LABORATORIO DI MATEMATICA FINANZIARIA

Elisabetta Michetti

IMMUNIZZAZIONE

Mod 3

IMMUNIZZAZIONE CLASSICA

IMMUNIZZAZIONE: immunizzare un portafoglio vuol dire determinare una strategia che faccia sì che il valore del portafoglio non diminuisca a seguito di variazioni nei tassi di mercato, cioè ci si vuole porre al riparo rispetto al rischio di tasso

PROBLEMA: dato un titolo (es BTP) o un portafoglio di titoli (es un portafoglio composto da ZCB e/o BTP) allora è possibile considerare l'insieme dei flussi (positivi) da questo generati come segue: $OF=\{(R_1,R_2,R_3,\ldots,R_n);(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n)\}$

Dato un tasso di valutazione i* (normalmente lo yield to maturity), allora abbiamo definito le due seguenti grandezze:

Il prezzo del flusso (o valore del flusso al tempo zero)

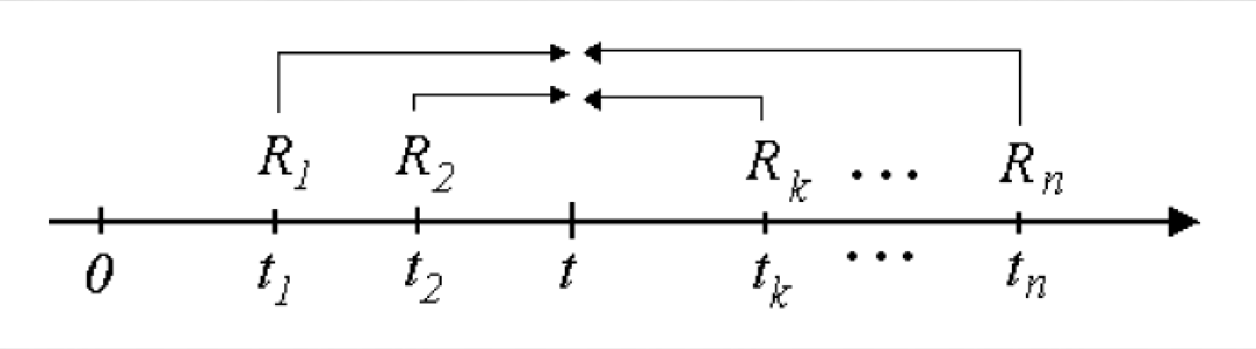
$$V_0(i^*) = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i^*)^{-t_k}$$

La duration del flusso (calcolata al tempo zero)

$$D_0(i^*) = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+i^*)^{-t_k}}{V_0(i^*)}$$

OSSERVAZIONE: a partire dal valore del flusso al tempo zero e dalla duration calcolata al tempo zero è possibile considerare **(1) il valore del flusso in un diverso istante t**, **(2) la duration associata al flusso in un certo istante t**.

In tal caso basta considerare che le poste con scadenza successiva a t vanno attualizzate mentre quelle con scadenza precedente a t vanno capitalizzate!



(1) il valore del flusso in un istante t

$$V_t(i^*) = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i^*)^{t-t_k} = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i^*)^{-t_k} (1+i^*)^t = V_0(i^*)(1+i^*)^t$$

Lo si può ricavare dal valore attuale

(2) La duration del flusso in un istante t

$$D_t(i^*) = \frac{\sum_{k=1}^{n} (t_k - t) R_k (1+i^*)^{-(t_k - t)}}{V_t(i^*)}$$

Si osservi che le scadenze che vengono ponderate possono avere segno positivo o negativo, a seconda che riguardino flussi pagati prima (-) o dopo (+) il tempo t

La si può **ricavare dalla duration al tempo zero**? Si può verificare agevolmente che

$$D_t(i^*) = D_0(i^*) - \mathrm{t}$$

Per cui nota la duration al tempo 0 si può ricavare la duration al tempo t semplicemente sottraendo t!

Si osservi che:
- Se la duration è successiva a t allora questo indicatore è positivo
- Se la duration è precedente a t allora questo indicatore è negativo

E, analogamente alla duration calcolata al tempo zero, quella al tempo t **stima la sensibilità di variazioni nel valore del prezzo al tempo t rispetto a variazioni del tasso**

Infatti la derivata del prezzo al tempo t rispetto al tasso si ricava come segue:

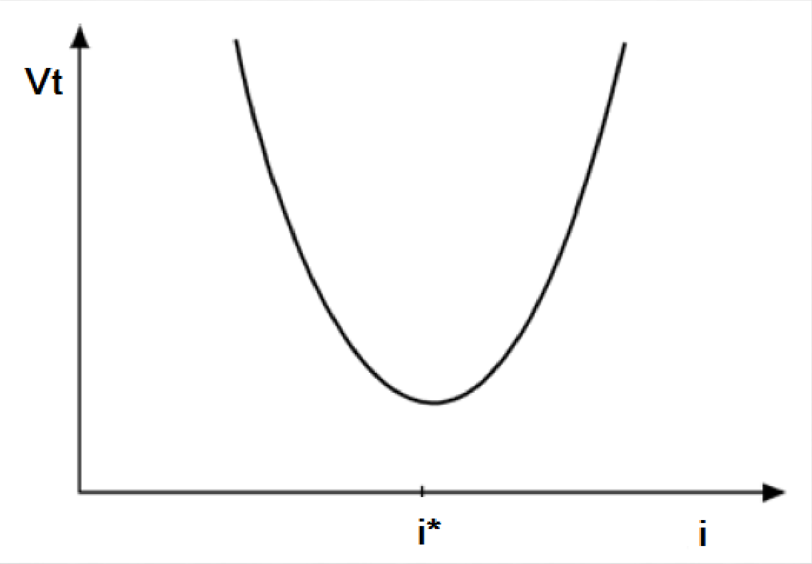
$$V_t'(i^*) = \sum_{k=1}^{n} (t - t_k) R_k (1 + i^*)^{t - t_k - 1} = -\frac{1}{1 + i^*} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t) R_k (1 + i^*)^{-(t_k - t)} =$$

$$= -\frac{1}{1 + i^*} D_t(i^*) V_t(i^*) = -\frac{1}{1 + i^*} (D_0(i^*) - \mathrm{t}) V_t(i^*)$$

NB: considerando il prezzo al tempo t si osserva che la derivata ha segno negativo se la duration al tempo zero è maggiore di t, mentre essa ha segno positivo se la duration al tempo zero è minore di t.

Si ha che la derivata del prezzo al tempo t è zero se e solo se t=D_0(i*) cioè solo nell’istante che coincide con la duration al tempo zero!

NB: se si considera il prezzo al tempo t come funzione del tasso questa NON E' STRETTAMENTE DECRESCENTE poiché la derivata è prima negativa e poi positiva, quindi esiste un valore i* in cui la funzione ammette un minimo globale. **Il minimo globale si raggiunge solo nell'istante t coincidente con la duration D_0.**



Di conseguenza la funzione del prezzo al tempo t, che è positiva, ammette un unico punto di minimo GLOBALE

Al tempo t dato dalla duration ci si trova nel punto di minimo globale pertanto variazioni del tasso sia in aumento che in diminuzione non peggiorano la valutazione del portafoglio.

Infatti per definizione di minimo: $$V_t(i^*) \leq V_t(i^* + \Delta i)$$

Dato un portafoglio e considerato un tasso i*(TIR) è possibile calcolare la duration al tempo zero, sia essa T.

Diremo allora che il portafoglio siffatto è **IMMUNIZZATO AL TEMPO T** (dato dalla duration) in quanto il valore di questo portafoglio al tempo T non può peggiorare per effetto della variazione del tasso (**si noti che nell'immunizzazione classica si considerano shifs additivi nella curva dei tassi a pronti**).

Il portafoglio è quindi al riparo da oscillazioni dovute a variazione nei tassi di mercato.

NB: L'operatore che vuole un portafoglio che non perda valore a seguito di variazioni di i* può scegliere di costituirlo in maniera tale che la duration sia pari al proprio orizzonte temporale.

PORTAFOGLIO AD UNA USCITA

E' necessario generalizzare il discorso al caso in cui si abbiano flussi di riscossioni certe (derivanti ad esempio da investimento in BOT o BTP) e flussi di pagamenti da eseguire. In tal caso l'IMMUNIZZAZIONE richiede che si costruisca un **portafoglio che garantisca la disponibilità necessaria per far fronte ai pagamenti**.

ES: si deve pagare una somma M fra un anno, allora si potrebbe acquistare oggi un BOT di valore nominale M che scade fra un anno. In tal caso il portafoglio è immunizzato.

ES: si deve pagare M1 fra un anno e M2 fra 2 anni…analogamente si possono acquistare due BOT di valore di rimborso M1 e M2 che scadono fra 1 e 2 anni rispettivamente.

Tale strategia permette di ottenere un portafoglio immunizzato: qualunque siano le variazioni di tassi sul mercato al tempo dovuto l'operatore sarà solvibile poiché il BOT è detenuto fino alla scadenza. Questa tecnica è detta **MATURITY MATCHING**

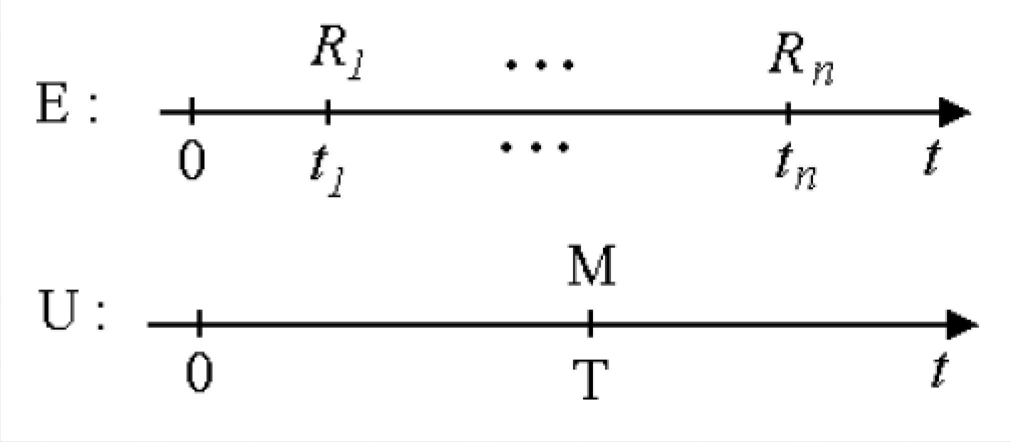
NB: la strategia **MATURITY MATCHING** è **difficilmente attuabile** perché possono non esistere titoli di puro sconto sulle scadenze esatte richieste oppure per gli importi esatti richiesti (gli ZCB sono gli unici che non hanno rischio di tasso se detenuti fino alla scadenza).

Vogliamo quindi determinare una **strategia per immunizzare un portafoglio con entrate o uscite** che permetta di utilizzare titoli di puro sconto o con cedole aventi diverse scadenze.

Consideriamo il caso di una sola uscita.

Presi una serie di titoli si vuole determinare **quanto investire in ciascuno di essi** in modo tale da disporre della somma M da pagare al tempo T. Se il valore del portafoglio al tempo T sarà uguale ad M allora si disporrà al tempo dovuto della somma da pagare ed il portafoglio ad una sola uscita si dirà immunizzato.

Tuttavia **i tassi di mercato possono subire variazioni durante il periodo considerato** e il valore del portafoglio al tempo T potrebbe essere variato rispetto a quanto inizialmente richiesto. Si vuole quindi individuare una strategia che permetta di far fronte al **rischio di tasso (o di mercato)** e cioè che garantisca con certezza una disponibilità almeno pari ad M al tempo T.



CONDIZIONE 1: dato un tasso iniziale, al fine di disporre di una somma M al tempo T **il valore del portafoglio delle entrate al tempo T deve essere pari ad M** (o analogamente il valore attuale delle entrate coincide con il valore attuale delle uscite):

$$V_T(i^*) = M \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i^*)^{T-t_k} = M$$

OSSERVAZIONE: poiché i* è il tasso iniziale, occorre considerare che il portafoglio che genera i flussi in entrata prevederà delle poste che si riscuotono prima del periodo T e che queste vanno reinvestite ad un tasso che nel frattempo può essere diverso da quello iniziale; in maniera analoga al tempo T ci saranno poste non ancora incassate e se il tasso ha subito una variazione il valore al tempo T di tali poste potrebbe essersi ridotto.

Una strategia di immunizzazione richiede che al tempo T il valore del portafoglio delle entrate non sia inferiore ad M anche in presenza di possibili shift additivi nei tassi.

Se però la scadenza T coincide con la duration dell’attivo allora, come spiegato, il valore del portafoglio dell’attivo al tempo T, qualunque sia il nuovo tasso, non sarà sicuramente inferiore ad M, quindi si disporrà con certezza della somma M.

CONDIZIONE 2: al fine di disporre di una somma ALMENO PARI ad M al tempo T **la duration dell’attivo deve essere pari a T** così che qualunque variazione dei tassi non abbia l’effetto di ridurre il valore del portafoglio al tempo T.

$$D_0(i^*) = T \Leftrightarrow V_T'(i^*) = 0$$

Le precedenti considerazioni spiegano un importante risultato dell'immunizzazione classica per flussi con una sola uscita:

TEOREMA DI FISHER E WEIL

Data una struttura per scadenza dei tassi piatta, sia M un importo esigibile al tempo T e sia dato un flusso di riscossioni su uno scadenzario tale che

$$V_T(i^*) = M$$

(cioè al tasso osservato le riscossioni permettono di pagare il debito o il valore attuale del flusso in entrata è uguale al valore attuale dell'uscita: **VINCOLO DI BILANCIO**).

Il portafoglio è IMMUNIZZATO DA SHIFT ADDITIVI se e solo se

$$D_0(i^*) = T\left(\Leftrightarrow V_T\,'(i^*) = 0\right)$$

(cioè la duration del flusso delle entrate coincide col momento in cui si paga la somma M; da notare che tale condizione coincide col richiedere che la derivata prima della funzione del prezzo al tempo T rispetto al tasso sia nulla, quindi la somma necessaria è garantita anche a seguito di variazioni di tasso. Anzi se il tasso varia il portafoglio delle entrate avrà un maggior valore quindi si realizzerà un rendimento positivo: **VINCOLO DI DURATION**).

NELLA PRATICA:
Dovendo far fronte ad una sola uscita al tempo T si vuole costruire un portafoglio di attività che sia immunizzato. Sulla base del Teorema di Fisher e Weil due equazioni devono verificarsi: **un vincolo di bilancio** ed **un vincolo di duration** (per cui si parla di **duration matching**).

Ciò che occorre determinare è quanto detenere nel portafoglio di ciascun titolo: quindi dati 2 titoli occorre determinare due quote, dati n titoli occorre determinare le n-quote detenute di ciascun titolo.

Poiché i vincoli sono 2 in generale basta considerare due titoli: in tal caso le incognite sono 2 (quota del primo titolo e quota del secondo titolo) e le equazioni sono 2. Si tratta di un sistema che quindi nei casi sperati ammette **un'unica soluzione** (se non ci sono titoli ridondanti o fuori mercato).

Nel mercato sono però disponibili molti più titoli (es n titoli) quindi con n titoli il problema ha n-2 gradi di libertà. Questo permette di richiedere vincoli aggiuntivi, ad esempio si può prevedere che siano possibili vendite allo scoperto (quote positive o negative) oppure che tali vendite allo scoperto non siano possibili (quote solo positive), che sia acquistata una quantità minima di un certo titolo, che sia minimizzato il prezzo etc.

ES1 con due titoli:

Un investitore deve pagare 100 euro fra 5 anni; sul mercato sono disponibili titoli di puro sconto che scadono fra 2 anni e fra 8 anni e vige un tasso di mercato pari a 0.075. Si vuole determinare le quote x1 e x2 da acquistare di ciascun titolo (intese come frazione di VN).

Per il teorema visto devono valere le seguenti condizioni (valore dell'attivo al tempo T pari alla posta da pagare e derivata prima del valore dell'attivo al tempo T pari a zero):

$$\begin{cases} V(5) = 100 \\ \frac{d}{dj} V(5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 (1.075)^3 + x_2 (1.075)^{-3} = 100 \\ 3x_1 (1.075)^2 - 3x_2 (1.075)^{-4} = 0 \end{cases}$$

Ed il sistema lineare in 2 equazioni e 2 incognite ammette un'unica soluzione data da:

$$\begin{aligned} x_1 &= 40.2478 \\ x_2 &= 62.1148 \end{aligned}$$

Che sono i valori nominali da acquistare di ciascun titolo (ovviamente nell'ipotesi di titoli infinitamente divisibili).

ES2 con due titoli:

Un investitore deve pagare 100 euro fra 2 anni; nel mercato è disponibile uno ZCB che scade fra un anno e un BTP che scade fra 3 anni e paga cedole annue pari a 10 euro. Il tasso di mercato è del 5%.

Sia x_1 la quota del primo titolo ed x_2 quella del secondo allora il flusso delle entrate è il seguente: $\{(100x_1+10x_2, 10x_2, 110x_2);(1,2,3)\}$ e il **vincolo di bilancio** è il seguente:

$$(100x_1 + 10x_2)1.05 + 10x_2 + 110x_2 1.05^{-1} = 100 \Rightarrow (*)$$
$$\Rightarrow 105x_1 + 125.26x_2 = 100$$

Per il vincolo di duration consideriamo la (*) e deriviamo rispetto al tasso considerando

$$(100x_1 + 10x_2) - 110x_2 1.05^{-2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100x_1 - 89.77x_2 = 0$$

Il sistema da risolvere è 2x2 ed il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero quindi si ha una sola soluzione.

$x_1=0.4089$ e $x_2=0.4555$

Sono le quote da acquistare cioè 40.89 di 45.55 di valore nominale di ciascun titolo.

SISTEMI LINEARI CON MATLAB

MATRICE di m righe e n colonne

- Per memorizzarla basta elencare i suoi elementi **riga per riga**, racchiudendo gli elementi della matrice tra **parentesi quadrate**

- Gli elementi di una riga sono separati da uno **spazio** o da una **virgola**

- Le righe sono separate da un **punto e virgola**

ES. MEMORIZZARE LA SEGUENTE MATRICE: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

```
>> A=[1 3 5; 2 4 6]
```

SI RICORDA CHE:

Data una matrice quadrata è possibile calcolare il suo determinante: con MatLab **det(A)** fornisce il determinante della matrice quadrata A

Data una matrice qualsiasi è possibile calcolare il suo rango: con MatLab **rank(A)** fornisce il rango della matrice A

Un sistema lineare di m equazioni ed n incognite può scriversi in termini matriciali come $A\underline{x}=b$ dove A è la matrice dei coefficienti e b è il vettore (colonna) dei termini noti.

Se A è quadrata allora il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante di A è diverso da zero. In tal caso A è invertibile e la soluzione del sistema la si può ottenere da $A^{-1}b$, ove A^{-1} è la matrice inversa di A. In MatLab il simbolo backslash (\) permette di calcolare $A^{-1}b$ mediante il comando **A\b**. Tale istruzione permette di risolvere agevolmente il sistema lineare.

Se A non è quadrata allora il sistema ammette soluzione (è compatibile) se e solo se il rango di A è uguale al rango della matrice completa [A b], verificata la compatibilità le soluzioni possono essere una sola (se il rango è uguale al numero delle incognite) o infinite (se il rango è minore del numero delle incognite).

Ora possiamo risolvere un sistema lineare in MatLab

Ricordando che un sistema lineare può sempre scriversi in forma matriciale $A\underline{x}=\underline{b}$:

1) Si memorizza la matrice dei coefficienti **A**
2) Si memorizza il vettore dei termini noti **b**
3) Si memorizza la **matrice completa**
4) Si controlla la **compatibilità del sistema** (mediante il rango della matrice completa e di quella incompleta)
5) Se il sistema è compatibile ed ammette un'unica soluzione, la si determina eseguendo **A\b**

NB: Ricordiamo che se un sistema lineare ammette un'**unica** soluzione questa è data da:

$$\boxed{\underline{x} = A^{-1}\underline{b}}$$

L'esempio 1 può essere risolto con MatLab come segue:

```
>> A=[1.075^3 1.075^-3; 3*1.075^2 -3*1.075^-4]

A =

    1.2423    0.8050
    3.4669   -2.2464

>> b=[100;0]

b =

   100
     0

>> det(A)

ans =

   -5.5814

>> A\b

ans =

   40.2480
   62.1148
```

L’esempio 2 può essere risolto con MatLab come segue:

```
>> A=[105 125.26;100 -89.77]
b=[100;0]
A\b

A =

  105.0000  125.2600
  100.0000  -89.7700


b =

   100
     0


ans =

    0.4089
    0.4555
```

ESERCIZI 6

6.1 Vogliamo garantirci la disponibilità di 350 euro fra 2.5 anni. Sono disponibili titoli di puro sconto dal valore nominale pari a 100 con scadenza fra 1 e 4 anni. Il tasso annuo di valutazione è 0.125. Si costruisca il portafoglio immunizzato.

6.2 Occorre pagare 2000 euro fra 2 anni e si vuole costruire un portafoglio immunizzato che contenga un BOT che paga 110 fra un anno e un BTP che paga cedole annue di 10 euro e scade fra 3 anni. Costruire il portafoglio immunizzato considerando lo stesso tasso di mercato dell'esempio precedente.

IMMUNIZZAZIONE E MINIMIZZAZIONE DEL COSTO

IMMUNIZZAZIONE: PORTAFOGLIO COMPOSTO DA DUE TITOLI

ES3 con due titoli: Calcolare le quote dei titoli che immunizzano un portafoglio composto da un'uscita M = 1.200 in t = 2, utilizzando i seguenti titoli quotati sul mercato

$$z_1 = \{(-300,\ 320);(0,\ 1)\} \ \text{ e } \ z_2 = \{(-475,\ 500);(0,\ 3)\}$$

dato un tasso annuo di mercato i* = 0.10517. Infine, partendo dal prezzo dei due titoli calcolare il prezzo del portafoglio di attività.

Consideriamo i vincoli di bilancio (richiediamo che il valore attuale del passivo coincida con il valore attuale dell'attivo) e il vincolo di duration (richiediamo che la duration del passivo coincida con quella dell'attivo).

PASSIVO: valore attuale e duration

$$V_0(M) = 1.200 * (1{,}10517)^{-2} = 982{,}4769$$

$$D_0(M) = 2.$$

…ES3 con due titoli:

ATTIVO: valore attuale e duration

Il portafoglio dell'attivo è dato da $\mathrm{P}=\{(320x_1,\ 500x_2);(1,\ 3)\}$

Per cui è possibile calcolare il valore attuale e la duration in termini delle quote detenute di ciascun titolo (NB: il VA al denominatore della duration è dato da il VA del passivo per il vincolo di bilancio).

$$V_0(\mathrm{P})=x_1*320(1{,}10517)^{-1}+x_2*500(1{,}10517)^{-3}=289{,}548x_1+370{,}4091x_2$$

NB: **La DURATION DI PORTAFOGLIO** può essere calcolata **come media ponderata delle durations** delle singole attività presenti in portafoglio, il **peso** è dato dal contributo che ciascuna attività ha sulla formazione del valore attuale del portafoglio.

NB: dato il vincolo di bilancio, il VA al denominatore della duration è dato da il VA del passivo per il vincolo di bilancio.

$$D_0(\mathrm{P})=\frac{1*320x_1(1{,}10517)^{-1}+3*500x_2(1{,}10517)^{-3}}{982{,}4769}=$$

$$=\frac{289{,}548x_1+1111{,}2273x_2}{982{,}4769}=0{,}2947x_1+1{,}13105x_2.$$

…ES3 con due titoli:

ATTIVO: immunizzazione con due titoli

Si ottiene il seguente sistema lineare di due equazioni e due incognite che ammette un'unica soluzione e che può risolversi con MatLab

$$\begin{cases} 289,548x_1 + 370,4091x_2 = 982,4769 \\ 0,2947x_1 + 1,13105x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1,6966; \quad x_2 = 1,3262$$

Infine, partendo dal prezzo dei due titoli, si calcola il **costo del portafoglio di attività** :

$$w_P = x_1 * 300 + x_2 * 475 = 1,6966 * 300 + 1,3262 * 475 = 1138,918.$$

IMMUNIZZAZIONE: PORTAFOGLIO COMPOSTO DA TRE O PIU' TITOLI

OSSERVAZIONE: poiché nel mercato sono presenti molti titoli, ed essendo dati 2 vincoli di uguaglianza, è possibile considerare più di due titoli. In tal caso esisteranno «in genere» **infiniti portafogli immunizzati**. Fra questi è possibile **scegliere quello che minimizza il costo del portafoglio.**

In tal caso si avrà un problema di minimizzazione con due vincoli di uguaglianza!

STRATEGIA DI INDEBITAMENTO SUL MERCATO AD UN'UNICA USCITA E INVESTIMENTO IN UN PORTAFOGLIO IMMUNIZZATO CON MINIMIZZAZIONE DEL COSTO DEL PORTAFOGLIO.

Si vuole considerare il seguente **problema CONCRETO**:

(1) **INDEBITAMENTO SUL MERCATO DOVENDO RESTITUIRE L'IMPORTO FINALE M al tempo T:** si ottiene oggi il valore attuale corrispondente M0. Nel mercato secondario sotto le ipotesi di coerenza è possibile indebitarsi; l'indebitamento ad un'unica uscita è equiparabile all'emissione di un BOT e soggetto ad un tasso d'interesse pari a quello che vige sul mercato per investimenti in BOT con scadenza in T (o vicina a T se tale scadenza non è disponibile).

{**NB:** è possibile in particolari periodi che il tasso sia nullo o lievemente negativo e che M0 sia circa pari ad M}

NB: Se il tasso (yeld) sul BOT con scadenza «vicina» a T è positivo, allora l'importo M0 ottenuto oggi è inferiore ad M. Tale importo può essere determinato come valore attuale dato lo yield dell'importo M da restituire al tempo T.

(2) **SELEZIONE DI ALMENO 3 TITOLI DA INCLUDERE NEL PORTAFOGLIO CHE SI VUOLE IMMUNIZZARE.** E' possibile scegliere fra i titoli a rendimento certo BOT oppure BTP. Per ciascun titolo scelto è nota la quotazione (o prezzo di mercato) e sono note le caratteristiche del titolo. Indichiamo con P1, P2 e P3 il prezzo del titolo 1, del titolo 2 e del titolo 3 come da listino. Occorre determinare le quote da detenere di ogni titolo che indichiamo con x1, x2, x3. Poiché come detto esisteranno di norma infinite combinazioni che rispettano i vincoli di bilancio e di duration richiesti per l'immunizzazione, si vuole costruire il portafoglio che minimizzi il costo iniziale.

PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE minimo costo del portafoglio:

Min: P1*x1+P2*x2+P3*x3

P1,P2,P3 sono le quotazioni di mercato (note)
x1,x2,x3 sono le quote da investire in ciascun titolo (variabili del problema)

(3) VINCOLO DI BILANCIO Occorre richiedere che il valore attuale del portafoglio **al tasso di valutazione o di mercato considerato** sia uguale al valore attuale dell'uscita M0. Il VA del portafoglio è dato dalla somma dei valori attuali dei flussi prodotti da ciascun titolo ponderato per la quota di portafoglio detenuta di ogni titolo. Si osservi come in ipotesi di struttura piatta dei tassi assumeremo un unico tasso i* per attualizzare tutti i flussi

VINCOLO DI BILANCIO:

$$V1*x1+V2*x2+V3*x3=M0$$

(4) VINCOLO DI DURATION Occorre richiedere che la duration di portafoglio sia pari a T.

OSSERVAZIONE: siano D1, D2 e D3 le durations dei titoli 1, 2 e 3; siano inoltre x1, x2 e x3 le quote detenute nel portafoglio di ciascun titolo; si osservi infine che il valore attuale di ciascun titolo (V1, V2, V3) e quello del portafoglio (M0) sono già stati considerati nel precedente vincolo

LA DURATION DI UN PORTAFOGLIO PUO' ESSERE CALCOLATA A PARTIRE DALLA DURATION DEI SINGOLI TITOLI: ESSA E' DATA DALLA MEDIA PONDERATA DELLE SINGOLE DURATION CON PESO DATO DAL CONTRIBUTO DI CIASCUN TITOLO ALLA FORMAZIONE DEL PREZZO DEL PORTAFOGLIO

$$DP=(D1*x1*V1 + D2*x2*V2 +....+ Dn*xn*Vn)/(x1*V1 + x2*V2 +....+ xn*Vn)$$

CALCOLO DELLE DURATION DI CIASCUN TITOLO:

Si osservi che è possibile calcolare la duration di ciascun titolo ad un certo tasso di valutazione fissato usando il comando **bnddury**

SE INVECE SONO ASSEGNATI SEMPLICI FLUSSI DI CASSA,

il comando MatLab **cfdur** si utilizza per calcolare la duration di un flusso periodico dato un tasso periodale:

SINTASSI DEL COMANDO cfdur:

Inputs:
CF è il **vettore riga del flusso di cassa periodico** (poste anche variabili ma periodiche, quindi se necessario introdurre eventuali poste nulle)
Y è il **tasso di valutazione periodale impiegato** (deve essere quello periodale)

cfdur(CF,Y)

Restituisce la **duration associata al titolo IN TERMINI DI NUMERI DI PERIODI** (se il flusso è semestrale, la duration è il numero di semestri e per avere la duration annua occorre poi dividere per due)

Occorre richiedere che la duration del portafoglio delle attività coincida con la duration del passivo che è T, impostando così il **vincolo di duration**

VINCOLO DI DURATION:

$$\frac{D1*V1*x1+D2*V2*x2+D3*V3*x3}{M0}=T$$

(5) VINCOLI SULLE QUOTE DA INVESTIRE IN CIASCUN TITOLO

Spesso per l'investitore ha senso considerare solo quote positive investite in ciascun titolo (assenza di vendite allo scoperto) cioè

x1, x2 e x3 non negativi.

Oppure in altri casi si possono avere vincoli minimi o massimi nelle quote da investire in ciascun titolo.

Senza questo tipo di vincoli è possibile che il problema continui ad ammettere infinite soluzioni.

FORMALIZZAZIONE DEL PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE E RISOLUZIONE CON MATLAB

Il problema di **minimizzazione del costo del portafoglio dell'attivo** per l'immunizzazione ad una sola uscita **nel caso di 3 titoli** può essere formalizzato come segue:

$$\min P1x1 + P2x2 + P3x3$$

$$t.c.\begin{cases} V1x1 + V2x2 + V3x3 = M0 \\ \dfrac{D1 * V1}{M0}x1 + \dfrac{D2 * V2}{M0}x2 + \dfrac{D3 * V3}{M0}x3 = T \end{cases}$$

Che è un problema di ricerca di minimo di una funzione lineare di 3 variabili, soggetto a 2 vincoli lineari di uguaglianza.

Poiché funzione obiettivo e vincoli sono lineari, un problema di questo tipo è detto di **programmazione lineare** (PL).

NB: possono anche considerarsi vincoli di non negatività per le variabili.

ES3 con tre titoli: PROBLEMA

Sia dato un tasso di valutazione di mercato del 6%. Si vuole attuare la seguente strategia:

-anticipazione del VA di 800 euro da restituire fra 18 mesi

-investimento del VA in un portafoglio immunizzato costituito dai seguenti titoli

A) BTP a 1 anno, cedola semestrale 4 euro, quotato alla pari
B) BOT a 3 anni prezzo 95
C) BTP a 2 anni cedole annue 7 euro, prezzo 102

Calcolare le quote di VN da acquistare di ciascun titolo al fine di minimizzare il costo del portafoglio in ipotesi che non siano possibili vendite allo scoperto.

FORMALIZZAZIONE DEL PROBLEMA

COSTO DEL PORTAFOGLIO: è dato dal prezzo di ciascun titolo per la quota di VN del titolo detenuto. Tale costo è la funzione obiettivo che si vuole minimizzare.

$$\min 100x_1 + 95x_2 + 102x_3$$

VINCOLO DI BILANCIO: il VA del passivo è pari a

>>800*(1.06)^-1.5 => M0=733.05

Il VA di ciascun titolo è calcolato analogamente con MatLab e si ottiene

V1=101.1

V2=83.96

V3=101.83

Il primo vincolo da imporre (VA dell'attivo=VA del passivo) risulta:

$$101.1x_1 + 83.96x_2 + 101.83x_3 = 733.05$$

VINCOLO DI DURATION: la duration del passivo è 1.5; la duration del secondo titolo è D2=3; per calcolare D1 e D3 usiamo il comando MatLab **cfdur**

```
>> CF1=[4, 104]; i2=(1.06)^(1/2)-1;
>> D=cfdur(CF1,i2)
D=
    1.9619
>> D1=D/2
D1=
    0.981
>> CF3=[7 107]; i=0.06;
>> D3=cfdur(CF3,i)
D3 =
   1.9352
```

Il secondo vincolo da imporre (DURATION dell'attivo=DURATION del passivo) risulta:

$$0.981\frac{101.1}{733.05}x_1 + 3\frac{83.96}{733.05}x_2 + 1.9352\frac{101.83}{733.05}x_3 = 1.5$$

$$\Rightarrow 0.1353x_1 + 0.3436x_2 + 0.2688x_3 = 1.5$$

VINCOLO DI ASSENZA DI VENDITE ALLO SCOPERTO: è richiesta la non negatività delle variabili

I vincoli possono anche esprimersi in termini matriciali mediante il sistema Aeq*x=beq come segue:

$$\begin{pmatrix} 101.1 & 83.96 & 101.83 \\ 0.1353 & 0.3436 & 0.2688 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 733.05 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Che è un sistema in 2 equazioni e tre incognite compatibile con infinite soluzioni.
Si aggiunge l'ipotesi di assenza di vendite allo scoperto

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Fra queste si cerca quella che minimizza il costo del portafoglio

NB: senza l'ipotesi di non negatività il problema può essere illimitato!

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI PL CON MATLAB

MatLab è dotato **di istruzioni per l'ottimizzazione** che permette di risolvere problemi di ottimizzazione di vari tipi (lineare, non lineare, libera, vincolata, quadratica etc.).

Il caso in esame è un esempio di programmazione lineare, cioè con funzione obiettivo e vincoli tutti lineari:

COMANDO DA USARE

LINPROG che prevede alcuni input e output

INPUT DEL COMANDO

(1) f deve essere definito come il **vettore riga dei coefficienti della funzione obiettivo**

Nel nostro esempio f=[100 95 102]

(2) Occorre poi considerare l'eventuale presenza di **vincoli di disuguaglianza** (che in questi problemi sono assenti) per cui **A=[] b=[]**
Nel nostro esempio A=[], Nel nostro esempio b=[]

(3) Si considerano poi i vincoli di uguaglianza che invece nel nostro esempio sono presenti ed in particolari in **Aeq** occorre definire la **matrice dei coefficienti delle variabili** mentre in **beq** occorre definire il **vettore colonna dei termini noti**

Nel nostro esempio Aeq=[101.1 83.96 101.83; 0.1353 0.3436 0.2688]
Nel nostro esempio beq=[733.05;1.5]

(4) E' possibile inserire vincoli di non negatività o altri limiti inferiori o superiori definendo **lower bounds lb** ed **upper bounds ub** il vettore colonna che rappresenta i limiti inferiori e superiori per le variabili considerate ed eventualmente usando inf o –inf per specificare l'assenza di eventuali limiti inferiori o superiori per una delle variabili
Nel nostro esempio lb=[0;0;0], ub=[+inf;+inf;+inf]

ESEGUIRE IL COMANDO LINRPOG DOPO AVER MEMORIZZATO I DATI IN INPUT

[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

Che fornisce come output **x=portafoglio ottimo**, **fval=valore della funzione obiettivo**

SOLUZ EX 3

```
>> f=[100 95 102]; A=[]; b=[]; Aeq=[101.1  83.96  101.83; 0.1353 0.3436 0.2688];

>> beq=[733.05;1.5]; lb=[0;0;0]; ub=[+inf;+inf;+inf];


>> [x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)


Optimal solution found.


x =

    3.3064
         0
    3.9161


fval =

  730.0787

>>
```

ESERCIZI 6

7.1 Si consideri un tasso di valutazione del 5%. Si deve restituire un importo di 800 euro fra 3 anni; è anticipato oggi il valore attuale. Si vuole investire l'importo a disposizione nei tre seguenti titoli: A) BOT a 4 anni, prezzo 96; 2) BTP a 5 anni, cedola annua 8 euro prezzo 101; 3) BOT a un anno prezzo 99. Sono escluse vendite allo scoperto.

7.2 Sia dato un tasso di valutazione di mercato del 6%. Si vuole attuare la seguente strategia:

-anticipazione del VA di 1000 euro da restituire fra 30 mesi

-investimento del VA in un portafoglio immunizzato costituito dai seguenti titoli

A) BTP a 2 anni, cedola semestrale 6 euro, quotato alla pari

B) BOT a 3 anni prezzo 95

C) BTP a 4 anni cedole annue 5 euro, prezzo 99

Calcolare le quote di VN da acquistare di ciascun titolo al fine di minimizzare il costo del portafoglio in ipotesi che sia acquistata almeno una unità di ciascun titolo.

PROPOSTE DI LAVORO

Descrizione teorica e applicazione pratica su quanto segue

(1) A partire da quanto visto presentare un esempio pratico a partire da dati reali di costruzione di un portafoglio immunizzato con minimizzazione del costo utilizzando 4 titoli (presentare prima la formalizzazione corretta con 4 titoli).*

(2) A partire da quanto visto presentare un esempio pratico con dati reali di costruzione di un portafoglio immunizzato con minimizzazione del costo utilizzando più titoli ed aggiungendo dei vincoli (es. almeno una quota destinata ad un certo titolo o al più una quota destinata ad un altro titolo). Potrebbe essere interessante vedere come la composizione varia a seconda dei vincoli che si includono.*

(3) Partire dalla costruzione di un portafoglio immunizzato con due soli titoli (e calcolarne il prezzo), mostrare, se è possibile, che includendo un titolo aggiuntivo è possibile costruire un portafoglio immunizzato che abbia un minor costo. **

(4) Uno sviluppo futuro possibile può essere quello di studiare i principi, le tecniche e le applicazioni per la costruzione di portafogli immunizzati **con più di una uscita** ***