo 2 è zero.

Le tre sequenze di flussi in entrata presentati nell'Esempio 7.6 hanno al tempo 0 e al tasso del 10% tutti lo stesso valore attuale di 1,735537 €. Questa uguaglianza tra valori attuali in genere è il primo passo verso l'allineamento attività-passività. In tutti gli esempi proposti, vediamo che se nel tempo i tassi di interesse restano al livello osservato all'epoca 0, allora vi sarà una POSIZIONE NETTA SURPLUS-DEFICIT pari a 0 € allorché termineranno i flussi di cassa. Al tempo 0, il tasso di interesse per tutte le scadenze è il 10%; nella discussione dell'esempio, abbiamo ipotizzato che il tasso resti al 10% per i due anni successivi. Abbiamo allora appena riformulato un principio fondamentale della regola degli interessi composti: se in un certo istante i valori attuali di due flussi di cassa sono uguali, allora saranno uguali in ogni altro istante, purché il tasso di interesse utilizzato per la valutazione rimanga invariato.

7.3.1 Immunizzazione di Redington e convessità

In questa presentazione di base del concetto di allineamento attività-passività (*asset-liability matching*), stiamo assumendo che la struttura per scadenze al tempo 0 sia piatta, con rendimento alla scadenza i_0 per tutte le possibili scadenze. Per cercare di allineare le attività alle passività, prima di tutto dobbiamo assicurarci che i valori attuali delle sequenze dei flussi di cassa in entrata e in uscita siano uguali al tempo 0, utilizzando per la valutazione il tasso i_0. Possiamo formalizzare questa situazione come segue (usiamo le notazioni $V_A(0;i)$ e $V_L(0;i)$ per indicare, rispettivamente, i valori attuali all'epoca 0 dei flussi in entrata e dei flussi in uscita, calcolati a tasso i):

$$V_A(0;i_0) = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot (1+i_0)^{-t} = \sum_{t=0}^{n} L_t \cdot (1+i_0)^{-t} = V_L(0;i_0). \tag{7.14}$$

Possiamo riscrivere l'Equazione (7.14) nella forma $\sum_{t=0}^{n}(A_t - L_t)\cdot(1+i_0)^{-t} = 0$, o equivalentemente nella forma

$$\sum_{t=0}^{n} (A_t - L_t)\cdot(1+i_0)^{n-t} = 0. \tag{7.15}$$

Quest'ultima equazione va interpretata nel seguente modo. Ad ogni scadenza t dei flussi di cassa, vi è un flusso di cassa in entrata netto pari ad $A_t - L_t$, che può essere positivo, negativo o nullo. Nell'Esempio 7.6(iii) abbiamo ipotizzato di lavorare con una linea di credito nella quale si paga un tasso di interesse i_0 sui saldi negativi e si riceve un interesse allo stesso tasso i_0 quando il saldo è positivo. Quando si riceve il flusso di cassa netto al tempo t, lo si considera depositato o prelevato dalla linea di credito, a seconda che sia $A_t - L_t > 0$ o $A_t - L_t < 0$. In ogni istante intermedio, sul conto della linea di credito ci sarà un saldo netto positivo o negativo. L'Equazione (7.15) dice che il saldo è 0 € alla scadenza dell'ultimo flusso di cassa netto. In altri termini, la posizione *surplus-deficit* netta è 0 € quando si raggiunge l'ultima scadenza della sequenza di flussi di cassa delle attività e delle passività.

Ciò che nell'allineamento attività-passività complica le cose è che, anche se i valori attuali dei relativi flussi di cassa sono uguali al tempo 0 a un tasso di interesse di valutazione i_0, se successivamente il tasso di interesse varia, i valori attuali possono non risultare più uguali e la posizione *surplus-deficit* all'ultima scadenza può non essere più uguale a 0 €. Lo squilibrio dipende da come è stato realizzato l'allineamento tra attività e passività.

Nell'Esempio 7.6(i) si può osservare che, una volta acquistati gli ZCB a 1 anno e a 2 anni, le variazioni del tasso di interesse sono irrilevanti, in quanto alla loro scadenza gli ZCB forniranno un incasso esattamente uguale al flusso in uscita.

Nell'Esempio 7.6(ii), l'importo di 1,735537 € è stato depositato su un conto che frutta interessi al tasso del 10%; se nei due anni successivi l'interesse sul conto continuerà a maturare a tale tasso, le entrate saranno sufficienti a coprire esattamente le uscite (come abbiamo discusso nell'esempio). Supponiamo, invece, che mentre nel primo anno il tasso di interesse è effettivamente il 10%, nel secondo anno il tasso applicato al conto diventi il 9%. Il saldo sul conto subito dopo il pagamento delle passività al tempo 1 è ancora 0,909091 €, ma il saldo sul conto alla fine del secondo anno, subito prima del pagamento delle passività, è $0{,}909091 \cdot 1{,}09 = 0{,}990909$ €. Dopo il pagamento di 1 €, al tempo 2 il saldo è $-0{,}009091$ €, perciò ci si trova in una posizione di *deficit*, con un valore delle attività inferiore al valore delle passività.

Poiché è impossibile conoscere l'andamento futuro dei tassi di interesse, anche se al tempo 0 (sulla base dei tassi allora vigenti) i valori attuali dei flussi di cassa delle attività e delle passività sono uguali, i tassi di interesse futuri possono portare a posizioni di squilibrio. Ciò che possiamo cercare di fare è strutturare i flussi di cassa delle attività in modo che piccole variazioni del tasso di interesse non portino la relazione attività-passività in una posizione di *deficit*. Come abbiamo visto, un modo per realizzare questo obiettivo è allineare esattamente le attività alle passività, così da avere $A_t = L_t$ per ogni $t = 0, 1, 2, \ldots, n$. In questo caso l'Equazione (7.14) è valida per ogni tasso i_0, e non si riscontrerà mai una posizione di *surplus* o di *deficit* nella relazione attività-passività, indipendentemente da ogni successiva variazione del tasso di interesse.

Senza un allineamento esatto, c'è il rischio che quando il tasso di interesse si sposta dal valore iniziale i_0 a un altro valore i, allora $V_A(0;i) < V_L(0;i)$ e il flusso finanziario in entrata non è sufficiente a bilanciare le passività.

Nel 1952 il famoso attuario F.M. Redington introdusse la teoria dell'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA. Secondo tale teoria, strutturando attentamente le attività rispetto alle passività, a fronte di piccoli incrementi o diminuzioni del tasso di interesse che passa dal valore i_0 a i, si può avere $V_A(0;i) > V_L(0;i)$ sia per $i > i_0$ sia per $i < i_0$. Pertanto, indipendentemente dal fatto che il tasso di interesse cresca oppure diminuisca (purché di poco), il valore attuale delle attività al nuovo tasso di interesse sarà comunque superiore al valore attuale delle passività e la relazione attività-passività non passerà da una posizione di allineamento a una di *deficit*.

Gli elementi essenziali della teoria dell'immunizzazione sono i seguenti. Supponiamo di avere selezionato le attività in modo da bilanciare le passività al tasso di interesse i_0 secondo l'Equazione (7.14). Supponiamo inoltre che siano rispettate le seguenti condizioni:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}V_A(0;i)\right|_{i=i_0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}V_L(0;i)\right|_{i=i_0} \tag{7.16}$$

e

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}i^2}V_A(0;i)\right|_{i=i_0} > \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}i^2}V_L(0;i)\right|_{i=i_0}. \tag{7.17}$$

Definiamo la funzione

$$h(i) = V_A(0;i) - V_L(0;i). \tag{7.18}$$

Tale funzione ha le seguenti caratteristiche: $h(i_0) = h'(i_0) = 0$ (per le Equazioni (7.14) e (7.16)) e $h''(i_0) > 0$ (per l'Equazione (7.17)). Ciò significa che la funzione $h(i)$ ha un minimo relativo nel punto i_0. In altre parole, in un opportuno intorno di i_0, che chiamiamo (i_L, i_U), se $i_L < i < i_U$ allora $h(i) > h(i_0) = 0$ o, equivalentemente, $V_A(0;i) > V_L(0;i)$.

Avendo IMMUNIZZATO in questo modo la posizione di attività e passività, una piccola variazione del tasso di interesse da i_0 a i, dove i appartiene ad un opportuno intorno di i_0, porta a una posizione di *surplus*, nel senso che se si effettua la valutazione al nuovo tasso i vi sarà un'eccedenza del valore attuale delle attività rispetto a quello delle passività. La variazione del tasso di interesse dev'essere abbastanza piccola da far rientrare i nel suddetto intorno di i_0. Senza informazioni specifiche e dettagliate sul tasso i_0 e sui flussi di cassa, non è possibile sapere quale sia l'effettivo intervallo di tassi di interesse per cui si realizza l'immunizzazione.

Questa immunizzazione della posizione di attività e passività (o, in breve, del portafogli) rispetto a piccole variazioni del tasso viene detta IMMUNIZZAZIONE DI REDINGTON.

Definizione 7.3 IMMUNIZZAZIONE DI REDINGTON
Se le attività prevedono flussi di cassa A_t per $t = 0, 1, \ldots, n$ e le passività prevedono flussi di cassa L_t per $t = 0, 1, \ldots, n$, allora questi ultimi vengono IMMUNIZZATI SECONDO REDINGTON dai flussi di cassa delle attività al tasso di valutazione i_0 se valgono le seguenti condizioni:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(i)} & V_A(0;i_0) = V_L(0;i_0); \\
\text{(ii)} & \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V_A(0;i)\right|_{i=i_0} = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V_L(0;i)\right|_{i=i_0}; \\
\text{(iii)} & \left.\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}i^2} V_A(0;i)\right|_{i=i_0} > \left.\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}i^2} V_L(0;i)\right|_{i=i_0}.
\end{array}
$$

Come già osservato in precedenza, la condizione (i) equivale a richiedere che, al tasso corrente i_0, il valore attuale all'epoca 0 dei flussi in entrata sia uguale a quello dei flussi in uscita. Ci si riferisce a questa condizione anche come al VINCOLO DI BILANCIO.

La condizione (ii) ha invece a che fare con la durata media finanziaria, e conduce in effetti a un VINCOLO DI DURATION. Ricordando la (7.3), richiedere la condizione (ii) equivale a richiedere che le durate medie finanziarie (o le *duration* modificate) di attività e passività siano uguali all'epoca 0 e al tasso corrente i_0.

Per quanto riguarda la condizione (iii), a volte si usa la derivata seconda di una funzione in un punto come misura della curvatura del relativo grafico in tale punto. Un concetto associato a questo è quello di CONVESSITÀ (in inglese: CONVEXITY) di una sequenza di flussi di cassa, e la condizione (iii) è anche nota come VINCOLO DI CONVESSITÀ. Prendiamo in considerazione due versioni della definizione di convessità: la prima è la CONVESSITÀ MODIFICATA, che è in relazione con l'allineamento attività-passività.

Definizione 7.4 CONVESSITÀ MODIFICATA
La CONVESSITÀ MODIFICATA di una sequenza di flussi di cassa è uguale alla derivata seconda del valore attuale dei flussi rispetto al tasso di valutazione, diviso il valore attuale. Per i flussi di cassa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ effettuati ai tempi $1, 2, \ldots, n$, il valore attuale al tempo 0 e al tasso di interesse i_0 è $\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot (1+i_0)^{-t}$ e la convessità modificata (al tasso i_0) è

$$
C^*_{(i_0)} = \frac{\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}i^2} V_A(0;i)\right|_{i=i_0}}{V_A(0;i_0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot (t+1) \cdot A_t (1+i_0)^{-t-2}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i_0)^{-t}}.
$$

Possiamo riformulare la relazione (7.17) come $C^*_{A(i_0)} > C^*_{L(i_0)}$, cioè: la convessità modificata (del valore attuale) delle attività al tasso i_0 è maggiore della convessità modificata (del valore attuale) delle passività.

L'Equazione (7.16) è equivalente a

$$\sum t \cdot A_t \cdot (1+i_0)^{-t} = \sum t \cdot L_t \cdot (1+i_0)^{-t}. \tag{7.19}$$

Inoltre, se vale l'Equazione (7.16), allora la (7.17) è equivalente a

$$\sum t^2 \cdot A_t \cdot (1+i_0)^{-t} > \sum t^2 \cdot L_t \cdot (1+i_0)^{-t}. \tag{7.20}$$

Se vale l'Equazione (7.16), segue che flussi in entrata e flussi in uscita hanno la stessa durata media finanziaria (modificata o di Macaulay) rispetto ai tassi di interesse. Di conseguenza, per piccole deviazioni del tasso di interesse dal valore i_0, le variazioni del valore attuale delle attività e delle passività sono all'incirca uguali.

Supponiamo che siano soddisfatte le condizioni delle Equazioni (7.14) e (7.16):

$$V_A(0;i_0) = V_L(0;i_0) \text{ e } \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}V_A(0;i)\right|_{i=i_0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}V_L(0;i)\right|_{i=i_0}.$$

Allora la (7.20) è equivalente a

$$\sum \left(t - D_{(i_0)}\right)^2 \cdot A_t \cdot (1+i_0)^{-t} > \sum \left(t - D_{(i_0)}\right)^2 \cdot L_t \cdot (1+i_0)^{-t}, \tag{7.21}$$

dove $D_{(i_0)}$ è la *flat yield duration*, calcolata a tasso i_0, che per effetto della (7.16) assume lo stesso valore per attività e passività. La relazione (7.21) sarebbe corretta anche usando $D^*_{(i_0)}$ al posto di $D_{(i_0)}$. In base alla (7.21), possiamo dire che, se sono soddisfatte le Equazioni (7.14) e (7.16), l'allineamento attività-passività risulta immunizzato se il flusso delle attività è "più disperso" o "diffuso" (nel tempo) intorno alla durata media finanziaria $D_{(i_0)}$ di Macaulay (o a quella modificata $D^*_{(i_0)}$) di quanto lo siano le passività. Nel prossimo esempio, riferito ai flussi di cassa dell'Esempio 7.5, mostriamo come sfruttare questo fatto per ottenere le condizioni per l'immunizzazione.

Esempio 7.7 Immunizzazione di Redington

Per immunizzare le passività legate al beneficio di fine rapporto descritto nell'Esempio 7.5, l'azienda acquista un portafogli di investimento composto da due ZCB, con scadenze ai tempi t_1 e t_2 (misurati a partire dalla data di cessazione dell'attività dell'azienda). Supponiamo che la struttura per scadenze sia piatta, con un tasso effettivo annuale del 10%. Per ciascuna delle coppie t_1 e t_2 sotto elencate, determiniamo gli importi da sottoscrivere di ciascuno ZCB e stabiliamo se il portafogli complessivo di attività-passività si trova in una posizione immunizzata o no.

(a) $t_1 = 0, t_2 = 15$;
(b) $t_1 = 6, t_2 = 12$;
(c) $t_1 = 2, t_2 = 14$.

Soluzione

Sia X il valore nominale di ZCB con scadenza t_1 e Y quello dello ZCB con scadenza t_2. Affinché valga l'Equazione (7.14), dobbiamo avere

$$\begin{aligned}
X \cdot 1{,}10^{-t_1} + Y \cdot 1{,}10^{-t_2} &= \sum L_t \cdot 1{,}10^{-t} \\
&= 30.000 \cdot 1{,}1^{-1} + 30.000 \cdot 1{,}1^{-2} + 30.000 \cdot 1{,}1^{-3} \\
&\quad + \cdots + 30.000 \cdot 1{,}1^{-9} + 130.000 \cdot 1{,}1^{-10} \\
&\quad + 20.000 \cdot 1{,}1^{-11} + 120.000 \cdot 1{,}1^{-12} \\
&\quad + 10.000 \cdot 1{,}1^{-13} + 10.000 \cdot 1{,}1^{-14} \\
&\quad + 110.000 \cdot 1{,}1^{-15} \\
&= 300.000 \text{ €}.
\end{aligned}$$

Perché sia soddisfatta l'Equazione (7.16), deve risultare:

$$\begin{aligned}
t_1 \cdot X \cdot 1{,}10^{-t_1} + t_2 \cdot Y \cdot 1{,}10^{-t_2} &= \sum t \cdot L_t \cdot 1{,}10^{-t} \\
&= 30.000 \cdot 1{,}1^{-1} + 2 \cdot 30.000 \cdot 1{,}1^{-2} + 3 \cdot 30.000 \cdot 1{,}1^{-3} \\
&\quad + \cdots + 9 \cdot 30.000 \cdot 1{,}1^{-9} + 10 \cdot 130.000 \cdot 1{,}1^{-10} \\
&\quad + 11 \cdot 20.000 \cdot 1{,}1^{-11} + 12 \cdot 120.000 \cdot 1{,}1^{-12} \\
&\quad + 13 \cdot 10.000 \cdot 1{,}1^{-13} + 14 \cdot 10.000 \cdot 1{,}1^{-14} \\
&\quad + 15 \cdot 110.000 \cdot 1{,}1^{-15} \\
&= 2.262.077{,}228 \quad (\text{anni} \cdot \text{euro}).
\end{aligned}$$

Risolvendo queste due equazioni rispetto a X e Y nei tre casi richiesti, otteniamo:

(a) $X = 149.194{,}85$ €, $Y = 629.950{,}53$ €;
(b) $X = 395.035{,}30$ €, $Y = 241.699{,}38$ €;
(c) $X = 195.407{,}21$ €, $Y = 525.977{,}96$ €.

La terza condizione per l'immunizzazione, rappresentata dalla (7.17), richiede che sia

$$t_1^2 \cdot X \cdot 1{,}10^{-t_1} + t_2^2 \cdot Y \cdot 1{,}10^{-t_2} > \sum t^2 \cdot L_t \cdot 1{,}10^{-t}.$$

Il secondo membro della disequazione è uguale a

$$\begin{aligned}
&30.000 \cdot 1{,}1^{-1} + 2^2 \cdot 30.000 \cdot 1{,}1^{-2} + 3^2 \cdot 30.000 \cdot 1{,}1^{-3} + \ldots \\
&+ 9^2 \cdot 30.000 \cdot 1{,}1^{-9} + 10^2 \cdot 130.000 \cdot 1{,}1^{-10} \\
&+ 11^2 \cdot 20.000 \cdot 1{,}1^{-11} + 12^2 \cdot 120.000 \cdot 1{,}1^{-12} + 13^2 \cdot 10.000 \cdot 1{,}1^{-13} \\
&+ 14^2 \cdot 10.000 \cdot 1{,}1^{-14} + 15^2 \cdot 110.000 \cdot 1{,}1^{-15} \\
&= 22.709.878 \quad (\text{anni}^2 \cdot \text{euro}).
\end{aligned}$$

Nel caso (a), il primo membro della (7.23), cioè $t_1^2 \cdot X \cdot 1{,}10^{-t_1} + t_2^2 \cdot Y \cdot 1{,}10^{-t_2}$, vale 33.931.158, perciò questo portafogli è immunizzato. Nel caso (b), il primo membro vale 19.117.390, perciò a fronte di piccole deviazioni (positive o negative) del tasso di interesse dal 10% il valore attuale delle attività sarà minore di quello delle passività, dunque il portafogli non è immunizzato. Nel caso (c), il primo membro vale 27.793.236, perciò anche questo portafogli è immunizzato.

Abbiamo detto in precedenza che prendiamo in considerazione due versioni della definizione di convessità. Abbiamo visto la convessità modificata; vediamo ora la CONVESSITÀ DI MACAULAY.

Definizione 7.5 CONVESSITÀ DI MACAULAY
La CONVESSITÀ DI MACAULAY al tasso di interesse i dei flussi di cassa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ con scadenze rispettive ai tempi $1, 2, \ldots, n$, al tasso i_0, è

$$C_{(i_0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2 \cdot A_t \cdot (1+i_0)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i_0)^{-t}}.$$

La principale applicazione della convessità di Macaulay si ha nell'approssimazione di Macaulay al secondo ordine della variazione del valore attuale di una sequenza di flussi al variare del tasso di interesse, che vedremo nella prossima sezione. La convessità di Macaulay di una sequenza di flussi di cassa è legata alla convessità modificata tramite la seguente relazione: $C^*_{(i)} = \frac{C_{(i)}+D_{(i)}}{(1+i)^2}$.

7.3.2 Immunizzazione completa

Definizione 7.6 IMMUNIZZAZIONE COMPLETA
Un portafogli si dice COMPLETAMENTE IMMUNIZZATO quando $\sum A_t \cdot (1+i)^{-t} \geqslant \sum L_t \cdot (1+i)^{-t}$ per ogni $i > 0$.

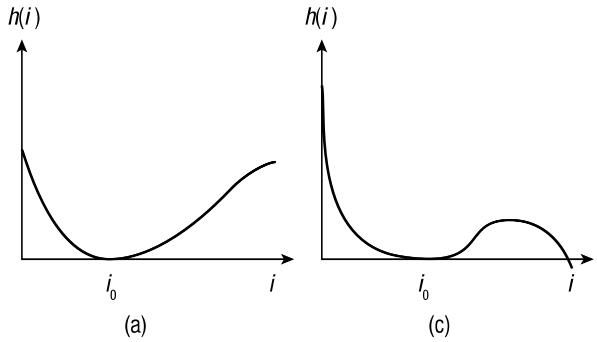
Facendo riferimento all'Esempio 7.7, il portafogli è completamente immunizzato nel caso (a). Nel caso (c), la funzione $h(i)$, che rappresenta il valore attuale dei flussi di cassa delle attività meno quello delle passività, presenta un minimo relativo in $i_0 = 0{,}10$, ma $\sum A_t \cdot (1+i)^{-t} < \sum L_t \cdot (1+i)^{-t}$ per valori di i abbastanza grandi. Questo significa che nel caso (c) si può avere una posizione di *deficit* (misurato in termini di valore attuale) se la variazione del tasso di interesse è abbastanza grande da portare i sufficientemente lontano dal 10%. Perciò nel caso (c) il portafogli soddisfa le condizioni dell'immunizzazione di Redington al tasso $i_0 = 0{,}10$, ma non è completamente immunizzato. La Figura 7.3 (non in scala) mostra i grafici di $h(i)$ per i casi (a) e (c) dell'Esempio 7.7.

Al trascorrere del tempo, possono verificarsi variazioni dei tassi di interesse. Inoltre, si modificano le durate residue dei flussi in entrata e in uscita, ed alcuni flussi giungono a scadenza. Può dunque rendersi necessario aggiornare il portafogli delle attività in modo da conservare una posizione immune.

Esaminiamo ulteriormente, ora, il concetto di immunizzazione completa definito sopra. Supponiamo che le passività consistano in un singolo flusso in uscita di importo L_s da pagare al tempo $s \geqslant 0$, e che vi siano due flussi in entrata, A_1 e A_2, rispettivamente ai tempi t_1 e t_2, con $t_1 < t_2$. Supponiamo, altresì, che al tasso corrente i_0 le Equazioni (7.14) e (7.16) siano soddisfatte. Ciò significa che:

$$A_{t_1} \cdot (1+i_0)^{-t_1} + A_{t_2} \cdot (1+i_0)^{-t_2} = L_s \cdot (1+i_0)^{-s} \tag{7.22}$$

Figura 7.3 **Valore attuale netto $h(i)$ di due portafogli (casi (a) e (c) dell'Esempio 7.7), al variare del tasso d'interesse.**



e

$$t_1 \cdot A_{t_1} \cdot (1+i_0)^{-t_1} + t_2 \cdot A_{t_2} \cdot (1+i_0)^{-t_2} = s \cdot L_s \cdot (1+i_0)^{-s}. \tag{7.23}$$

Come in precedenza, la funzione $h(i) = V_A(0;i) - V_L(0;i) = A_{t_1} \cdot (1+i_0)^{-t_1} + A_{t_2} \cdot (1+i_0)^{-t_2} - L_s \cdot (1+i_0)^{-s}$ sarà il valore attuale delle attività meno il valore attuale delle passività, valutati al tasso di interesse i. Con qualche passaggio algebrico, si arriva a riscrivere $h(i)$ come

$$\begin{aligned} h(i) &= (1+i_0)^{-s} \cdot A_{t_1} \cdot (1+i_0)^a \cdot \left[\left(\frac{1+i}{1+i_0} \right)^a + \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{1+i}{1+i_0} \right)^{-b} - \left(1 + \frac{a}{b} \right) \right] \\ &= (1+i_0)^{-s} \cdot A_{t_1} \cdot g(i) \end{aligned} \tag{7.24}$$

dove, per semplificare la notazione, abbiamo posto $a = s - t_1$ e $b = t_2 - s$, mentre $g(i) = (1+i_0)^a \cdot \left[\left(\frac{1+i}{1+i_0} \right)^a + \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{1+i}{1+i_0} \right)^{-b} - \left(1 + \frac{a}{b} \right) \right]$. Possiamo vedere che $g(i_0) = 0$, e quindi $h(i_0) = 0$, e inoltre

$$g'(i) = a \cdot (1+i)^{-1} \cdot \left[\left(\frac{1+i}{1+i_0} \right)^a - \left(\frac{1+i}{1+i_0} \right)^{-b} \right].$$

Poiché $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$, segue che $g'(i) \geqslant 0$ se $i \geqslant i_0$ e $g'(i) \leqslant 0$ se $i \leqslant i_0$. Pertanto $g(i)$ è crescente per $i \geqslant i_0$ e decrescente per $i \leqslant i_0$. La funzione $g(i)$ ha un minimo assoluto in $i = i_0$ e, dato che $g(i_0) = 0$, risulta $g(i) \geqslant 0$ per ogni tasso di interesse i. Dunque $h(i) \geqslant 0$ per ogni i e la posizione di attività-passività è completamente immunizzata rispetto ad ogni variazione dei tassi di interesse.

Possiamo vedere questa immunizzazione completa di un singolo flusso in uscita anche da un altro punto di vista. In precedenza, abbiamo visto che la durata media finanziaria di un singolo importo pagabile al tempo futuro t è semplicemente t. Dalla (7.21) segue che ogni scelta di attività che comporti due o più flussi A_t non nulli tali da soddisfare le Equazioni (7.22) e (7.23) consentirà di realizzare un'immunizzazione completa, dal momento che il secondo membro della (7.21) è uguale a zero per le passività, mentre il primo membro è sicuramente maggiore di zero.

Esempio 7.8 Immunizzazione completa

Utilizziamo il metodo dell'immunizzazione completa delineato nelle Equazioni (7.22), (7.23) e (7.24) per calcolare i valori di A_0 e A_{15} che immunizzano $L_{12} = 120.000$ €, assumendo $i_0 = 0{,}10$, $t_1 = 0$, $t_2 = 15$ e $s = 12$.

Soluzione

Dobbiamo risolvere le due equazioni

$$A_0 \cdot 1{,}10^0 + A_{15} \cdot 1{,}10^{-15} = 120.000 \cdot 1{,}10^{-12} = 38.235{,}70 \text{ €}$$

e

$$0 \cdot A_0 \cdot 1{,}10^0 + 15 \cdot A_{15} \cdot 1{,}10^{-15} = 12 \cdot 120.000 \cdot 1{,}10^{-12} = 458.828{,}38 \quad (\text{anni} \cdot \text{euro}).$$

La soluzione è $A_0 = 7.647{,}14$ € e $A_{15} = 127.776{,}00$ €. Si noti che $h(0) = 15.423{,}14$ €, $h(0{,}10) = 0$ €, $\lim_{i \to \infty} h(i) = A_0 = 7.647{,}14$ € e $h(i)$ è decrescente per $0 \leqslant i < 0{,}10$ e crescente per $i > 0{,}10$. Se il tasso di interesse dovesse scendere da $i_0 = 0{,}10$ a 0, si potrebbe realizzare un profitto di 15.423,14 €, dal momento che si potrebbero vendere alcune attività mantenendo quelle sufficienti a coprire le passività al nuovo tasso di interesse nullo.

Se s, L_s e i_0 sono noti, le Equazioni (7.22) e (7.23) contengono le incognite A_{t_1}, A_{t_2}, t_1 e t_2. In generale, date due qualsiasi di queste quattro grandezze vi sarà un'unica soluzione per le altre due tale da immunizzare completamente il portafogli. (Può accadere che qualche flusso A_t oppure qualche epoca t risultino negativi, che vi siano infinite soluzioni o che non vi siano soluzioni.)

Discutendo l'immunizzazione di Redington e l'immunizzazione completa abbiamo implicitamente assunto che:

(1) la struttura per scadenze dei tassi di interesse sia piatta;

(2) quando si verifica una variazione del tasso di interesse, tale variazione sia la stessa per tutta la struttura per scadenze, ovvero ci sia uno spostamento parallelo della struttura.

Queste ipotesi implicite sono state accettate anche negli esempi. Nella pratica, tuttavia, non è frequente trovare una curva dei rendimenti piatta, e in genere gli spostamenti della struttura per scadenze non sono paralleli, per cui si potrebbe non riuscire a immunizzare completamente un portafogli. Supponiamo che nell'Esempio 7.8 il tasso di interesse del 10% diventi uguale all'11% per la scadenza a 12 anni e all'11,1% per la scadenza a 15 anni. In tal caso il valore attuale del flusso delle attività è

$$7.647{,}14 + 127.776{,}00 \cdot 1{,}111^{-15} = 33.994{,}58 \text{ €},$$

mentre quello delle passività è $120.000 \cdot 1{,}11^{-12} = 34.300{,}90$ €. Il portafogli non è immunizzato rispetto a questo spostamento quasi parallelo della curva dei rendimenti. Si può estendere la teoria dell'immunizzazione alle situazioni in cui le strutture per scadenze non sono piatte e le variazioni non seguono uno spostamento parallelo e persino a modelli stocastici della struttura per scadenze. I modelli stocastici, però, vanno al di là degli obiettivi di questo libro.

7.4 Applicazioni ed esempi

7.4.1 Durata media finanziaria e variazioni del tasso d'interesse nominale

Nella Sezione 7.2 abbiamo presentato il concetto di durata media finanziaria assumendo che i flussi di cassa prevedessero pagamenti annuali e che il tasso di rendimento fosse un tasso effettivo su base annuale. Avremmo, però, potuto basare la trattazione su frequenze di pagamento non annuali, con tasso di rendimento espresso nella stessa unità temporale dei pagamenti. La durata media finanziaria sarebbe allora espressa con l'unità temporale del periodo di pagamento: per esempio, una durata pari a 10 significherebbe 10 periodi di pagamento. L'unità di misura convenzionale per la durata media finanziaria è, comunque, l'anno. È ovviamente semplice convertire la *duration* da un'unità temporale non annuale a una annuale.

Nella pratica, è usuale che le cedole delle obbligazioni siano pagate semestralmente e, di conseguenza, che i rendimenti delle obbligazioni siano espressi come tassi nominali di interesse su base annuale convertibili semestralmente. Con questi parametri, la Definizione 7.1 della durata media finanziaria non cambia, ma il tasso di interesse i diventa un tasso di rendimento semestrale e l'unità di misura per D diventa il semestre. Si ottiene poi la durata media finanziaria espressa in anni dividendo per 2 quella espressa in semestri. Per esempio, consideriamo un'obbligazione senza cedole con scadenza a n anni e tasso di rendimento nominale $i^{(2)}$. Se definiamo $i_{1/2} = \frac{i^{(2)}}{2}$, allora il valore attuale dell'obbligazione è $V(0) = (1+i_{1/2})^{-2n}$. Applicando la Definizione 7.1 otteniamo una durata media finanziaria pari a $\frac{2n\cdot(1+i_{1/2})^{-2n}}{(1+i_{1/2})^{-2n}} = 2n$ semestri, cioè n anni.

Per quanto riguarda la *duration* modificata, consideriamo nuovamente un'obbligazione senza cedole con scadenza a n anni e tasso di rendimento nominale $i^{(2)}$. Ponendo come prima $i_{1/2} = \frac{i^{(2)}}{2}$, il valore attuale dell'obbligazione risulta $V(0) = (1+i_{1/2})^{-2n}$ e la *duration* modificata è uguale a $-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i_{1/2}}(1+i_{1/2})^{-2n}}{(1+i_{1/2})^{-2n}} = 2n\cdot(1+i_{1/2})^{-1}$ semestri (il tasso di interesse $i_{1/2}$ è relativo a un periodo di 6 mesi). Se, in alternativa, si calcola la derivata al numeratore rispetto al tasso nominale annuale $i^{(2)}$, la *duration* modificata diventa

$$
\begin{aligned}
-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i^{(2)}}\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-2n}}{(1+i_{1/2})^{-2n}} &= -\frac{-2n\cdot\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-2n-1}\cdot\frac{1}{2}}{(1+i_{1/2})^{-2n}} = \\
&= -\frac{-n\cdot(1+i_{1/2})^{-2n-1}}{(1+i_{1/2})^{-2n}} = -n\cdot(1+i_{1/2})^{-1}.
\end{aligned}
$$

Ciò che è successo è che, essendo $i_{1/2} = \frac{i^{(2)}}{2}$, le derivate rispetto a $i^{(2)}$ sono la metà delle derivate rispetto a $i_{1/2}$.

Esempio 7.9 Durata media finanziaria di un titolo con cedole semestrali

Un'obbligazione con scadenza a 10 anni e tasso cedolare del 5% ha cedole semestrali ed è attualmente valutata al tasso $i^{(2)} = 5\%$. Determiniamo la durata media finanziaria dell'obbligazione (in anni).

Soluzione

L'obbligazione ha $n = 20$ cedole semestrali, interessi del 2,5% corrisposti ogni sei mesi e un tasso di rendimento semestrale $i_{1/2} = 0{,}025$. Utilizzando un valore nominale $C = 100$ €, la durata media finanziaria misurata in semestri è

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{20} t \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}025^{-t} + 20 \cdot 100 \cdot 1{,}025^{-20}}{\sum_{t=1}^{20} 2{,}5 \cdot 1{,}025^{-t} + 100 \cdot 1{,}025^{-20}} = 15{,}979 \quad \text{(semestri)}.$$

Si osservi che la sommatoria al numeratore può essere semplificata con $2{,}5 \cdot (Ia)_{\overline{20}|0{,}025}$, mentre la sommatoria a denominatore può essere semplificata con $2{,}5 \cdot a_{\overline{20}|0{,}025}$. Dato che il tasso di valutazione coincide con il tasso cedolare, si ha che il titolo è quotato alla pari; il denominatore, dunque, risulta pari a 100 €.

Potremmo usare un qualsiasi altro valore nominale; l'importo della cedola e del valore di rimborso verrebbero scalati opportunamente e otterremmo sempre lo stesso valore per la durata media finanziaria.

La durata media finanziaria in anni è $\frac{1}{2} \cdot 15{,}979 = 7{,}989$ anni.

7.4.2 Durata media finanziaria e variazioni dell'intensità istantanea di interesse

In alcuni contesti, è comodo esprimere il fattore di sconto (o il fattore di montante) impiegando un modello a tempo continuo e dunque avendo come parametro l'intensità istantanea d'interesse. Esprimiamo in questo modo il rendimento alla scadenza e supponiamo che la struttura per scadenze sia piatta; dunque δ è l'intensità di rendimento per tutte le scadenze. Continuiamo, però, a considerare una sequenza di flussi di cassa a tempo discreto. Il valore attuale di una sequenza di flussi di cassa è $V(0;\delta) = \sum_{t=1}^{n} A_t \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}$. Se si considera la sensibilità alle variazioni di δ, si ha $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\delta} V(0;\delta) = -\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}$ e il tasso di variazione del valore attuale per unità di valuta investita è $\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\delta} V(0;\delta)}{V(0;\delta)} = \frac{-\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}}$. Come abbiamo visto nel modello a tempo discreto (in cui il fattore di sconto è espresso con il tasso di interesse), anche quando il fattore di sconto è espresso con l'intensità istantanea di interesse troviamo che la durata media finanziaria è una media ponderata delle durate residue dei pagamenti futuri. Si noti che, quando il parametro di riferimento è l'intensità istantanea d'interesse, non c'è distinzione tra durata media finanziaria e *duration* modificata.

Possiamo definire anche una versione della convessità basandoci su variazioni dell'intensità istantanea di interesse.

Si definisce in questo caso la CONVESSITÀ DI MACAULAY come $\frac{\frac{d^2}{d\delta^2}V(0;\delta)}{V(0;\delta)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2 \cdot A_t \cdot e^{-\delta t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot e^{-\delta t}}$; questa è uguale alla CONVESSITÀ MODIFICATA quando viene misurata in termini di intensità istantanea di interesse.

7.4.3 Durata media finanziaria e spostamenti paralleli della struttura per scadenze

La misura della durata media finanziaria presa in esame nella Sezione 7.2 si basa sulla variazione del rendimento alla scadenza dei flussi di cassa. Nel Capitolo 6 abbiamo visto che è possibile valutare una sequenza di flussi di cassa usando la struttura per scadenze dei tassi di interesse a pronti. Nella misura della durata media finanziaria considerata nella Sezione 7.2, si è assunto che la struttura per scadenze sia piatta, con lo stesso rendimento alla scadenza i per tutti i pagamenti futuri. In questo caso, come è stato osservato nella Sezione 6.2, il rendimento alla scadenza per un'obbligazione con cedole sarà anch'esso i per ogni scadenza e per ogni tasso cedolare.

Nella pratica, non capita spesso che la struttura per scadenze sia piatta; piuttosto, capita che sia crescente (o crescente fino a una certa scadenza e poi piatta o decrescente).

Data una sequenza di pagamenti annuali di importi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, il suo valore attuale, utilizzando un rendimento alla scadenza i per tutti i pagamenti, è $V(0;i) = \sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i)^{-t}$, e la durata media modificata è $-\frac{\frac{d}{di}V(0;i)}{V(0;i)} = \frac{-\frac{d}{di}\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i)^{-t}}$. La derivata al numeratore può essere scritta, in modo alternativo ma equivalente, come: $\frac{d}{di}\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i)^{-t} = \frac{d}{d\alpha}\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i+\alpha)^{-t}\big|_{\alpha=0}$ (valutata in $\alpha = 0$).

Continueremo a utilizzare la notazione introdotta nella Sezione 6.2 per i tassi a pronti, per cui $i_0(t)$ indica il rendimento di uno ZCB che scade tra t anni (rispetto al tempo 0 in cui avviene la valutazione). Possiamo esprimere il valore attuale di una sequenza di n pagamenti annuali che iniziano tra un anno da oggi, di importi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, come $V(0) = \sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t}$. Supponiamo che si verifichi una variazione della struttura per scadenze, in seguito alla quale ogni rendimento "slitta" di una quantità α, per cui il rendimento di uno ZCB a t anni diventa $i_0(t)+\alpha$. Possiamo scrivere il valore attuale della sequenza di pagamenti come funzione di α, $V(0;\alpha) = \sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i_0(t)+\alpha)^{-t}$, e osservare che $V(0;0) = V(0)$ (il valore attuale basato sulla struttura per scadenze originaria).

Calcolando la derivata di $V(0;\alpha)$ rispetto ad α otteniamo

$$\frac{d}{d\alpha}V(0;\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i_0(t)+\alpha)^{-t} = -\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i_0(t)+\alpha)^{-t-1}.$$

Questa derivata, valutata in $\alpha = 0$, è uguale a $\frac{d}{d\alpha}V(0;\alpha)\big|_{\alpha=0} = -\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t-1}$. La *duration* modificata della sequenza di pagamenti basata sulla variazione di α e valutata per $\alpha = 0$ è $-\frac{\frac{d}{d\alpha}V(0;\alpha)\big|_{\alpha=0}}{V(0;0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t-1}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t}}$. Poiché stiamo assumendo che i tassi a pronti vengano tutti simultaneamente modificati di una quantità α, la situazione appena descritta consiste in uno spostamento parallelo della struttura per scadenze.

Potremmo anche definire una versione della durata media finanziaria della sequenza di pagamenti in modo analogo a quanto fatto in condizioni di struttura per scadenze piatta. Otterremmo allora $\frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t}}$, la media ponderata che abbiamo visto in precedenza. Con una struttura per scadenze piatta e i come tasso di rendimento per tutte le scadenze, avevamo la relazione $D = D^* \cdot (1+i)$. Nel caso più generale di una struttura per scadenze non piatta non si ha una relazione analoga.

Esempio 7.10 Durata media finanziaria e spostamenti paralleli della struttura per scadenze

Supponiamo che la struttura per scadenze dei tassi di interesse abbia la seguente configurazione per le scadenze a 1, 2, 3 e 4 anni:

Scadenza	1 anno	2 anni	3 anni	4 anni
Tasso a pronti	0,05	0,10	0,15	0,20

Un'obbligazione con scadenza 4 anni ha cedole annuali al tasso cedolare del 10%. Calcoliamo: la durata media finanziaria modificata basata su uno spostamento parallelo della struttura per scadenze; il rendimento alla scadenza dell'obbligazione; la *duration* modificata basata su una variazione del rendimento alla scadenza.

Soluzione

Il prezzo dell'obbligazione, se questa ha valore nominale uguale a 100 €, è

$$V(0;0) = 10 \cdot \left(1{,}05^{-1} + 1{,}10^{-2} + 1{,}15^{-3} + 1{,}20^{-4}\right) + 100 \cdot 1{,}20^{-4} = 77{,}41 \text{ €}.$$

La *duration* modificata basata su uno spostamento parallelo della struttura per scadenze è

$$\begin{aligned} -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} V(0;\alpha)\big|_{\alpha=0}}{V(0;0)} &= \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t-1}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t}} \\ &= \frac{10 \cdot (1{,}05^{-2} + 2 \cdot 1{,}10^{-3} + 3 \cdot 1{,}15^{-4} + 4 \cdot 1{,}20^{-5}) + 4 \cdot 100 \cdot 1{,}20^{-5}}{10 \cdot (1{,}05^{-1} + 1{,}10^{-2} + 1{,}15^{-3} + 1{,}20^{-4}) + 100 \cdot 1{,}20^{-4}} \\ &= 2{,}82. \end{aligned}$$

Sulla base della struttura per scadenze indicata, il rendimento alla scadenza dell'obbligazione è il tasso i tale che

$$77{,}41 = 10 \cdot \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + (1+i)^{-4}\right] + 100 \cdot (1+i)^{-4}.$$

L'equazione, risolta con procedimento numerico, dà $i = 0{,}1847$.

La *duration* modificata basata su variazioni del rendimento alla scadenza è

$$\frac{\begin{array}{l} 10 \cdot (1{,}1847^{-2} + 2 \cdot 1{,}1847^{-3} + 3 \cdot 1{,}1847^{-4} \\ \qquad + 4 \cdot 1{,}1847^{-5}) + 4 \cdot 100 \cdot 1{,}1847^{-5} \end{array}}{\begin{array}{l} 10 \cdot (1{,}1847^{-1} + 1{,}1847^{-2} + 1{,}1847^{-3} \\ \qquad + 1{,}1847)-4) + 100 \cdot 1{,}1847^{-4} \end{array}} = 2{,}88.$$

La differenza tra la *duration* modificata basata sulla struttura per scadenze e la durata media basata sul rendimento alla scadenza non è grande.

La durata media finanziaria dell'obbligazione è

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i_0(t))^{-t}}$$
$$= \frac{10 \cdot (1{,}05^{-1} + 2 \cdot 1{,}10^{-2} + 3 \cdot 1{,}15^{-3} + 4 \cdot 1{,}20^{-4}) + 4 \cdot 100 \cdot 1{,}20^{-4}}{10 \cdot (1{,}05^{-1} + 1{,}10^{-2} + 1{,}15^{-3} + 1{,}20^{-4}) + 100 \cdot 1{,}20^{-4}}$$
$$= 3{,}33 \text{ anni.}$$

Se utilizziamo il rendimento alla scadenza, pari a 0,1847, anziché la struttura per scadenze, la durata media finanziaria è $D^* \cdot (1+i) = 2{,}88 \cdot 1{,}1847 = 3{,}41$ anni.

Se vi fosse uno spostamento parallelo verso l'alto di 10 punti base, il nuovo prezzo dell'obbligazione sarebbe

$$V(0;0{,}001) = 10 \cdot (1{,}051^{-1} + 1{,}101^{-2} + 1{,}151^{-3} + 1{,}201^{-4}) + 100 \cdot 1{,}201^{-4} = 77{,}194 \text{ €.}$$

Applicando l'approssimazione lineare con la *duration* modificata, il prezzo approssimato dopo lo spostamento parallelo sarebbe $77{,}41 - 2{,}88 \cdot 0{,}001 \cdot 77{,}41 = 77{,}187$ €.

Applicando il metodo di Macaulay al prezzo dell'obbligazione calcolato con il rendimento alla scadenza, si ottiene un prezzo approssimato pari a $77{,}41 \cdot \left(\frac{1{,}1847}{1{,}1857}\right)^{3{,}41} = 77{,}188$ €. Ciò che vogliamo far notare è che quando la struttura per scadenze non è piatta, per una particolare obbligazione possiamo fare l'ipotesi approssimata che la struttura per scadenze sia piatta utilizzando il rendimento alla scadenza di quell'obbligazione. Possiamo quindi determinare la durata media finanziaria e le variazioni approssimate del prezzo dell'obbligazione basandoci su tale struttura piatta approssimata. In questo esempio l'approssimazione fornisce risultati numerici piuttosto accurati.

D'altro canto, quando si ha una variazione della struttura per scadenze, in genere non si tratta di uno spostamento parallelo. I tassi a breve termine tendono a essere più volatili di quelli a lungo termine. Consideriamo per esempio il seguente modello per il prezzo dell'obbligazione dell'Esempio 7.10.

$$V(0;\alpha) = 10 \cdot \left[(1{,}05+\alpha)^{-1} + (1{,}1+0{,}75\cdot\alpha)^{-2} + (1{,}15+0{,}5\cdot\alpha)^{-3} + (1{,}2+0{,}25\cdot\alpha)^{-4}\right] + 100 \cdot (1{,}2+0{,}5\cdot\alpha)^{-4}.$$

In base a questo modello, il tasso a 1 anno è più sensibile a una variazione di α e più si allungano le scadenze meno diventano sensibili i tassi. La *duration* modificata rispetto alla variazione di α è

$$-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}V(0;\alpha)\big|_{\alpha=0}}{V(0;0)}$$
$$= \frac{10 \cdot (1{,}05^{-2} + 2 \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}10^{-3} + 3 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}15^{-4} + 4 \cdot 0{,}25 \cdot 1{,}20^{-5}) + 4 \cdot 100 \cdot 0{,}25 \cdot 1{,}20^{-5}}{10 \cdot (1{,}05^{-1} + 1{,}10^{-2} + 1{,}15^{-3} + 1{,}20^{-4}) + 100 \cdot 1{,}20^{-4}}$$
$$= 0{,}94.$$

Non sorprende che questa durata sia minore di quella dell'Esempio 7.10, dato che la maggior variabilità è nei tassi a breve termine.

Benché, come detto, le variazioni della struttura per scadenze non siano di solito parallele, la misura della durata media finanziaria basata sul rendimento alla scadenza può essere utile per confrontare il rischio di tasso di interesse per diverse obbligazioni. Se due gruppi di pagamenti hanno la stessa *duration*, hanno approssimativamente la medesima sensibilità verso una piccola variazione del rendimento alla scadenza o verso una piccola variazione della struttura per scadenze.

7.4.4 Durata media finanziaria effettiva

La definizione di durata media finanziaria che abbiamo dato fa riferimento a una sequenza di flussi di cassa fissati e noti con certezza, come quelli di un'obbligazione non esigibile anticipatamente. Una sequenza di pagamenti può avere delle "opzioni intrinseche". Per esempio, un'obbligazione esigibile anticipatamente (*callable bond*) dà all'emittente l'opzione di rimborsare l'obbligazione stessa in una delle date anticipate prefissate. Se il tasso di rendimento è maggiore del tasso cedolare, l'emittente effettuerà il rimborso alla data più lontana, nel caso contrario effettuerà il rimborso alla data più vicina.

Consideriamo un'obbligazione esigibile anticipatamente e supponiamo che l'emittente possa estinguere l'obbligazione in qualsiasi momento. Se il tasso di rendimento corrente è leggermente maggiore del tasso cedolare, l'emittente non effettuerà il rimborso oggi. Immaginiamo, adesso, che vi sia una brusca variazione del tasso di rendimento, che lo porta al di sotto del tasso cedolare. In tal caso l'emittente rimborserà il titolo immediatamente. Il modo in cui varia il prezzo dell'obbligazione non è descritto da una funzione derivabile del tasso di rendimento, perché la variazione di quest'ultimo non modifica solamente il valore attuale dei flussi di cassa, ma i flussi di cassa stessi, proprio perché in conseguenza della variazione del tasso di interesse l'obbligazione verrà rimborsata oggi anziché in una data successiva. Non si possono allora applicare le consuete definizioni di durata media finanziaria, poiché queste si basano su flussi di cassa certi.

Per i flussi di cassa che hanno opzioni intrinseche che possono modificare i flussi di cassa effettivi a seguito di variazioni del tasso di interesse, si applica la nozione di DURATA MEDIA FINANZIARIA EFFETTIVA. Se il tasso di interesse corrente usato per valutare i flussi di cassa è i_0, allora la durata media finanziaria effettiva è $\frac{V(0;i_0-h)-V(0;i_0+h)}{2\cdot h\cdot V(0;i_0)}$. In questa espressione, h rappresenta una variazione del tasso di interesse. Nella pratica, il valore di h va da pochi punti base a un intero punto percentuale e la durata media finanziaria effettiva varia a seconda del valore di h. Per una sequenza di flussi di cassa fissati, la durata media finanziaria effettiva dovrebbe essere approssimativamente uguale all'usuale *duration* modificata, tendendo a quest'ultima per $h \to 0$.

Esempio 7.11 Durata media finanziaria effettiva

Supponiamo che un'obbligazione a 10 anni abbia un valore nominale pari a 100 € e cedole annuali di importo 10 € l'una. L'obbligazione è esigibile anticipatamente, con rimborso pari a 100 €, a discrezione dell'emittente, in ogni data di pagamento cedole (subito dopo il pagamento della cedola), a iniziare dalla quinta cedola. Alla data del pagamento della quinta cedola, il rendimento alla scadenza dell'obbligazione è del 10,1%. Utilizzando una variazione di 50 punti base in più o in meno, calcoliamo la durata media finanziaria effettiva dell'obbligazione in corrispondenza di tale data. Calcoliamo quindi la durata media effettiva dell'obbligazione supponendo che non sia esigibile anticipatamente.

Soluzione

A un tasso di rendimento alla scadenza del 10,1%, il prezzo dell'obbligazione è $100 \cdot 1{,}101^{-5} + 10 \cdot a_{\overline{5}|0.101} = 99{,}62$ €. L'emittente dell'obbligazione non rimborserà il titolo in questo caso, perché il prezzo è inferiore al costo del rimborso anticipato, che è 100 €. Se il tasso di rendimento alla scadenza fosse del 10,6%, il prezzo dell'obbligazione sarebbe $100 \cdot 1{,}106^{-5} + 10 \cdot a_{\overline{5}|0{,}106} = 97{,}76$ €, e anche in questo caso non ci sarebbe rimborso anticipato dell'obbligazione. Se fosse del 9,6%, il prezzo sarebbe pari a 101,53 €, perciò l'emittente estinguerebbe l'obbligazione, potendola rimborsare a 100 €, cioè a meno del prezzo corrente dell'obbligazione.

La durata media finanziaria effettiva del titolo è $\frac{100-97{,}76}{2 \cdot 0{,}005 \cdot 99{,}62} = 2{,}25$ anni.

Se l'obbligazione non è esigibile anticipatamente, la durata media effettiva è $\frac{101{,}53-97{,}76}{2 \cdot 0{,}005 \cdot 99{,}62} = 3{,}78$ anni.

È possibile estendere la nozione di convessità a una di CONVESSITÀ EFFETTIVA. Quest'ultima, per una sequenza di flussi di cassa, è definita da $\frac{V(0;i_0-h)-2 \cdot V(0;i_0)+V(0;i_0+h)}{h^2 \cdot V(0;i_0)}$. Come accade con la definizione di durata media finanziaria effettiva, anche la convessità effettiva dipende dal valore di h.

7.4.5 Durata media finanziaria, convessità e valore attuale: approssimazioni al secondo ordine

Nella Sezione 7.2.3 abbiamo discusso i metodi "al primo ordine" con cui approssimare la variazione del valore attuale di più flussi di cassa al variare del tasso di interesse di valutazione. L'approssimazione al primo ordine per mezzo della *duration* modificata si basa sullo sviluppo in serie di Taylor della funzione valore attuale $V(0;i)$ (una funzione del tasso di valutazione i). Tale approssimazione è stata indicata come "al primo ordine" perché lo sviluppo in serie di Taylor è stato arrestato al primo ordine (alla derivata prima).

L'approssimazione per sviluppo in serie di Taylor arrestato al secondo ordine (alla derivata seconda) è $V(0;i_0+h) \approx V(0;i_0) + h \cdot V'(0;i_0) + \frac{h^2}{2} \cdot V''(0;i_0)$. Questa espressione rappresenta l'APPROSSIMAZIONE AL SECONDO ORDINE CON LA DURATION MODIFICATA della funzione valore attuale. Ricordando che $V'(0;i_0) = -V(0;i_0) \cdot D^*_{(i_0)}$ e che $V''(0;i_0) = V(0;i_0) \cdot C^*_{(i_0)}$ (dove $C^*_{(i_0)}$ è la convessità modificata dei flussi di cassa), possiamo riformulare questa approssimazione nel seguente modo:

$$V(0;i_0+h) \approx V(0;i_0) \cdot \left(1 - h \cdot D^*(i_0) + \frac{h^2}{2} \cdot C^*_{(i_0)}\right). \tag{7.25}$$

L'altro metodo per approssimare la funzione valore attuale, ricavato nella Sesione 7.2.3, è l'approssimazione di Macaulay al primo ordine, espressa dall'Equazione (7.7) nella forma $V(0;i_0+h) \approx V(0;i_0) \cdot \left(\frac{1+i_0}{1+i_0+h}\right)^{D(i_0)}$.

Nell'appendice alla nota di studio della Society of Actuaries scritta da Robert Alps, si ricava la seguente ulteriore approssimazione, detta APPROSSIMAZIONE DI MACAULAY AL SECONDO ORDINE:

$$V(0;i_0+h) \approx V(0;i_0) \cdot \left(\frac{1+i_0}{1+i_0+h}\right)^{D_{(i_0)}} \cdot \left[1+\left(\frac{h}{1+i_0}\right)^2 \cdot \frac{C_{(i_0)}-D^2_{(i_0)}}{2}\right].$$

Il prossimo esempio è un'estensione dell'Esempio 7.3, dove si applicano i metodi di approssimazione al secondo ordine appena descritti.

Esempio 7.3 *(Continuazione)* Approssimazione al secondo ordine

Nell'Esempio 7.3 esaminato in precedenza, abbiamo preso in considerazione un'obbligazione con 10 cedole al 5% di tasso cedolare e tasso di rendimento pari al 10%. Il valore nominale dell'obbligazione è 100 €. Abbiamo applicato le approssimazioni al primo ordine, per mezzo della *duration* modificata e di Macaulay, per ottenere un'approssimazione per la variazione del valore attuale conseguente a un aumento del tasso di rendimento di 10 punti base (0,1%). Applichiamo ora le corrispondenti approssimazioni al secondo ordine e confrontiamole sia tra loro, sia rispetto a quelle al primo ordine.

Soluzione

Eseguiamo i calcoli con più cifre decimali per valutare meglio l'accuratezza dei metodi. Il prezzo esatto dell'obbligazione al tasso iniziale del 10% è

$$100 \cdot 1{,}1^{-10} + 5 \cdot a_{\overline{10}|0{,}1} = 69{,}27716447\text{ €}.$$

Il prezzo esatto dell'obbligazione al tasso di rendimento aumentato di 10 punti base è

$$100 \cdot 1{,}101^{-10} + 5 \cdot a_{\overline{10}|0{,}101} = 68{,}79687762\text{ €}.$$

La durata media finanziaria dell'obbligazione è 7,66086256 anni e la *duration* modificata è $D^*_{(0,1)} = \frac{7{,}661}{1{,}1} = 6{,}964420509$.

L'approssimazione al primo ordine del prezzo per mezzo della *duration* modificata dà come risultato 69,7947 €, con un errore relativo pari a $3{,}2 \cdot 10^{-5}$, mentre l'approssimazione di Macaulay al primo ordine dà come risultato 69,7966 €, con un errore relativo pari a $4{,}4 \cdot 10^{-6}$.

Per calcolare le approssimazioni al secondo ordine, è necessario conoscere i valori delle convessità modificata e di Macaulay.

La convessità di Macaulay per l'obbligazione è

$$\begin{aligned} C_{(i_0)} &= \frac{\sum_{t=1}^{10} t^2 \cdot A_t \cdot (1+i_0)^{-t}}{\sum_{t=1}^{10} A_t \cdot (1+i_0)^{-t}} = \\ &= \frac{5 \cdot \left(1{,}1^{-1} + 4 \cdot 1{,}1^{-2} + \cdots + 81 \cdot 1{,}1^{-9}\right) + 10 \cdot 105 \cdot 1{,}1^{-10}}{5 \cdot (1{,}1^{-1} + 1{,}1^{-2} + \cdots + 1{,}1^{-9}) + 105 \cdot 1{,}1^{-10}} = \\ &= 69{,}05183414. \end{aligned}$$

La convessità modificata è

$$C^*_{(i_0)} = \frac{\sum_{t=1}^{10} t \cdot (t+1) \cdot A_t \cdot (1+i_0)^{-t-2}}{\sum_{t=1}^{10} A_t \cdot (1+i_0)^{-t}} = 63{,}39892289.$$

Applicando l'approssimazione al secondo ordine per mezzo della *duration* modificata, otteniamo come prezzo dell'obbligazione

$$\begin{aligned}V(0;0{,}1+0{,}001) &\approx V(0;0{,}1)\cdot\left(1-0{,}001\cdot D^*_{(0,1)}+\frac{0{,}001^2}{2}\cdot C^*_{(0,1)}\right)=\\&=69{,}27716447\cdot\left(1-0{,}001\cdot 6{,}964420509+\frac{0{,}001^2}{2}\cdot 63{,}39892289\right)=\\&=68{,}79688522\text{ €}.\end{aligned}$$

L'errore relativo in questa approssimazione è

$$\frac{|68{,}79688522-68{,}79687762|}{68{,}79687762}=1{,}1\cdot 10^{-7},$$

mentre nell'approssimazione al primo ordine era $3{,}2\cdot 10^{-5}$.

Applicando l'approssimazione di Macaulay al secondo ordine otteniamo come prezzo dell'obbligazione

$$\begin{aligned}V(0;0{,}1+0{,}001) &\approx V(0;0{,}1)\cdot\left(\frac{1{,}1}{1{,}101}\right)^{D_{(i_0)}}\cdot\left(1+\left(\frac{0{,}001}{1{,}1}\right)^2\cdot\frac{C_{(i_0)}-D^2_{(i_0)}}{2}\right)=\\&=69{,}27716447\cdot\left(\frac{1{,}1}{1{,}101}\right)^{7{,}66086256}\cdot\left(1+\left(\frac{0{,}001}{1{,}1}\right)^2\cdot\frac{69{,}05183414-7{,}66086256^2}{2}\right)=\\&=69{,}79687760\text{ €}.\end{aligned}$$

L'errore relativo in questa approssimazione è

$$\frac{|68{,}7979687760-68{,}79687762|}{68{,}79687762}=2{,}9\cdot 10^{-10},$$

mentre nell'approssimazione al primo ordine era $4{,}4\cdot 10^{-6}$.

7.4.6 Limitazioni della durata media finanziaria come misura del rischio di tasso

Come abbiamo osservato in precedenza, le misure convenzionali della durata media finanziaria esaminate nella Sezione 7.2 si basano sul rendimento alla scadenza e su spostamenti paralleli della struttura per scadenze. Nella realtà non è così che varia il tasso di interesse.

Una seconda limitazione è che la durata media finanziaria di una sequenza di pagamenti varia nel tempo, anche se il tasso di rendimento non cambia. La durata media finanziaria di un'obbligazione senza cedole è il tempo fino alla scadenza, che diminuisce nel tempo, avvicinandosi appunto alla data di scadenza. Se per due sequenze di pagamenti valutate allo stesso tasso di rendimento alla scadenza i il valore attuale e la durata media finanziaria al tempo 0 sono uguali, allora resteranno uguali anche in un tempo successivo, se continuano a essere valutate al tasso i e se nel frattempo non si giunge alla scadenza di alcuni dei pagamenti. Se invece in tale tempo successivo il tasso di valutazione è diverso da i o vengono pagati alcuni flussi, i valori attuali e le durate medie finanziarie potrebbero non coincidere più. È quanto mostra il seguente esempio.

Esempio 7.12 Variazioni della durata media finanziaria

Consideriamo i due seguenti portafogli di obbligazioni:

Portafogli 1: uno ZCB a 10 anni di valore nominale 100 €.

Portafogli 2: uno ZCB a 5 anni di valore nominale 41,39 € più uno ZCB a 20 anni di valore nominale 86,46 €.

Il rendimento alla scadenza è $i = 10\%$ per tutti i titoli.

Dimostriamo che i valori attuali e le durate medie finanziarie dei due portafogli restano uguali per 5 anni se il rendimento alla scadenza non varia.

Supponendo invece che dopo un anno il rendimento alla scadenza diventi uguale all'11%, calcoliamo i valori attuali e le durate medie finanziarie dei due portafogli.

Supponendo, infine, che il rendimento resti uguale al 10%, verifichiamo che le durate medie finanziarie dei due portafogli all'epoca 5 non sono più uguali.

Soluzione

I valori attuali e le durate medie finanziarie dei due portafogli al tempo 0 sono:

Portafogli 1: $V_{(1)}(0) = 100 \cdot 1{,}1^{-10} = 38{,}55$ € e $D_{(1)} = 10$ anni.

Portafogli 2: $V_{(2)}(0) = 41{,}39 \cdot 1{,}1^{-5} + 86{,}46 \cdot 1{,}1^{-20} = 38{,}55$ € e

$$D_{(2)} = \frac{5 \cdot 41{,}39 \cdot 1{,}1^{-5} + 20 \cdot 86{,}46 \cdot 1{,}1^{-20}}{38{,}55} = 10 \text{ anni.}$$

A parità di rendimento, al tempo t il valore attuale del Portafogli 1 è

$$V_{(1)}(t) = 100 \cdot 1{,}1^{-10} \cdot 1{,}1^{t} = 100 \cdot 1{,}1^{-(10-t)} = 38{,}55 \cdot 1{,}1^{t} \text{ €},$$

così come quello del Portafogli 2

$$\begin{aligned} V_{(2)}(t) &= \left(41{,}39 \cdot 1{,}1^{-5} + 86{,}46 \cdot 1{,}1^{-20}\right) \cdot 1{,}1^{t} \\ &= 41{,}39 \cdot 1{,}1^{-(5-t)} + 86{,}46 \cdot 1{,}1^{-(20-t)} = 38{,}55 \cdot 1{,}1^{t}. \end{aligned}$$

Il numeratore della durata media finanziaria del Portafogli 1 è

$$(10-t) \cdot 100 \cdot 1{,}1^{-(10-t)} = 10 \cdot 100 \cdot 1{,}1^{-(10-t)} - t \cdot 100 \cdot 1{,}1^{-(10-t)}.$$

Il numeratore della durata media finanziaria del Portafogli 2 è

$$\begin{aligned} &(5-t) \cdot 41{,}39 \cdot 1{,}1^{-(5-t)} + (20-t) \cdot 86{,}46 \cdot 1{,}1^{-(20-t)} \\ &= 5 \cdot 41{,}39 \cdot 1{,}1^{-(5-t)} \\ &\quad + 20 \cdot 86{,}46 \cdot 1{,}1^{-(20-t)} - t \cdot \left(41{,}39 \cdot 1{,}1^{-(5-t)} + 86{,}46 \cdot 1{,}1^{-(20-t)}\right). \end{aligned}$$

Poiché al tempo 0 le durate medie finanziarie coincidevano, deve valere

$$10 \cdot 100 \cdot 1{,}1^{-10} = 5 \cdot 41{,}39 \cdot 1{,}1^{-5} + 20 \cdot 86{,}46 \cdot 1{,}1^{-20}$$

e perciò

$$10 \cdot 100 \cdot 1{,}1^{-10} \cdot 1{,}1^{t} = \left(5 \cdot 41{,}39 \cdot 1{,}1^{-5} + 20 \cdot 86{,}46 \cdot 1{,}1^{-20}\right) \cdot 1{,}1^{t}.$$

Inoltre, dato che al tempo 0 anche i valori attuali coincidevano, abbiamo

$$100 \cdot 1{,}1^{-10} = 41{,}39 \cdot 1{,}1^{-5} + 86{,}46 \cdot 1{,}1^{-20}$$

e perciò

$$100 \cdot 1{,}1^{-10} \cdot 1{,}1^{t} = \left(41{,}39 \cdot 1{,}1^{-5} + 86{,}46 \cdot 1{,}1^{-20}\right) \cdot 1{,}1^{t}.$$

Di conseguenza, a parità di rendimento, i numeratori delle durate medie finanziarie dei due portafogli sono uguali per ogni tempo t anteriore ai 5 anni, e altrettanto si può dire delle durate medie finanziarie.

Se all'epoca 1 il tasso di rendimento alla scadenza è pari all'11%, i valori attuali e le durate medie finanziarie al tempo 1 dei due portafogli sono:

Portafogli 1: $V_{(1)}(1) = 100 \cdot 1{,}11^{-9} = 39{,}09$ € e $D_{(1)} = 9$ anni.

Portafogli 2: $V_{(2)}(1) = 41{,}39 \cdot 1{,}11^{-4} + 86{,}46 \cdot 1{,}11^{-19} = 39{,}17$ € e

$$D_{(2)} = \frac{4 \cdot 41{,}39 \cdot 1{,}11^{-4} + 19 \cdot 86{,}46 \cdot 1{,}11^{-19}}{39{,}17} = 8{,}56 \text{ anni}$$

e dunque non c'è più allineamento.

Se non c'è variazione di tasso, i valori attuali e le durate medie finanziarie al tempo 5 dei due portafogli sono:

Portafogli 1: $V_{(1)}(5) = 100 \cdot 1{,}11^{-5} = 62{,}09$ € e $D_{(1)} = 5$ anni.

Portafogli 2: $V_{(2)}(5) = 41{,}39 + 86{,}46 \cdot 1{,}11^{-15} = 62{,}09$ € e

$D_{(2)} = 15$ anni.

Il disallineamento, in questo caso, riguarda la durata media finanziaria ed è una conseguenza dell'essere giunti a una delle scadenze di pagamento (circostanza che modifica la sequenza dei flussi futuri).

A livello più generale, per una sequenza di più pagamenti la durata media finanziaria diminuisce al crescere del tasso di rendimento alla scadenza. A parità di rendimento, la durata media finanziaria ha un andamento decrescente nel tempo, ma registra una discontinuità (con un salto verso l'alto) in corrispondenza delle epoche di pagamento dei flussi di cassa.

7.4.7 Una generalizzazione dell'immunizzazione di Redington

Supponiamo che i flussi di cassa annuali delle attività siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e i flussi di cassa annuali delle passività siano $L_1, L_2, \ldots, L_n$; consideriamo, inoltre, un modello a tempo continuo per la struttura per scadenze e supponiamo che l'intensità istantanea di interesse al tempo t sia δ_t. A seguito di un improvviso *shock* dei tassi di interesse, l'intensità istantanea di interesse diventa δ_t^*. Definiamo la funzione $g(t) = \frac{e^{-t \cdot \delta_t^*}}{e^{-t \cdot \delta_t}} - 1$. La variazione del valore attuale delle attività al netto delle passività (alla quale, in breve, ci riferiremo come *surplus*) è:

$$S^* - S = \sum_{t>0} (A_t - L_t) \cdot (e^{-t \cdot \delta_t^*} - e^{-t \cdot \delta_t}) = \sum_{t>0} (A_t - L_t) \cdot e^{-t \cdot \delta_t} \cdot g(t).$$

Usando lo sviluppo in serie di Taylor centrato in 0 e arrestato al secondo ordine e il teorema della media ponderata per gli integrali applicato alla funzione $g(t)$, si può dimostrare che

$$\begin{aligned} S^* - S = g(0) \cdot \sum_{t>0} (A_t - L_t) \cdot \mathrm{e}^{-t \cdot \delta_t} + g'(0) \cdot \sum_{t>0} t \cdot (A_t - L_t) \cdot \mathrm{e}^{-t \cdot \delta_t} \\ + \frac{1}{2} \cdot g''(c) \cdot \sum_{t>0} t^2 \cdot (A_t - L_t) \cdot \mathrm{e}^{-t \cdot \delta_t} \end{aligned}$$

per qualche valore di c compreso tra 0 e n. Il valore di c dipende dalla natura dello *shock* dei tassi di interesse. Se con la struttura per scadenze corrente (prima dello *shock*) i valori attuali dei flussi di cassa delle attività e passività sono allineati, così come il primo "momento" (cioè la derivata prima) dei loro valori attuali, allora $\sum_{t>0}(A_t - L_t) \cdot \mathrm{e}^{-\delta_t^*} = \sum_{t>0} t \cdot (A_t - L_t) \cdot \mathrm{e}^{-\delta_t^*} = 0$. Si noti che, essendo $g(0) = 0$, la prima condizione dell'immunizzazione non è necessaria e, in generale, l'allineamento dei primi momenti è analogo (ma non identico) all'allineamento della durata media finanziaria per spostamenti paralleli dei tassi di interesse effettivi annuali. Se lo *shock* dei tassi di interesse consiste in uno spostamento parallelo della struttura per scadenze, per esempio

$$\delta_t^* = \delta_t + \varepsilon,$$

abbiamo

$$g(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t \cdot \delta_t^*}}{\mathrm{e}^{-t \cdot \delta_t}} - 1 = \mathrm{e}^{-t \cdot \varepsilon} - 1$$

e

$$g''(c) = \varepsilon^2 \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot \varepsilon},$$

per cui

$$S^* - S = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{t>0} t^2 \cdot (A_t - L_t) \cdot \mathrm{e}^{-t \cdot \delta_t}.$$

Se è soddisfatto il requisito per l'usuale immunizzazione di Redington (il secondo momento del valore attuale delle attività meno le passività è positivo, $\sum_{t>0} t^2 \cdot (A_t - L_t) \cdot \mathrm{e}^{-t \cdot \delta_t} \geqslant 0$), allora $S^* - S \geqslant 0$ e le attività immunizzano le passività. Questa analisi è valida anche se la struttura per scadenze non è piatta.

7.5 Riepilogo: definizioni e formule

Durata media finanziaria

La durata media finanziaria (DURATION) dei flussi di cassa (tutti in entrata) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in pagamento alle epoche $1, 2, \ldots, n$ è la media aritmetica ponderata delle durate residue dei flussi, pesate con il valore attuale dei flussi stessi:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1 + i_0(t))^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1 + i_0(t))^{-t}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1 + i_0(t))^{-t}}{V(0)},$$

dove $i_0(t)$ rappresenta il tasso a pronti quotato all'epoca corrente (epoca 0) per la scadenza t.

Quando la struttura per scadenze è piatta, $i_0(t) = i$ per ogni t, la durata media finanziaria è anche detta FLAT YIELD DURATION ed è indicata con il simbolo D_{fy}:

$$D_{\text{fy}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i)^{-t}}.$$

La durata media finanziaria per flussi in uscita L_t è definita in modo analogo; nell'espressione della *duration* è sufficiente sostituire ai flussi A_t il valore assoluto dei flussi in uscita, L_t.

Nel seguito, a meno di diversa indicazione, per brevità considereremo una struttura per scadenze piatta.

DURATA MEDIA FINANZIARIA MODIFICATA

La durata media finanziaria modificata (detta a volte VOLATILITÀ) dei flussi di cassa $A_1, A_2, \ldots$, in presenza di una struttura per scadenze piatta, è

$$D^* = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V(0;i)}{V(0;i)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i)^{-t-1}}{V(0;i)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot A_t \cdot (1+i)^{-t-1}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i)^{-t}} = \frac{D_{\text{fy}}}{1+i},$$

dove con $V(0;i)$ indichiamo il valore attuale all'epoca 0 dei flussi, inteso come funzione del tasso d'interesse i.

DURATA MEDIA FINANZIARIA E DURATA MEDIA FINANZIARIA MODIFICATA DI UN'OBBLIGAZIONE SENZA CEDOLE, DI DURATA RESIDUA N ANNI

$$D = n;$$
$$D^* = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} V(0;i)}{V(0;i)} = \frac{n \cdot (1+i)^{-n-1}}{(1+i)^{-n}} = n \cdot (1+i)^{-1}.$$

DURATA MEDIA FINANZIARIA DI UN'OBBLIGAZIONE CON CEDOLE, DI DURATA RESIDUA N ANNI

Consideriamo, per semplicità, cedole annuali. La durata media finanziaria è:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot C \cdot i_{\text{ced}} \cdot (1+i)^{-t} + n \cdot C \cdot (1+i)^{-n}}{\sum_{t=1}^{n} C \cdot i_{\text{ced}} \cdot (1+i)^{-t} + C \cdot (1+i)^{-n}}.$$

Se la struttura non è piatta, l'espressione rappresenta la *flat yield duration* del titolo, calcolata con il rendimento alla scadenza del titolo stesso.

È immediato modificare l'espressione della durata media finanziaria se le cedole sono semestrali anziché annuali.

DURATA MEDIA FINANZIARIA DI UN PORTAFOGLI

Indichiamo con $V(0;i)$ il valore complessivo di un portafogli di m titoli; con $V_{(k)}(0;i)$, invece, indichiamo il valore del k-esimo titolo nel portafogli. Ovviamente, $V(0;i) = \sum_{k=1}^{m} V_{(k)}(0;i)$. La durata media finanziaria del portafogli è:

$$D = -(1+i)\cdot\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}V(0;i)}{V(0;i)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} -(1+i)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}V_{(k)}(0;i)}{V(0;i)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} D_{(k)}\cdot V_{(k)}(0;i)}{V(0;i)}.$$

La durata media finanziaria del portafogli è pertanto la media aritmetica ponderata delle *duration* dei singoli titoli, con pesi dati dal valore relativo del singolo titolo rispetto al valore complessivo del portafogli.

VARIAZIONE APPROSSIMATA AL PRIMO ORDINE DEL VALORE ATTUALE DI PIÙ FLUSSI DI CASSA

- Per mezzo della *duration* modificata

$$V(0;i+h) - V(0;i) \approx h\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}V(0;i) = -h\cdot V(0;i)\cdot D^*.$$

- Di Macaulay

$$V(0;i+h) \approx V(0;i)\cdot\left(\frac{1+i}{1+i+h}\right)^{D_{\mathrm{fy}}}.$$

IMMUNIZZAZIONE DI REDINGTON

Se i flussi di cassa delle attività sono A_t per $t = 0,1,\ldots,n$ e quelli delle passività sono L_t per $t = 0,1,\ldots,n$, allora le passività sono immunizzate secondo Redington dai flussi finanziari delle attività al tasso di valutazione i_0 se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{array}{lccc}
\text{(i)} & V_A(0;i_0) & = & V_L(0;i_0) \\
\text{(ii)} & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}V_A(0;i)\right|_{i=i_0} & = & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}V_L(0;i_0)\right|_{i=i_0} \\
\text{(iii)} & \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}i^2}V_A(0;i)\right|_{i=i_0} & > & \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}i^2}V_L(0;i)\right|_{i=i_0}
\end{array}$$

CONVESSITÀ

CONVESSITÀ MODIFICATA

$$C^* = \frac{\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}i^2}V_A(0;i)\right|_{i=i_0}}{\left.V_A(0;i)\right|_{i=i_0}} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} t\cdot(t+1)\cdot A_t(1+i_0)^{-t-2}}{\sum\limits_{t=1}^{n} A_t\cdot(1+i_0)^{-t}}.$$

CONVESSITÀ DI MACAULAY

$$C = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2 \cdot A_t \cdot (1+i_0)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i_0)^{-t}}.$$

RELAZIONE TRA CONVESSITÀ MODIFICATA E CONVESSITÀ DI MACAULAY

$$C^* = \frac{C + D_{\text{fy}}}{(1+i)^2}.$$

IMMUNIZZAZIONE COMPLETA

Un portafogli si dice COMPLETAMENTE IMMUNIZZATO se $\sum A_t \cdot (1+i)^{-t} \geqslant \sum L_t \cdot (1+i)^{-t}$ per ogni $i > 0$.

7.6 Esercizi

A meno di indicazioni diverse, i quesiti che riguardano la durata media finanziaria presuppongono una struttura per scadenze piatta.

7.1 Un'obbligazione paga cedole di importo 10 € l'anno, iniziando tra un anno da oggi e ha un valore di rimborso a scadenza (tra 3 anni) pari a 100 €. Il rendimento alla scadenza dell'obbligazione è uguale all'11,8% (effettivo su base annuale). Calcolare la durata media finanziaria dell'obbligazione.

Soluzione

$$D = \frac{10 \cdot \left(1{,}118^{-1} + 2 \cdot 1{,}118^{-2} + 3 \cdot 1{,}118^{-3}\right) + 3 \cdot 100 \cdot 1{,}118^{-3}}{10 \cdot \left(1{,}118^{-1} + 1{,}118^{-2} + 1{,}118^{-3}\right) + 100 \cdot 1{,}118^{-3}} = 2{,}73 \text{ anni.}$$

7.2 Il tasso di rendimento e il tasso cedolare di un'obbligazione con n cedole sono uguali e pari a i. Dimostrare che la durata media finanziaria valutata al tasso di rendimento i è $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$. Determinare la durata media finanziaria di un'obbligazione con 6 cedole e tasso cedolare del 10% per periodo di cedola e tasso di rendimento del 10% per periodo di cedola.

Soluzione La *duration* è:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot C \cdot i \cdot (1+i)^{-n} + n \cdot C \cdot (1+i)^{-n}}{\sum_{t=1}^{n} C \cdot i \cdot (1+i)^{-t} + C \cdot (1+i)^{-n}} \\ &= \frac{C \cdot i \cdot (Ia)_{\overline{n}|i} + n \cdot C \cdot (1+i)^{-n}}{C} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}. \end{aligned}$$

Se $i_{\text{ced}} = i = 0{,}10$ e $n = 6$, allora $D = 4{,}7908$ anni.

7.3 Ripetere i calcoli dell'Esempio 7.2, eventualmente utilizzando un foglio elettronico, impiegando i parametri

$$i_{ced} = 0{,}04,\ 0{,}06,\ 0{,}08; \quad n = 2,\ 10,\ 20,\ 40; \quad i = 0{,}03,\ 0{,}05,\ 0{,}07.$$

Tenendo fissi due dei tre parametri i_{ced}, n, i, stabilire il comportamento della *duration* in funzione del parametro variabile.

Soluzione La Tabella 7.2 riporta la durata media finanziaria per le varie combinazioni di tasso di rendimento, tasso cedolare e durata.

Al variare dei singoli parametri, la *duration* presenta i seguenti andamenti:

- fissati la durata n e il rendimento i, la *duration* è decrescente al crescere del tasso cedolare i_{ced};
- fissati il tasso cedolare i_{ced} e il rendimento i, la *duration* è crescente al crescere della durata n;
- fissati il tasso cedolare i_{ced} e la durata n, la *duration* è decrescente al crescere del rendimento i.

Tabella 7.2 **Andamento della durata media finanziaria (misurata in anni) di un titolo obbligazionario al variare dei parametri (Esercizio 7.3).**

i = 0,03				
i_{ced}	$n = 2$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$
0,04	1,96189	8,50869	14,5725	22,4642
0,06	1,94491	8,06690	13,5336	20,8770
0,08	1,92911	7,73080	12,8493	19,9706
i = 0,05				
i_{ced}	$n = 2$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$
0,04	1,96118	8,35959	13,68074	18,77092
0,06	1,94390	7,89215	12,62186	17,48399
0,08	1,92784	7,54193	11,94719	16,78019
i = 0,07				
i_{ced}	$n = 2$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$
0,04	1,96047	8,20109	12,74225	15,49240
0,06	1,94289	7,70931	11,69336	14,54821
0,08	1,92656	7,34663	11,04637	14,04830

7.4 Alle condizioni di mercato correnti, l'obbligazione 1 ha un prezzo di 88,35 € (per 100 € di valore nominale) e una durata media finanziaria pari a 12,7 anni; l'obbligazione 2 ha un prezzo di 130,49 € (per 100 € di valore nominale) e una durata media finanziaria pari a 14,6 anni. Si costituisce un portafogli mediante la combinazione di un valore nominale C_1 dell'obbligazione 1 e di un valore nominale C_2 dell'obbligazione 2. Il valore nominale complessivo del portafogli è $C_1 + C_2 = 100$ € e la durata media finanziaria del portafogli è 13,5 anni. Determinare il valore del portafogli.

Soluzione La durata media finanziaria del portafogli è così calcolabile:

$$\frac{C_1 \cdot 0{,}8835 \cdot 12{,}7 + C_2 \cdot 1{,}3049 \cdot 14{,}6}{C_1 \cdot 0{,}8835 + C_2 \cdot 1{,}3049} = 13{,}5 \text{ anni.}$$

Inoltre: $C_1 + C_2 = 100$ €. Risolvendo le due equazioni si trova: $C_1 = 67{,}01$ € e $C_2 = 32{,}99$ €. Il valore del portafogli è pertanto: $67{,}01 \cdot 0{,}8835 + 32{,}99 \cdot 1{,}3049 = 102{,}25$ €.

7.5 Indichiamo con $D(i_{\text{ced}}, n, i)$ la durata media finanziaria di un'obbligazione con valore nominale C, n cedole al tasso i_{ced} per periodo di cedola e tasso di rendimento i per periodo. Calcolare:

(a) $\lim_{n\to\infty} D(i_{\text{ced}}, n, i)$,
(b) $\lim_{n\to 1} D(i_{\text{ced}}, n, i)$,
(c) $\lim_{i_{\text{ced}}\to\infty} D(i_{\text{ced}}, n, i)$,
(d) $\lim_{i_{\text{ced}}\to 0} D(i_{\text{ced}}, n, i)$,
(e) $\lim_{i\to\infty} D(i_{\text{ced}}, n, i)$,
(f) $\lim_{i\to 0} D(i_{\text{ced}}, n, i)$.

Soluzione

(a) $1 + \frac{1}{i}$.
(b) 1 (se $n = 1$).
(c) $\frac{(Ia)_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i}}$.
(d) n.
(e) 1.
(f) $\frac{\frac{n\cdot(n+1)\cdot i_{\text{ced}}}{2}+n}{n\cdot i_{\text{ced}}+1}$.

7.6 Supponiamo che la struttura per scadenze sia piatta, con tassi a pronti pari a $i > 0$ per tutte le scadenze. Un investitore possiede un portafogli di due obbligazioni, una delle quali ha valore attuale 50.000 € e durata media finanziaria 8 anni, mentre l'altra ha valore attuale 30.000 € e durata media finanziaria 6 anni.

L'investitore desidera ribilanciare il proprio portafogli, in modo che la durata media finanziaria del portafogli sia 7 anni. Il ribilanciamento sarà ottenuto vendendo parte di un'obbligazione e utilizzando i proventi per acquistare una quota ulteriore dell'altra obbligazione. Il valore complessivo del portafogli dopo il ribilanciamento sarà ancora 80.000 €. Quale delle seguenti azioni va intrapresa per ribilanciare il portafogli?

(a) Non è necessaria alcuna azione perché il portafogli ha già una durata media finanziaria di 7 anni.
(b) Vendere 20.000 € dell'obbligazione con durata media finanziaria 6 anni e acquistare 20.000 € di quella con durata media finanziaria 8 anni.
(c) Vendere 10.000 € dell'obbligazione con durata media finanziaria 6 anni e acquistare 10.000 € di quella con durata media finanziaria 8 anni.
(d) Vendere 20.000 € dell'obbligazione con durata media finanziaria 8 anni e acquistare 20.000 € di quella con durata media finanziaria 6 anni.
(e) Vendere 10.000 € dell'obbligazione con durata media finanziaria 8 anni e acquistare 10.000 € di quella con durata media finanziaria 6 anni.

Soluzione Data la composizione iniziale del portafogli, la sua *duration* è $\frac{8\cdot 50.000+6\cdot 30.000}{80.000} = 7{,}25$ anni. Per portarla a 7 anni, occorre vendere x € di titolo a 8 anni e acquistare x € di titolo a 6 anni. Dunque, tra quelle elencate, le uniche azioni da considerare sono la (d) e la (e). La risposta si può trovare risolvendo l'equazione: $\frac{8\cdot(50.000-x)+6\cdot(30.000+x)}{80.000} = 7$. Si trova $x = 10.000$ €, dunque l'azione da eseguire tra quelle elencate è la (e).

7.7 Supponiamo che la struttura per scadenze sia piatta, con tassi a pronti pari a $i > 0$ per tutte le scadenze. Si devono confrontare due obbligazioni aventi lo stesso valore nominale e lo stesso numero residuo ($n \geqslant 2$) di cedole annuali. L'obbligazione 1 ha tasso cedolare $i_{\text{ced}(1)}$ (per anno) e l'obbligazione 2 ha tasso cedolare $i_{\text{ced}(2)}$ per anno. Se $i_{\text{ced}(2)} > i_{\text{ced}(1)} \geqslant 0$, quale delle seguenti affermazioni sui prezzi $V_{(1)}(0)$ e $V_{(2)}(0)$ delle obbligazioni e sulle durate medie finanziarie $D_{(1)}$ e $D_{(2)}$ è vera?

(a) $V_{(1)}(0) > V_{(2)}(0)$ e $D_{(1)} > D_{(2)}$;
(b) $V_{(1)}(0) < V_{(2)}(0)$ e $D_{(1)} > D_{(2)}$;
(c) $V_{(1)}(0) > V_{(2)}(0)$ e $D_{(1)} < D_{(2)}$;
(d) $V_{(1)}(0) < V_{(2)}(0)$ e $D_{(1)} < D_{(2)}$;
(e) Nessuna delle precedenti risposte.

Soluzione Interpretiamo prezzo e *duration* di un titolo obbligazionario come funzioni del tasso cedolare i_{ced}. Il prezzo, $V(0) = C \cdot i_{\text{ced}} \cdot a_{\overline{n}|i} + C \cdot (1+i)^{-n}$ è evidentemente una funzione crescente del tasso cedolare; dunque nel confronto tra i due titoli risulterà $V_{(1)}(0) < V_{(2)}(0)$. Per quanto riguarda la *duration*, $D = \frac{i_{\text{ced}} \cdot (Ia)_{\overline{n}|i} + n \cdot (1+i)^{-n}}{i_{\text{ced}} \cdot a_{\overline{n}|i} + (1+i)^{-n}}$, troviamo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i_{\text{ced}}} D = \frac{(1+i)^{-n} \cdot \left[(Ia)_{\overline{n}|i} - n \cdot a_{\overline{n}|i}\right]}{\left[(1+i)^{-n} + i_{\text{ced}} \cdot a_{\overline{n}|i}\right]^2} < 0.$$

Pertanto nel confronto tra i due titoli risulterà $D_{(1)} > D_{(2)}$ e quindi la risposta corretta è la (b).

7.8 Utilizzando l'obbligazione dell'Esempio 7.3, che ha un tasso cedolare del 5% e un tasso di rendimento del 10%, calcolare i nuovi prezzi esatti mediante le relazioni (7.6) e (7.7) e i nuovi prezzi approssimati nel caso in cui il tasso di rendimento diventi uguale a (i) 9,99% e (ii) 9,0%.

Soluzione

(i) Il prezzo esatto è 69,3254 €. Il prezzo approssimato con la relazione (7.6) è $69{,}2772 + \frac{7{,}661}{1{,}1} \cdot 0{,}0001 \cdot 69{,}2772 = 69{,}3254$ €. Il prezzo approssimato con la relazione (7.7) è $69{,}772 \cdot \left(\frac{1{,}1}{1{,}0999}\right)^{7{,}661} = 69{,}3254$ €.

(ii) Il prezzo esatto è 74,3294 €. Il prezzo approssimato con la relazione (7.6) è 74,1020 €, mentre quello approssimato con la relazione (7.7) è 74,2997 €.

7.9 Si hanno esborsi programmati di importo 1 € ciascuno al termine dei periodi 1 e 2 anni. Per generare le entrate atte a coprire queste passività sono disponibili tre titoli:

(i) un'obbligazione con scadenza alla fine del periodo 1 e tasso cedolare dell'1% per periodo, valutata al rendimento periodico del 14%;
(ii) un'obbligazione con scadenza alla fine del periodo 2 e tasso cedolare del 2% per periodo, valutata al rendimento periodico del 15%;
(iii) un'obbligazione con scadenza alla fine del periodo 2 e tasso cedolare del 20% per periodo, valutata al rendimento periodico del 14,95%.

Determinare il costo del portafogli che permette di allineare esattamente le attività alle passività utilizzando

(a) solo le obbligazioni (i) e (ii);
(b) solo le obbligazioni (i) e (iii).

Soluzione

(a) Supponiamo di acquistare x_1 unità del titolo 1 e x_2 unità del titolo 2. I flussi in entrata sono $A_1 = 1{,}01 \cdot x_1 + 0{,}02 \cdot x_2$ all'epoca 1 e $A_2 = 1{,}02 \cdot x_2$ all'epoca 2. Dovendo risultare $A_1 = 1$ € e $A_2 = 1$ €, si trova $x_2 = \frac{1}{1{,}02} = 0{,}980392$ e $x_1 = \frac{1-0{,}02 \cdot 0{,}980392}{1{,}01} = 0{,}970685$. Il costo di questa soluzione è: $0{,}970685 \cdot \frac{1{,}01}{1{,}14} + 0{,}980392 \cdot \left(\frac{0{,}02}{1{,}15} + \frac{1{,}02}{1{,}15^2}\right) = 1{,}633187$ €.

(b) Supponiamo di acquistare x_1 unità del titolo 1 e x_3 unità del titolo 3. I flussi in entrata sono $A_1 = 1{,}01 \cdot x_1 + 0{,}2 \cdot x_3$ all'epoca 1 e $A_2 = 1{,}2 \cdot x_3$ all'epoca 2. Si trova $x_3 = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}833333$ e $x_1 = \frac{1-0{,}2 \cdot 0{,}833333}{1{,}01} = 0{,}825083$. Il costo di questa soluzione è: $0{,}825083 \cdot \frac{1{,}01}{1{,}14} + 0{,}833333 \cdot \left(\frac{0{,}2}{1{,}1495} + \frac{1{,}2}{1{,}1495^2}\right) = 1{,}632786$ €.

Si noti che, tra le due combinazioni, quella di costo minimo è la (b), che non usa il titolo con il rendimento massimo.

7.10 Volendo allineare le attività e le passività dell'Esempio 7.5 in modo che $V_A(0;0{,}10) = V_L(0;0{,}10)$, per costituire i flussi finanziari delle attività necessari si acquista una rendita posticipata con n rate annuali costanti di importo X ciascuna. Per ogni valore $n = 5, 15, 50, 100$, determinare l'importo X richiesto e calcolare sia $\sum t \cdot A_t \cdot 1{,}10^{-t}$ sia $\sum t^2 \cdot A_t \cdot 1{,}10^{-t}$. Quale valore di n permette di avvicinarsi maggiormente all'uguaglianza $\sum t \cdot A_t \cdot 1{,}10^{-t} = \sum t \cdot L_t \cdot 1{,}10^{-t}$? Ricavare il valore esatto di n per cui $\sum t \cdot A_t \cdot 1{,}10^{-t} = \sum t \cdot L_t \cdot 1{,}10^{-t}$. Stabilire se tale valore garantisce l'immunizzazione di Redington del portafogli.

Soluzione Il valore attuale delle passività al tasso del 10% è $V_L(0;0{,}1) = 300.000$ €, mentre il valore attuale delle attività è $X \cdot a_{\overline{n}|0.10}$. Affinché i valori attuali coincidano, se la rendita ha durata $n = 5$, è richiesto un importo $X = 79.139$ €; se $n = 15$, $X = 39.442$ €; se $n = 50$, $X = 30.257$ €; se $n = 100$, $X = 30.002$ €. Nella Tabella 7.3 sono riportati i valori di $\sum t \cdot A_t \cdot 1{,}10^{-t}$ e $\sum t^2 \cdot A_t \cdot 1{,}10^{-t}$ corrispondenti alle varie durate n.

Tabella 7.3 **Quantità per valutare l'allineamento attività-passività nell'Esercizio 7.10.**

n	$\sum t \cdot A_t \cdot 1{,}10^{-t}$	$\sum t^2 \cdot A_t \cdot 1{,}10^{-t}$
5	843.048	2.962.020
15	1.833.680	16.896.161
50	3.171.124	60.020.920
100	3.297.823	69.034.390

Dall'Esempio 7.7 sappiamo che $\sum t \cdot L_t \cdot 1{,}1^{-t} = 2.262.077$. Il valore di n che consente di avvicinarsi maggiormente all'allineamento tra attività e passività è $n = 15$. L'allineamento perfetto si ha per $n = 20$, che non è tra le scelte offerte.

7.11 Per ciascuna delle passività dell'Esempio 7.5, calcolare i valori di A_0 e A_{15} al tasso $i = 0{,}10$, utilizzando il metodo dell'immunizzazione completa descritto nella Sezione 7.3.2. Determinare la somma di tutti i valori A_0 e di tutti i valori A_{15} separatamente e verificare che si ottengono gli stessi incassi complessivi trovati nella parte (a) dell'Esempio 7.7.

Soluzione Consideriamo, per esempio, la passività di 30.000 € all'epoca 1. Dobbiamo avere $A_0 + A_{15} \cdot 1{,}1^{-15} = 30.000 \cdot 1{,}1^{-1} = 27.272{,}73$ € e $15 \cdot A_{15} \cdot 1{,}1^{-15} = 1 \cdot 30.000 \cdot 1{,}1^{-1}$. Si trova $A_0 = 25.454{,}55$ € e $A_{15} = 7.595{,}00$ €. Si procede in modo simile per le passività relative alle altre epoche.

7.12 Si ha una passività di importo 1 € da coprire al tempo 10. Si fa un tentativo per immunizzarla completamente al tasso $i_0 = 0{,}10$ usando due ZCB di valore nominale A_{t_1} e A_{t_2}, in scadenza rispettivamente dopo t_1 e t_2 anni. Per ciascuno dei seguenti casi, ricavare le due grandezze incognite tra $A_{t_1}, A_{t_2}, t_1, t_2$, note le altre due.

(a) $t_1 = 5, t_2 = 15$;
(b) (i) $t_1 = 5, A_{t_1} = 0{,}40$ €;
  (ii) $t_1 = 5, A_{t_1} = 0{,}70$ € (nessuna soluzione per $t_2 \geqslant 10$);
(c) (i) $t_1 = 5, A_{t_2} = 0{,}90$ € (due soluzioni per $t_2 \geqslant 10$);
  (ii) $t_1 = 5, A_{t_2} = 1{,}5$ € (una soluzione per $t_2 \geqslant 10$);
  (iii) $t_1 = 5, A_{t_2} = 0{,}75$ € (nessuna soluzione per $t_2 \geqslant 10$);

(d) (i) $t_2 = 15, A_{t_1} = 0{,}80$ €;
(ii) $t_2 = 15, A_{t_1} = 1{,}1$ € (nessuna soluzione per $A_{t_2} \geqslant 0, 0 \leqslant t_1 \leqslant 10$);
(iii) $t_2 = 15, A_{t_1} = 0{,}01$ € (nessuna soluzione per $0 \leqslant t_1 \leqslant 10$);
(e) $A_{t_1} = 0{,}40$ €, $A_{t_2} = 0{,}90$ €.

Soluzione

(a) $A_5 \cdot 1{,}1^{-5} + A_{15} \cdot 1{,}1^{-15} = 1{,}1^{-10} = 0{,}385543$ € e $5 \cdot A_5 \cdot 1{,}1^{-5} + 15 \cdot A_{15} \cdot 1{,}1^{-15} = 10 \cdot 1{,}1^{-10} = 3{,}855433$. Si trova: $A_{15} = 0{,}805255$ € e $A_5 = 0{,}310461$ €.
(b) (i) $0{,}4 \cdot 1{,}1^{-5} + A_{t_2} \cdot 1{,}1^{-t_2} = 0{,}385543$ € e $2 \cdot 1{,}1^{-5} + t_2 \cdot A_{t_2} \cdot 1{,}1^{-t_2} = 3{,}855433$. Si trova: $t_2 = 19{,}053$ anni e $A_{t_2} = 0{,}8432$ €.
(ii) $0{,}7 \cdot 1{,}1^{-5} + A_{t_2} \cdot 1{,}1^{-t_2} = 0{,}385543$ € e $3{,}5 \cdot 1{,}1^{-5} + t_2 \cdot A_{t_2} \cdot 1{,}1^{-t_2} = 3{,}855433$. Si trova: $A_{t_2}, t_2 < 0$.
(c) (i) $t_2 = 21{,}28$ anni e $A_5 = 0{,}4305$ € oppure $t_2 = 11{,}27$ anni e $A_5 = 0{,}1258$ €.
(ii) $t_2 = 31{,}92$ anni e $A_5 = 0{,}5056$ €.
(iii) Nessuna soluzione.
(d) (i) $t_1 = 9{,}21$ anni e $A_{t_2} = 0{,}2213$ €.
(ii) Nessuna soluzione con $t_1 \leq 10$ anni.
(iii) Nessuna soluzione.
(e) $t_1 = 4{,}74$ anni e $t_2 = 20{,}223$ anni.

7.13 Un'istituzione finanziaria ha rilevato gli affari di un'altra istituzione. Una delle passività acquisite è una polizza che impegna l'istituzione a pagare 1.000.000 € al detentore della polizza stessa esattamente tra 12 anni e che richiede il versamento, da parte del detentore della polizza, di un premio annuale pari a 15.000 € all'inizio di ciascuno dei prossimi 12 anni. A copertura dell'impegno, l'istituzione finanziaria vuole sottoscrivere un singolo pagamento in entrata A_{t_0} da incassare all'epoca t_0 in modo che, assieme ai premi pagati dal detentore della polizza, il rimborso della polizza stessa sia completamente immunizzato al tasso di interesse corrente del 10%. Calcolare A_{t_0} e t_0.

Soluzione Devono essere verificate le seguenti condizioni:

$$A_{t_0} \cdot 1{,}1^{-t_0} + 15.000 \cdot \ddot{a}_{\overline{12}|0.1} = 1.000.000 \cdot 1{,}1^{-12};$$
$$t_0 \cdot A_{t_0} \cdot 1{,}1^{-t_0} + 15.000 \cdot (Ia)_{\overline{11}|0.1} = 12 \cdot 1.000.000 \cdot 1{,}1^{-12}.$$

Si trova $t_0 = 16{,}15$ anni e $A_{t_0} = 961.145$ €.

7.14 Si hanno passività di importo 100 € l'una da coprire tra 2, 4 e 6 anni da oggi. I flussi di cassa delle attività consistono in un importo A_1 tra 1 anno e in un importo A_5 tra 5 anni. Per tutti i pagamenti, il tasso di rendimento è il 10%. Si cerca di immunizzare il flusso di cassa delle passività con quello delle attività allineando il valore attuale e la durata media finanziaria.

(a) Determinare A_1 e A_5.
(b) Stabilire se sono soddisfatte o meno le condizioni per l'immunizzazione di Redington.

Soluzione

(a) Condizione sul valore attuale: $A_1 \cdot 1{,}1^{-1} + A_5 \cdot 1{,}1^{-5} = 100 \cdot \left(1{,}1^{-2} + 1{,}1^{-4} + 1{,}1^{-6}\right)$.
Condizione sulla durata media finanziaria: $A_1 \cdot 1{,}1^{-1} + 5 \cdot A_5 \cdot 1{,}1^{-5} = 100 \cdot \left(2 \cdot 1{,}1^{-2} + 4 \cdot 1{,}1^{-4} + 6 \cdot 1{,}1^{-6}\right)$.
Si trova $A_1 = 71{,}44$ € e $A_5 = 229{,}41$ €.

(b) Siccome $2 \cdot A_1 \cdot 1{,}1^{-1} + 6 \cdot 5 \cdot A_5 \cdot 1{,}1^{-5} = 4.403$, mentre $100 \cdot \left(2 \cdot 1 \cdot 1{,}1^{-2} + 5 \cdot 4 \cdot 1{,}1^{-4} + 6 \cdot 5 \cdot 1{,}1^{-6}\right) = 3.225$, sono soddisfatte le condizioni per l'immunizzazione di Redington.

7.15 Supporre che la struttura per scadenze sia piatta con rendimento $i = 0{,}08$ per tutte le scadenze. Supporre che un'azienda abbia passività costituite da 10 pagamenti annuali di importo 1.000 € ciascuno, che iniziano tra un anno. Si sa che:

$$\sum_{t=1}^{10} 1{,}08^{-t} = 6{,}7101, \quad \sum_{t=1}^{10} t \cdot 1{,}08^{-t} = 32{,}6869, \quad \sum_{t=1}^{10} t^2 \cdot 1{,}08^{-t} = 212{,}9687.$$

(a) L'azienda vuole investire in attività allo scopo di immunizzare le passività rispetto a piccole variazioni di i. Le attività consisteranno in denaro liquido oggi, al tempo 0, e in uno ZCB con scadenza al tempo 10. Il valore attuale e la durata media finanziaria delle attività devono essere uguali al valore attuale e alla durata media finanziaria delle passività. Stabilire qual è l'ammontare del portafogli che dev'essere costituito da contanti (approssimare agli euro).

(b) Supporre che alle passività esistenti venga aggiunta una passività di 5.000 € da coprire tra 11 anni. Si punta a immunizzare le passività usando lo stesso tipo di attività della parte (a). Quale delle seguenti affermazioni riguardo all'importo aggiuntivo y necessario al tempo 10 è corretta?

(i) $y \leqslant 5.000$ € e le attività immunizzano le passività (per piccole variazioni di i);

(ii) $y \leqslant 5.000$ € e le attività non immunizzano le passività (per piccole variazioni di i);

(iii) $y > 5.000$ € e le attività immunizzano le passività (per piccole variazioni di i);

(iv) $y > 5.000$ € e le attività non immunizzano le passività (per piccole variazioni di i);

(v) $y = 0$ € e le attività non immunizzano le passività (per piccole variazioni di i)

Soluzione

(a) Sia X l'importo da detenere in liquidità e Y il valore nominale dello ZCB. Deve risultare $X + Y \cdot 1{,}08^{-10} = 6.710{,}10$ € e $10 \cdot Y \cdot 1{,}08^{-10} = 32.686{,}90$, da cui si ricava $Y = 7.057$ € e $X = 3.441$ €.

(b) Sia x l'importo aggiuntivo di liquidità richiesto. Deve risultare $x + y \cdot 1{,}08^{-10} = 5.000 \cdot 1{,}08^{-11}$ e $10 \cdot y \cdot 1{,}08^{-10} = 11 \cdot 5.000 \cdot 1{,}08^{-11}$, da cui si ricava $y = 5.093$ € e $x = -214$ €.
Risulta allora $100 \cdot (7.057 + 5.093) \cdot 1{,}08^{-10} = 562.780$, che è più elevato di $\sum_{t=1}^{11} t^2 \cdot L_t \cdot 1{,}08^{-t} = \sum_{t=1}^{10} t^2 \cdot L_t \cdot 1{,}08^{-t} + 121 \cdot L_{11} \cdot 1{,}08^{-11} = 212.969 + 259.474 = 472.443$. Pertanto, al tasso $i = 0{,}08$ le attività immunizzano le passività, che è quanto affermato nel punto (iii).

7.16 L'*asset* 1 è costituito da tre pagamenti: A_5 tra 5 periodi, A_{10} tra 10 periodi e A_{15} tra 15 periodi. L'*asset* 2 è costituito da 2 pagamenti: a_6 tra 6 periodi e a_{12} tra 12 periodi. Oggi, al tasso di rendimento i per periodo per tutte le scadenze, i due gruppi di flussi di cassa hanno lo stesso valore attuale e la stessa durata media finanziaria. Supporre che tra un periodo da oggi il rendimento sia ancora i per tutte le scadenze. Dimostrare che:

(a) i due gruppi di flussi di cassa avranno lo stesso valore attuale;

(b) i due gruppi di flussi di cassa avranno la stessa durata media finanziaria;

(c) la durata media finanziaria tra un periodo sarà esattamente di 1 periodo inferiore rispetto al valore odierno.

Soluzione

(a) Valore attuale del primo *asset*

- all'epoca 0: $V_{(1)}(0) = A_5 \cdot (1+i)^{-5} + A_{10} \cdot (1+i)^{-10} + A_{15} \cdot (1+i)^{-15}$;
- all'epoca 1: $V_{(1)}(1) = A_5 \cdot (1+i)^{-4} + A_{10} \cdot (1+i)^{-9} + A_{15} \cdot (1+i)^{-14} = V_{(1)} \cdot (1+i)$.

In modo simile, per il secondo *asset* si trova $V_{(2)}(1) = V_{(1)}(0) \cdot (1+i)$. Siccome per ipotesi $V_{(1)}(0) = V_{(2)}(0)$, risulta anche $V_{(1)}(1) = V_{(2)}(1)$.

(b) Indichiamo con $D_{(k)}(t)$ la durata media finanziaria del titolo k calcolata, a parità di rendimento, all'epoca t.
Durata media finanziaria del primo *asset*:

- all'epoca 0: $D_{(1)}(0) = \frac{5 \cdot A_5 \cdot (1+i)^{-5} + 10 \cdot A_{10} \cdot (1+i)^{-10} + 15 \cdot A_{15} \cdot (1+i)^{-15}}{V_{(1)}(0)}$;
- all'epoca 1:

$$\begin{aligned} D_{(1)}(1) &= \frac{4 \cdot A_5 \cdot (1+i)^{-4} + 9 \cdot A_{10} \cdot (1+i)^{-9} + 14 \cdot A_{15} \cdot (1+i)^{-14}}{V_{(1)}(1)} \\ &= \frac{4 \cdot A_5 \cdot (1+i)^{-5} + 9 \cdot A_{10} \cdot (1+i)^{-10} + 14 \cdot A_{15} \cdot (1+i)^{-15}}{V_{(1)}(0)} \\ &= D_{(1)}(0) - 1. \end{aligned}$$

In modo analogo, per il secondo *asset* si trova $D_{(2)}(1) = D_{(2)}(0) - 1$. Siccome per ipotesi $D_{(1)}(0) = D_{(2)}(0)$, risulta anche $D_{(1)}(1) = D_{(2)}(1)$.

(c) Già verificato nel punto precedente.

Sitografia

Banca Centrale Europea
https://www.ecb.europa.eu

Banca d'Italia
https://www.bancaditalia.it/

Bank of Canada:
www.bankofcanada.ca

Bank of Montreal:
http://www4.bmo.com

Bloomberg LP:
http://www.bloomberg.com/markets/rates/index.html

Financial Calculators from KJE Computer Solutions:
www.dinkytown.net/java/SimpleLoan.html

J. Huston McCulloch, Department of Economics of Ohio State University:
http://economics.sbs.ohio-state.edu/jhm/ts/ts.html

Ministero dell'Economia e delle Finanze
http://www.mef.gov.it/

U.S. Treasury, Bureau of the Public Debt:
http://www.treasurydirect.gov/

Western and Southern Financial Corp:
www.westernsouthernlife.com/