APOGEO education

Matematica

per le scienze economiche e sociali

Algebra lineare, funzioni di più variabili e ottimizzazione statica

Claudio Mattalia
Fabio Privileggi

MAGGIOLI EDITORE

Capitolo 5

Ottimizzazione libera

Incominciamo ad affrontare in questo capitolo l'argomento che costituisce il filo conduttore dell'intero testo, ossia un problema di ottimo rappresentabile nella forma più generale possibile come:

$$\begin{array}{c} \max f(x) \\ \text{sub } x \in X \end{array} \tag{Pn}$$

dove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una *funzione reale di n variabili*, che chiameremo *funzione obiettivo*, e $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che chiameremo, in generale, *insieme ammissibile* e può rappresentare il *dominio naturale* di f oppure un *vincolo*. Si noti la somiglianza di (Pn) con il problema (P1) del Capitolo 13 nel primo volume.

In questo capitolo, dopo aver brevemente richiamato le definizioni di massimo e minimo assoluto e relativo e il Teorema di Weierstrass, che garantisce l'esistenza degli estremi assoluti sotto le ipotesi usuali anche nel caso di funzioni di n variabili, procederemo allo studio dei *massimi e minimi liberi* estendendo al caso di n variabili tecniche analoghe a quelle viste per l'ottimizzazione in una variabile. Specificamente, utilizzeremo il calcolo differenziale discusso nel Capitolo 4 per enunciare *condizioni necessarie del primo ordine* e *sufficienti del secondo ordine* per punti di ottimo interni. L'approccio deputato alla ricerca degli estremi assoluti in questa tipologia di problemi si baserà sull'ipotesi di *concavità/convessità* della funzione obiettivo, che, come nel caso di una variabile, garantisce l'unicità (e di solito anche l'esistenza) del punto di ottimo.

5.1 Massimi e minimi assoluti e relativi

Iniziamo richiamando le definizioni di massimo e minimo per funzioni di più variabili.

DEFINIZIONE 5.1 Data $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che:

1. x^0 è un punto di **massimo assoluto (globale) proprio (stretto)** se $x^0 \in X$ e $f(x^0) > f(x)\ \forall x \in X$, $x \neq x^0$;

2. x^0 è un punto di **minimo assoluto (globale) proprio (stretto)** se $x^0 \in X$ e $f(x^0) < f(x)\ \forall x \in X,\ x \neq x^0$.

DEFINIZIONE 5.2 Data $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che:

1. x^0 è un punto di **massimo relativo (locale) proprio (stretto)** se $x^0 \in X$ ed esiste un intorno $I^\delta_{x^0}$ tale che $f(x^0) > f(x)\ \forall x \in I^\delta_{x^0} \cap X,\ x \neq x^0$;
2. x^0 è un punto di **minimo relativo (locale) proprio (stretto)** se $x^0 \in X$ ed esiste un intorno $I^\delta_{x^0}$ tale che $f(x^0) < f(x)\ \forall x \in I^\delta_{x^0} \cap X,\ x \neq x^0$.

I punti estremi assoluti e relativi in senso debole soddisfano le stesse disuguaglianze debolmente. Non nuoce ricordare che x^0, in quanto 'punto' di $\mathbb{R}^n$, è un *vettore* con n coordinate.

Estendiamo ora il Teorema di Weierstrass alle funzioni di n variabili. Esso assume un'importanza fondamentale in quanto assicura l'esistenza del massimo e minimo assoluti sotto l'ipotesi di continuità della funzione obiettivo f e di compattezza dell'insieme ammissibile X. La nozione di insieme compatto è stata introdotta con la Definizione 4.5.

TEOREMA 5.1 (WEIERSTRASS) È data $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Se X è *compatto* e f è *continua*, allora esistono (almeno) due punti $x^0, x^1 \in X$ tali che:

$$f(x^0) = \min_{x \in X} f(x) \qquad \text{e} \qquad f(x^1) = \max_{x \in X} f(x)$$

ovvero $x^0 = \arg\min\limits_{x \in X} f(x)$ e $x^1 = \arg\max\limits_{x \in X} f(x)$.

Tutti i commenti riguardanti lo stesso Teorema discusso nel Paragrafo 13.3 del primo volume rimangono validi anche in questo contesto più generale. In particolare, si ricordi che questo teorema fornisce solo condizioni sufficienti, e non necessarie, per l'esistenza del massimo e del minimo assoluti; ovvero il massimo e il minimo possono esistere anche in casi in cui f è discontinua e/o X non è compatto.

5.2 Caratterizzazione dei punti estremi interni: condizioni necessarie del primo ordine

Il concetto di *ottimizzazione libera* per funzioni di n variabili assume un'accezione più specifica di quella vista per le funzioni di una variabile: esso si riferisce a tutti i problemi del tipo (Pn) nei quali l'insieme ammissibile X è un *insieme aperto*, ovvero contiene solamente punti interni e non contiene punti di frontiera, indipendentemente dal fatto che X indichi il dominio di f oppure un vincolo. In questo capitolo non ci occuperemo di punti estremi di frontiera in quanto sono proprio questi ultimi a definire i problemi di 'ottimo vincolato' che tratteremo separatamente. Ma se X è un insieme aperto, certamente *non può essere compatto*. Pertanto, in tutto questo capitolo il Teorema di Weierstrass sarà inapplicabile[1] e dunque ci occuperemo soprattutto di punti *estremi relativi*.[2]

Cominciamo con l'enunciare un risultato equivalente alle condizioni del primo ordine viste nel Paragrafo 13.4 (e Teorema 11.6) del primo volume: vogliamo caratterizzare i punti di massimo relativo interno mediante una condizione di *stazionarietà* equivalente a quella della 'derivata prima uguale a zero' per funzioni di una variabile.

TEOREMA 5.2 (FERMAT) Sia $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, differenziabile nel punto $x^* \in \text{Int}(X)$ e sia x^* un punto di massimo (minimo) relativo per f. Allora:

$$f_{x_i}(x^*) = 0 \qquad \text{per } i = 1, 2, \ldots, n \tag{5.1}$$

ovvero $\nabla f(x^*) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Analogamente al caso in $\mathbb{R}$, i punti x^* che soddisfano la (5.1) – in cui, cioè, *tutte le derivate parziali si annullano* – si dicono **punti stazionari**. Diremo che il Teorema 5.2 fornisce *condizioni* (necessarie) *del primo ordine (FOC)*.

La Figura 5.1 illustra l'idea su cui si basa il Teorema 5.2 nel caso di *funzioni di due variabili*, $f(x, y)$: in un punto di massimo (o di minimo) interno il piano tangente al grafico di f (il differenziale) è orizzontale. Poiché tale piano è individuato dalle due derivate parziali, f_x e f_y, la condizione (5.1) stabilisce proprio che tale piano è orizzontale. L'intuizione nel caso di $n > 2$ variabili si basa sull'osservazione che in un punto di massimo x^* tutte le derivate parziali f_{x_i} cambiano segno passando da positive a negative,[3] dovendo pertanto necessariamente annullarsi in x^*.

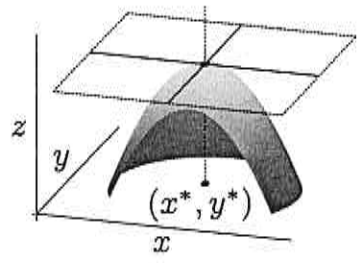


FIGURA 5.1: il piano tangente è orizzontale in un punto stazionario.

La stazionarietà è una condizione necessaria ma non sufficiente per un punto di massimo in quanto essa è caratteristica anche dei punti di minimo e dei 'punti di sella', che definiremo tra breve.

ESEMPIO 5.1 La funzione (forma quadratica) $f(x, y) = -x^2 - y^2$, definita su tutto $\mathbb{R}^2$, ha come unico punto stazionario l'origine: $(x^*, y^*) = (0, 0)$, che è l'unica soluzione del

[1] È innegabile notare una certa incongruenza nell'esordire con l'enunciato del Teorema di Weierstrass in un capitolo dedicato all'ottimizzazione libera, ossia a problemi di ottimo per i quali il suddetto teorema non può essere usato. Tale scelta è motivata dal desiderio di fornire condizioni che garantiscano che l'oggetto di tutte le discussioni che seguiranno nei prossimi capitoli non è l'insieme vuoto, per cui vale la pena continuare a leggere... Per l'utilizzo del Teorema 5.1 dobbiamo portare pazienza e attendere il Capitolo 6.

[2] Non dimentichiamo però che fra questi potrebbero esserci anche il massimo e/o il minimo assoluti, i quali verranno facilmente individuati soltanto nei problemi concavi che affronteremo nei Paragrafi 5.6 e 5.7.

[3] Immaginiamo, in astratto, di "camminare" sul grafico di f "passando sopra" un punto di massimo: prima di raggiungerlo stiamo salendo (derivata positiva) e dopo averlo superato stiamo scendendo (derivata negativa); questo avviene rispetto a qualsiasi direzione, incluse quelle parallele agli assi cartesiani che individuano le derivate parziali f_{x_i}.

sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f_x = -2x = 0 \\ f_y = -2y = 0 \end{cases}$$

La Figura 4.11 dell'Esempio 4.4 suggerisce che $(0,0)$ è l'unico punto di massimo assoluto, cosa che non potremmo accertare senza l'ausilio del grafico di f.

ESEMPIO 5.2 Anche la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$, definita su tutto $\mathbb{R}^2$, ha come unico punto stazionario l'origine: $(x^*, y^*) = (0,0)$, che è l'unica soluzione del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{cases}$$

La Figura 4.10(a) dell'Esempio 4.3 mostra che $(0,0)$ è l'unico punto di minimo assoluto, cosa che, ancora una volta, non sapremmo verificare senza il grafico.

ESEMPIO 5.3 La funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$, definita su tutto $\mathbb{R}^2$, ha ancora una volta come unico punto stazionario l'origine: $(x^*, y^*) = (0,0)$, che è l'unica soluzione del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = -2y = 0 \end{cases}$$

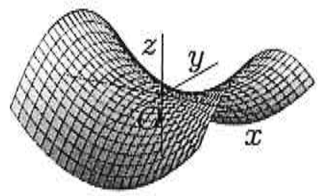


FIGURA 5.2: l'origine è un punto di sella per $x^2 - y^2$.

La Figura 5.2 mostra che $(0,0)$ non è né un massimo né un minimo per la funzione dell'ultimo esempio; si tratta di un *punto di sella*.

DEFINIZIONE 5.3 (PUNTO DI SELLA) Un **punto stazionario** $x^* \in \mathrm{Int}(X)$ si dice **di sella** per la funzione differenziabile $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, se *in ogni intorno* $I^{\delta}_{x^*}$ del punto stesso esistono punti x tali che $f(x) > f(x^*)$ e punti x tali che $f(x) < f(x^*)$.

ESEMPIO 5.4 Individuiamo i punti stazionari delle seguenti funzioni.

1. $f(x,y) = x + 2ey - e^x - e^{2y}$. Innanzitutto osserviamo che $CE = \mathbb{R}^2$, e quindi è un *insieme aperto*. Dobbiamo risolvere il sistema non lineare:

$$\begin{cases} f_x = 1 - e^x = 0 \\ f_y = 2e - 2e^{2y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = 1 \\ 2e^{2y} = 2e \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln 1 = 0 \\ e^{2y} = e \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo l'unico punto stazionario $(x^*, y^*) = (0, 1/2)$, in cui vale $f(0, 1/2) = -1$.

2. $f(x,y) = x^2 y$. $CE = \mathbb{R}^2$, insieme aperto. Dobbiamo risolvere il sistema non lineare:

$$\begin{cases} f_x = 2xy = 0 \\ f_y = x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, cioè tutto l'asse delle ordinate; in altre parole tutti i punti $(x^*, y^*) = (0, y)$, per ogni $y \in \mathbb{R}$, sono punti stazionari e in essi la funzione è identicamente nulla: $f(0,y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

3. $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - y^2 - 2y$. $CE = \mathbb{R}^2$, insieme aperto. Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 6xy = 0 \\ f_y = 3x^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Risolviamo *per sostituzione*: conviene ricavare y dalla seconda equazione:

$$y = (3/2)\,x^2 - 1 \tag{5.2}$$

e sostituirla nella prima ottenendo $3x^2 + 6x\left[(3/2)\,x^2 - 1\right] = 0$, ovvero $3x^2 + 9x^3 - 6x = 0$, che fattorizziamo come $3x\left(3x^2 + x - 2\right) = 0$; da quest'ultima ricaviamo tre valori per x: $x = 0$, $x = -1$ e $x = 2/3$. Dall'equazione (5.2) ricaviamo i rispettivi valori per la y: $y = -1$, $y = 1/2$ e $y = -1/3$. Concludendo, ci sono tre punti stazionari: $(0,-1)$, $(-1,1/2)$ e $(2/3,-1/3)$, in cui la funzione vale rispettivamente $f(0,-1) = 1$, $f(-1,1/2) = -3/4$, $f(2/3,-1/3) = 11/27$.

4. $f(x,y,z) = \ln x + \ln(y+1) + e^{-yz} - x + y$. $CE = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x>0) \wedge (y>-1)\}$, insieme aperto. Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f_x = 1/x - 1 = 0 \\ f_y = (y+1)^{-1} - ze^{-yz} + 1 = 0 \\ f_z = -ye^{-yz} = 0 \end{cases}$$

Dalla prima e dall'ultima equazione ricaviamo subito $x = 1$ e $y = 0$, che sostituiti nella seconda forniscono $z = 2$. Dunque, l'unico punto stazionario è $(1,0,2)$, chiaramente appartenente a CE, in cui la funzione vale $f(1,0,2) = 0$.

5.3 Punti estremi interni e polinomio di Taylor

Dagli esempi visti nel paragrafo precedente, appare chiaro che il Teorema 5.2 è insufficiente per individuare massimi e/o minimi su punti interni, c'è bisogno di qualcos'altro. Per le funzioni di una variabile avevamo visto un criterio basato sul *segno della derivata seconda* (condizioni del secondo ordine). Nel Paragrafo 4.4 abbiamo visto che, nel caso di n variabili, la derivata seconda è rappresentata dalla *matrice Hessiana*, che contiene le $n \times n$ derivate seconde parziali; al fine di elaborare condizioni del secondo ordine analoghe a quelle viste nel primo volume, dobbiamo pertanto costruire un criterio che ci permetta di studiare il 'segno' della matrice Hessiana. Prima, però, è il caso di chiarire cosa si intende per *segno della matrice Hessiana*; ciò richiede un'ampia digressione sulle *forme quadratiche* che costituirà l'oggetto del prossimo paragrafo.

Prima di affrontare gli aspetti tecnici dell'analisi del secondo ordine, illustriamo l'idea di base richiamando l'intuizione geometrica fornita dall'espansione di Taylor di secondo grado su punti estremi interni per funzioni di una variabile; in particolare, ci riferiamo alla Figura 13.17 del Paragrafo 13.6.2 del primo volume. La Figura 5.3 illustra la medesima situazione *in due variabili*: il grafico di f in un intorno del punto di massimo relativo interno (x^*, y^*) si presenta come la cima di una collina, e questa volta si tratta di una "collina vera e propria" in tre dimensioni [Figura 5.3(a)]; anche qui il grafico della funzione presenta una curvatura orientata verso il basso in un intorno del punto estremo, e questa caratteristica viene evidenziata dall'espansione di Taylor di secondo grado in due variabili[4] T_2 nel punto estremo (x^*, y^*) che ha come grafico un paraboloide orientato verso il basso con vertice il massimo stesso. Nel caso particolare della Figura 5.3, si tratta di un paraboloide simile a quello rappresentato in Figura 4.11 che "si infila" nel grafico di f dal di sotto e si spalma quasi perfettamente contro il grafico di f, quasi a coincidere con esso, sui punti vicini a (x^*, y^*) [situazione evidenziata dallo 'spaccato' di Figura 5.3(b)]. Un discorso analogo vale per i punti di minimo, per i quali il paraboloide sarà orientato verso l'alto.

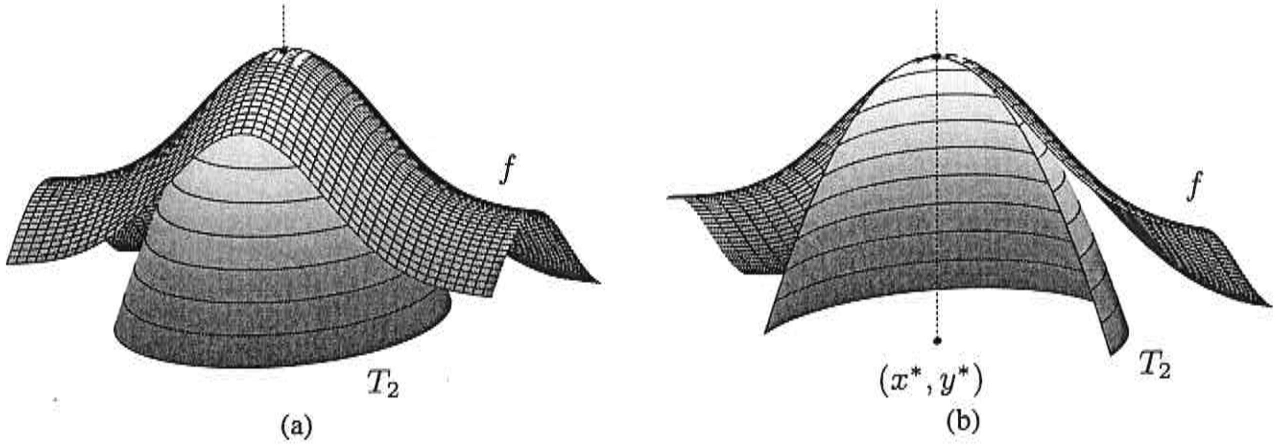


FIGURA 5.3: (a) espansione di Taylor di secondo grado T_2 di f in un punto di massimo interno; (b) 'spaccato' della figura (a) per evidenziare la somiglianza di T_2 a f vicino al punto di massimo (x^*, y^*).

Le condizioni del secondo ordine per funzioni di n variabili, con $n \geq 2$, si basano proprio sull'approssimazione di Taylor di secondo grado T_2, che a sua volta coinvolge una forma quadratica che ha come grafico un *paraboloide con vertice nel punto di ottimo*, oggetto, quest'ultimo, che siamo in grado di disegnare in due variabili ma che conserva le stesse proprietà di curvatura anche in più di due variabili, nonostante, in questo caso, esse sfuggano alla nostra percezione visiva. L'idea sfrutta il fatto che in prossimità di un punto estremo interno $x^* \in \mathbb{R}^n$ la funzione f si comporta in modo pressoché identico al suo approssimante di secondo grado T_2: studiare le proprietà di curvatura di T_2 equivale a studiare le stesse proprietà di f in un intorno piccolo di x^*.

Nel Paragrafo 4.5 abbiamo imparato che la *forma quadratica* che definisce la componente di secondo grado (la *componente di curvatura*) del polinomio di Taylor T_2 approssimante una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in un intorno di un punto interno $x^* \in \mathbb{R}^n$ è determinata dalla *matrice Hessiana* H di f calcolata in x^*; in particolare, tale forma quadratica è definita dalla (4.26) del Paragrafo 4.5.2: $Q(x) = (1/2)\, x^T H x$. Possiamo dunque identificare Q con la matrice Hessiana H; ma questo significa che studiare il tipo

[4]Si veda la (4.28) nel Paragrafo 4.5.3.

di curvatura di T_2 in un intorno di x^* equivale a studiare il tipo di curvatura di Q, che, a sua volta, dipenderà dal 'segno' della matrice Hessiana H. È quindi giunto il momento di affrontare lo spinoso problema della proprietà di curvatura di una *forma quadratica* e della sua caratterizzazione mediante il *segno della matrice che la definisce*.

5.4 Forme quadratiche

Illustreremo in dettaglio il caso delle forme quadratiche di due variabili, per il quale è disponibile la rappresentazione grafica, per poi limitarci ad enunciare il criterio generale in n variabili.

5.4.1 Curvatura delle forme quadratiche di due variabili

Consideriamo ancora una volta la forma quadratica generica in due variabili:

$$Q(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy \tag{5.3}$$

Avendo in mente il Paragrafo 4.5, è lecito interpretare i primi due parametri come la metà delle derivate parziali seconde pure, $a_{11} = (1/2) f_{xx}$ e $a_{22} = (1/2) f_{yy}$, e l'ultimo, a_{12}, come la metà della derivata parziale seconda mista, $a_{12} = (1/2) f_{xy}$ $[= (1/2) f_{yx} = a_{21}]$, di una qualche funzione f di classe C^2 calcolate in un punto interno stazionario (x^*, y^*), punto che vorremmo classificare come punto di minimo oppure di massimo relativo interno, ovvero né l'uno né l'altro. Ricordiamo infatti dalla (4.28) che, poiché sul punto stazionario (x^*, y^*) vale $\nabla f(x^*, y^*) = (0, 0)$, T_2 è una forma quadratica interamente definita dalla (metà della) matrice Hessiana:

$$\frac{1}{2}H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

a cui viene sommata la costante $f(x^*, y^*)$.[5]

Nei casi più semplici, quelli in cui $a_{12} = 0$ (che nel nostro retropensiero significa derivate parziali seconde miste nulle, $f_{xy} = f_{yx} = 0$), abbiamo sostanzialmente[6] tre situazioni possibili.

1. Se $a_{11} > 0$ e $a_{22} > 0$ il grafico di Q è un paraboloide orientato verso l'alto, come in Figura 4.10(a), cioè si tratta della generalizzazione della parabola orientata verso l'alto in una variabile che è caratterizzata da un coefficiente del

[5] A essere pignoli, T_2 è stato definito come funzione delle variazioni $dx = x - x^*$ e $dy = y - y^*$ anziché delle variabili x e y; questo fatto non ci deve preoccupare perché si tratta semplicemente di traslare orizzontalmente il vertice della forma quadratica dall'origine $O = (0, 0)$ al punto (x^*, y^*).

[6] Trascuriamo per il momento i casi particolari in cui $a_{11} = 0$ oppure $a_{22} = 0$; essi verranno inclusi successivamente nella classificazione generale delle forme quadratiche.

termine al quadrato positivo.[7] Essendo i termini $a_{11}x^2$ e $a_{22}y^2$ positivi, riesce $Q(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$; pertanto, poiché $Q(0,0) = 0$, *l'origine* $O = (0,0)$ *è l'unico punto di minimo assoluto* in quanto soddisfa il primo punto della Definizione 5.1.

2. Se $a_{11} < 0$ e $a_{22} < 0$ il grafico di Q è un paraboloide orientato verso il basso del tipo in Figura 4.11, che è la generalizzazione della parabola orientata verso il basso in una variabile caratterizzata da un coefficiente del termine al quadrato negativo. Essendo i termini $a_{11}x^2$ e $a_{22}y^2$ negativi, riesce $Q(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$; pertanto, poiché $Q(0,0) = 0$, *l'origine* $O = (0,0)$ *è l'unico punto di massimo assoluto* in quanto soddisfa il secondo punto della Definizione 5.1.
3. Infine, se a_{11} e a_{22} hanno segni discordi il grafico di Q è come in Figura 5.2, e quindi l'origine $O = (0,0)$ è un *punto di sella*, tale, cioè, che ogni suo intorno contiene punti (x,y) tali che $Q(x,y) < Q(0,0) = 0$ e contemporaneamente punti (x,y) tali che $Q(x,y) > Q(0,0) = 0$ (Definizione 5.3), e pertanto *non è un punto né di minimo né di massimo*.

Se pensiamo a Q come al polinomio di Taylor di secondo grado T_2 calcolato nel punto stazionario (x^*, y^*), ovvero se sfruttiamo la nostra interpretazione dei parametri a_{11} e a_{22} come la metà delle derivate parziali seconde pure di f calcolate nel punto (x^*, y^*), e osserviamo attentamente la Figura 5.3, ci rendiamo facilmente conto che i punti 1 e 2 appena discussi forniscono immediatamente un criterio per stabilire se (x^*, y^*) è un punto di massimo oppure di minimo relativo interno per f. Si tratta dell'estensione nuda e cruda del teorema visto nel primo volume al caso di due variabili: al posto dell'unica derivata seconda negativa (positiva) che ci assicurava che il punto stazionario è un massimo (minimo), ora di derivate seconde ne abbiamo due, f_{xx} e f_{yy}; se sono entrambe negative (positive), allora possiamo star certi che (x^*, y^*) è un punto di massimo (minimo) relativo interno. Per completare il quadro, il caso 3 ci dice che se le derivate parziali seconde hanno segno alterno, allora (x^*, y^*) è un punto di sella, e pertanto non è né un massimo né un minimo.[8]

Purtroppo non abbiamo ancora enunciato un criterio generale poiché, ponendo $a_{12} = 0$, abbiamo finto che le derivate parziali seconde miste f_{xy} e f_{yx} non esistessero. È ora di considerare il ruolo di f_{xy} e f_{yx} studiando il caso $a_{12} \neq 0$, situazione che ci complicherà un po' la vita.

Osserviamo attentamente la forma quadratica Q in (5.3). I primi due addendi sono indipendenti dai segni delle variabili x e y, nel senso che i loro segni sono determinati una

[7] Chi si è dimenticato le proprietà delle parabole si riveda il Paragrafo 3.4.7 del primo volume.

[8] Potremmo assimilare quest'ultima circostanza ai punti di flesso visti per le funzioni di una variabile, anche se, a guardare bene i punti di sella, ci accorgiamo che la loro proprietà di essere punti stazionari senza essere né massimi né minimi ha una natura completamente diversa che dipende dal fatto che in $\mathbb{R}^2$ ci si può muovere in *più direzioni* (in particolare, quelle parallele agli assi cartesiani), situazione impossibile da replicare sulla retta reale.

volta per tutte dai segni di a_{11} e a_{22} e rimangono gli stessi per ogni valore delle variabili x e y (perché x^2 e y^2 sono sempre positivi); questo permette la netta classificazione negli unici tre casi possibili considerati sopra. Diversamente, *l'ultimo addendo dipende dai segni di x e di y*, dal momento che, per qualsiasi valore di $a_{12} \neq 0$, il prodotto $2a_{12}xy$ assumerà valori sia positivi sia negativi a seconda dei segni di x e di y. Se, ad esempio, $a_{12} > 0$, allora risulta $2a_{12}xy > 0$ se x e y hanno lo stesso segno, però riesce $2a_{12}xy < 0$ non appena x e y hanno segni discordi. Una situazione analoga si determina se $a_{12} < 0$. In altre parole, l'ultimo termine della (5.3) introduce un "elemento di disturbo" che intacca la chiarezza e la semplicità dei casi in cui $a_{12} = 0$, e questo indipendentemente dal segno di a_{12}. Ma come si manifesta questo disturbo rispetto ai tre casi visti prima? Forniamo l'intuizione studiando un esempio particolare in modo dettagliato.

ESEMPIO 5.5 Poniamo $a_{11} = 1$ e $a_{22} = 1$ e studiamo la forma quadratica:

$$Q(x,y) = x^2 + y^2 + 2a_{12}xy \tag{5.4}$$

per valori crescenti del parametro a_{12} a partire da $a_{12} = 0$. In altre parole, vogliamo capire *che tipo di deformazione* subisce il grafico della forma quadratica di partenza $Q(x,y) = x^2 + y^2$ di Figura 4.10(a) [riportato per comodità in Figura 5.4(a)] al crescere del 'peso' di a_{12}, ponendo particolare attenzione al ruolo dell'origine $O = (0,0)$: vogliamo scoprire qual è la soglia per i valori di a_{12} oltre la quale l'origine cessa di essere il punto di minimo assoluto.

Vediamo subito che se $x > 0$ e $y > 0$ oppure se $x < 0$ e $y < 0$ vale sempre $Q(x,y) > 0$ perché tutti gli addendi di Q sono positivi; pertanto, restringendo il dominio di Q (che è tutto $\mathbb{R}^2$) al primo e al terzo ortante, l'origine rimarrebbe sempre l'unico punto di minimo assoluto e nulla cambierebbe rispetto al primo caso visto in precedenza.

Allargando la nostra analisi al secondo e al quarto ortante, dove le variabili x e y hanno segno discorde, l'addendo $2a_{12}xy$ diventa negativo per qualsiasi $a_{12} > 0$, e quindi va a ridurre la somma positiva dei primi due addendi. Per semplicità, *restringiamo Q alla bisettrice del secondo e quarto ortante* ponendo $y = -x$, ovvero mettiamoci "al centro" dei due ortanti incriminati, dove il peso complessivo (in valore assoluto) dell'addendo $2a_{12}xy$ è più rilevante. Sostituendo $-x$ al posto di y in (5.4) otteniamo la funzione di una sola variabile:[9]

$$q(x) = 2(1 - a_{12})x^2 \tag{5.5}$$

che rappresenta la forma quadratica Q ristretta alla retta $y = -x$. Il grafico di (5.5) è l'intersezione fra il grafico di Q e il piano verticale passante per la retta $y = -x$, ed è una parabola orientata verso l'alto se $a_{12} < 1$, una parabola orientata verso il basso se $a_{12} > 1$ e corrisponde alla costante nulla se $a_{12} = 1$. Deduciamo che se $a_{12} > 1$, la nostra forma quadratica originale Q assume valori ovunque negativi sulla bisettrice del

[9]Utilizzando gli strumenti discussi nel Paragrafo 4.6 possiamo leggere la sostituzione di $-x$ al posto di y come costruzione della funzione composta (di una sola variabile) $q(t) = Q[x(t), y(t)]$ in cui si ponga $x(t) = t$ e $y(t) = -t$. Alternativamente, possiamo pensare a q come alla restrizione di Q sulla retta uscente dall'origine individuata dalla direzione definita dal versore $v = \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$.

secondo e quarto ortante (esclusa l'origine); ma poiché sappiamo che $Q(x, y) > 0$ per ogni coppia (x, y) di coordinate del primo e del terzo ortante (di nuovo esclusa l'origine), siamo in grado di affermare che, se $a_{12} > 1$, l'origine è senz'altro un punto di sella. Viceversa, se $a_{12} < 1$ l'origine rimane il punto di minimo assoluto per Q.

La Figura 5.4 descrive i grafici della forma quadratica Q in (5.4) per alcuni valori di a_{12}, mettendo in evidenza la restrizione q di Q alla retta r definita da $y = -x$ (la curva in nero sul grafico di Q). La sequenza di grafici nella figura vuole fornire l'intuizione *dinamica* di come il grafico di partenza venga progressivamente deformato al crescere del parametro a_{12}. La Figura 5.4(a) riporta il caso in cui $a_{12} = 0$ e quindi il grafico di Q è il paraboloide simmetrico che già conosciamo, mentre la restrizione alla retta r è la parabola orientata verso l'alto $q(x) = 2x^2$; *l'origine è l'unico punto di minimo assoluto.* In Figura 5.4(b) $a_{12} = 1/2 < 1$ e pertanto la deformazione del grafico di partenza dovuta a un valore positivo (ma piccolo rispetto ai parametri $a_{11} = 1$ e $a_{22} = 1$) di a_{12} si limita a un suo "allungamento rispetto alla bisettrice r", le sezioni orizzontali del grafico di Q diventano ellissi anziché cerchi e la restrizione alla retta r è la parabola $q(x) = x^2$, sempre orientata verso l'alto ma meno pronunciata della precedente; *l'origine rimane ancora l'unico punto di minimo assoluto.* Se aumentiamo ulteriormente il valore del parametro a_{12} fino a raggiungere il *valore di soglia* $a_{12} = 1$, uguale a quello di entrambi i parametri a_{11} e a_{22}, l'"allungamento" del grafico precedente rispetto alla retta r diventa così pronunciato che esso addirittura "si sdraia" sulla bisettrice stessa, producendo il grafico a forma di "grondaia" di Figura 5.4(c), un oggetto che non avevamo ancora incontrato; la restrizione alla retta r non è più una parabola orientata verso l'alto, bensì è la costante nulla $q \equiv 0$ (la parabola del caso precedente si è "interamente distesa" sulla retta reale), e *tutti i punti sulla bisettrice r sono punti di minimo assoluto* (in senso debole); in altre parole, il minimo assoluto $Q(x, y) = 0$ non è più unico (raggiunto solamente nell'origine), bensì è raggiunto su tutti i punti della retta r. Incrementi ulteriori di a_{12} hanno l'effetto di "trascinare" ancora di più verso il basso il grafico di Q in prossimità della bisettrice r, fino a introdurre valori negativi per la Q (che finora si era mantenuta su valori non negativi), come illustrato dalla Figura 5.4(d) per $a_{12} = 2 > 1$: la restrizione alla retta r è la parabola orientata verso il basso $q(x) = -2x^2$, e pertanto *l'origine diventa un punto di sella, cessando di essere il (o un) punto di minimo assoluto.*

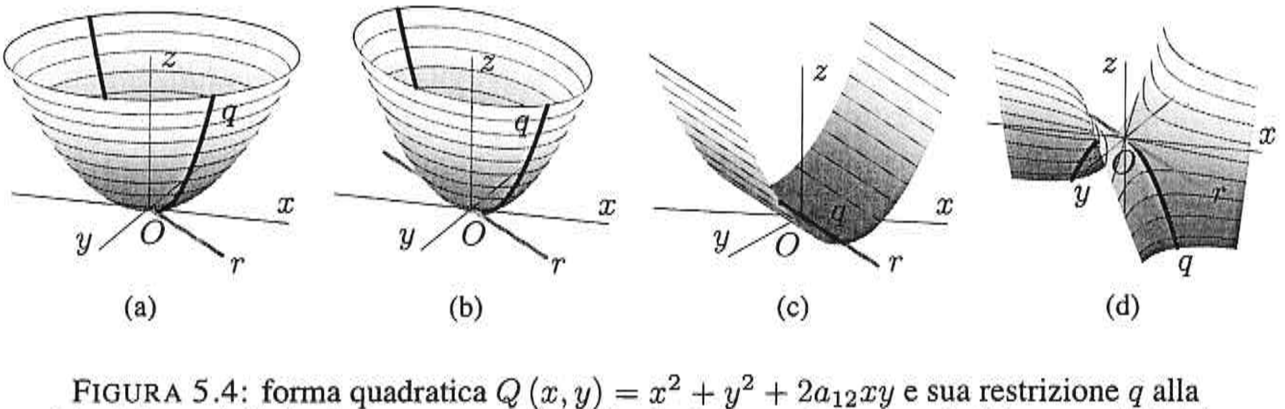


FIGURA 5.4: forma quadratica $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2a_{12}xy$ e sua restrizione q alla bisettrice r definita da $y = -x$ per diversi valori di a_{12}, (a) $a_{12} = 0$, (b) $a_{12} = 1/2$, (c) $a_{12} = 1$, (d) $a_{12} = 2$.

Completiamo il quadro classificando in modo rigoroso le forme quadratiche in tutti i casi possibili, anche i casi particolari simili a quello di Figura 5.4(c) che finora avevamo trascurato.

5.4.2 Natura delle forme quadratiche

La Figura 5.4 comprende sostanzialmente tutti i tipi di grafico che una forma quadratica di due variabili può avere. È importante classificare questi grafici in base alla proprietà che l'origine sia l'unico punto di massimo o di minimo (assoluto), ovvero ci siano infiniti punti di massimo o minimo (sempre assoluto), inclusa l'origine, come in Figura 5.4(c), oppure l'origine sia un punto di sella e pertanto non sia un punto né di massimo né di minimo, come in Figura 5.4(d). Tenendo conto delle tre situazioni appena descritte, sostanzialmente le forme quadratiche possono esibire cinque tipologie di curvatura (grafico) distinte, che definiamo nel caso generale di forme quadratiche $Q(x)$ di n variabili, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ciascuna di esse caratterizza la **natura della forma quadratica** Q.

DEFINIZIONE 5.4 La forma quadratica $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, espressa da $Q(x) = x^T Ax$, dove $A(n \times n)$ è una matrice simmetrica, si dice:

1. **definita positiva** se $Q(x) = x^T Ax > 0$ per ogni[10] $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ [l'origine $O = (0, 0, \dots, 0)$ è l'unico punto di *minimo assoluto*];
2. **definita negativa** se $Q(x) = x^T Ax < 0$ per ogni $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ [l'origine $O = (0, 0, \dots, 0)$ è l'unico punto di *massimo assoluto*];
3. **semidefinita positiva** se $Q(x) = x^T Ax \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed esiste un punto (in realtà infiniti) $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Q(x) = x^T Ax = 0$ [il *minimo assoluto*, in senso debole, è raggiunto su infiniti punti, inclusa l'origine $O = (0, 0, \dots, 0)$];
4. **semidefinita negativa** se $Q(x) = x^T Ax \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed esiste un punto (in realtà infiniti) $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Q(x) = x^T Ax = 0$ [il *massimo assoluto*, in senso debole, è raggiunto su infiniti punti, inclusa l'origine $O = (0, 0, \dots, 0)$];
5. **indefinita** se esistono due punti $x^0 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ e $x^1 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tali che $Q(x^0) = (x^0)^T Ax^0 > 0$ e $Q(x^1) = (x^1)^T Ax^1 < 0$ [l'origine $O = (0, 0, \dots, 0)$ è un *punto di sella*].

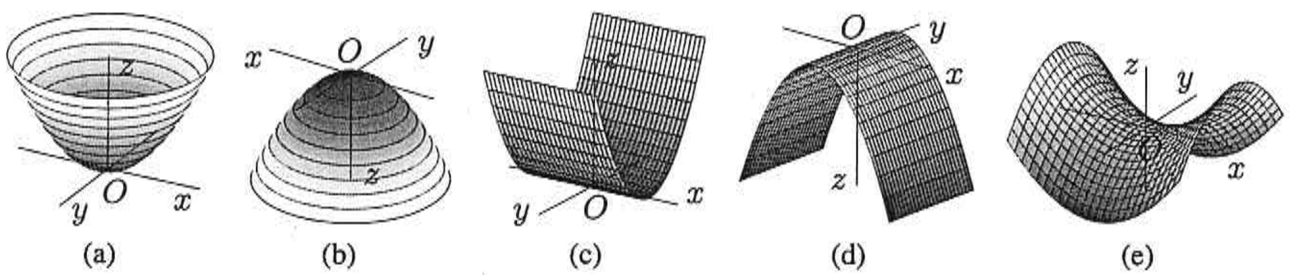


FIGURA 5.5: forme quadratiche, (a) $Q(x, y) = x^2 + y^2$ è definita positiva; (b) $Q(x, y) = -x^2 - y^2$ è definita negativa; (c) $Q(x, y) = y^2$ è semidefinita positiva; (d) $Q(x, y) = -x^2$ è semidefinita negativa; (e) $Q(x, y) = x^2 - y^2$ è indefinita.

[10]Con $x \neq 0$ intendiamo qui $x^T \neq (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, cioè x diverso dal *vettore nullo* (l'origine O).

La Figura 5.5 riporta, nell'ordine, un esempio di ciascuna delle tipologie previste dalla Definizione 5.4 per una *forma quadratica di due variabili*, $Q(x, y)$. Si noti la forma del grafico quando è semidefinita negativa [Figura 5.5(d)]: esso si presenta come una "galleria". Osserviamo che le forme quadratiche semidefinite comprendono anche le specificazioni in cui $a_{12} = 0$ e uno dei parametri a_{11} o a_{22} è nullo, casi particolari che in precedenza avevamo trascurato.

5.4.3 Segno della matrice che definisce una forma quadratica

Il caso di due variabili

Continuiamo lo studio della forma quadratica di due variabili (5.3) con l'obiettivo di stabilire una *soglia generale*, espressa in termini di peso relativo del parametro a_{12} rispetto al peso dei parametri a_{11} e a_{22}, al di sotto della quale Q risulti essere una forma quadratica *definita*, cioè di tipo corrispondente a uno dei primi due punti della Definizione 5.4, le uniche tipologie a cui siamo realmente interessati. A tal fine sfruttiamo un trucco algebrico. Se ipotizziamo $a_{11} \neq 0$, sommando e sottraendo in (5.3) la stessa quantità $(a_{12}^2/a_{11})\, y^2$ e riarrangiando i termini in modo opportuno otteniamo un'espressione per Q equivalente a quella di partenza ma più adatta ai nostri scopi:

$$
\begin{aligned}
Q(x, y) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + \frac{a_{12}^2}{a_{11}}y^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}y^2 \\
&= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \frac{a_{12}^2}{a_{11}}y^2 + a_{22}y^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}y^2 \\
&= a_{11}\left[x^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}xy + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2 y^2\right] + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)y^2 \\
&= a_{11}\left[x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right]^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)y^2
\end{aligned}
$$

L'ultima espressione ottenuta è composta da due addendi: per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ il primo addendo risulta positivo (negativo) se e solo se $a_{11} > 0$ ($a_{11} < 0$), mentre il secondo addendo risulta positivo (negativo) se e solo se $a_{22} - a_{12}^2/a_{11} > 0$ ($a_{22} - a_{12}^2/a_{11} < 0$). Unendo queste due condizioni possiamo affermare che se le due disuguaglianze $a_{11} > 0$ e $a_{22} > a_{12}^2/a_{11}$ valgono contemporaneamente, $Q(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ e pertanto abbiamo stabilito (una coppia di) condizioni sufficienti affinché valga il primo punto della Definizione 5.4, ovvero affinché Q sia definita positiva. Si noti come la coppia di disuguaglianze $a_{11} > 0$ e $a_{22} > a_{12}^2/a_{11}$ implichi automaticamente che anche $a_{22} > 0$ deve valere, confermando l'intuizione grafica che una forma quadratica definita positiva debba per forza avere entrambi i parametri a_{11} e a_{22} positivi. Discorso simmetrico per le forme quadratiche definite negative: $a_{11} < 0$ e $a_{22} < a_{12}^2/a_{11}$ costituiscono condizioni sufficienti affinché valga il secondo punto della Definizione 5.4.

Se riscriviamo la seconda condizione, $a_{22} > a_{12}^2/a_{11}$, come $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$, osserviamo che essa rimane sempre la stessa sia per le forme quadratiche definite positive sia per le forme quadratiche definite negative.[11] Pertanto, l'unico criterio per distinguere le definite positive dalle definite negative è fornito dal segno di a_{11}, mentre il *valore di soglia* che stabilisce quando il *peso relativo del parametro* a_{12} *è inferiore al peso dei parametri* a_{11} e a_{22} in modo da caratterizzare le forme quadratiche definite (positive e negative) è la condizione generale: $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$. In altre parole, per avere una forma quadratica definita (positiva o negativa) il peso del (quadrato del) parametro a_{12}, a prescindere dal suo segno, non deve superare il prodotto degli altri due parametri, $a_{11}a_{22}$. Ricordando che $a_{12} = a_{21}$, questa condizione può essere riscritta nella forma $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$, ovvero:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \tag{5.6}$$

Tenendo presente che i quattro coefficienti a_{ij} costituiscono la matrice A che definisce $Q(x, y)$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

riconosciamo immediatamente nel termine di sinistra della (5.6) un oggetto che abbiamo studiato nel Paragrafo 2.6.1: *il determinante di* A, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ [Formula (2.19)]. La condizione (5.6), dunque, è stabilita dal *segno di* $\det(A)$.

Poiché possiamo pensare ad a_{11} come al determinante della matrice 1×1 formata dall'unico coefficiente a_{11}, $[a_{11}]$ [Formula (2.18)], ci rendiamo conto che la natura della forma quadratica di due variabili, $Q(x, y)$, definita in (5.3) dipende da condizioni che coinvolgono i *segni dei determinanti* di due matrici quadrate: la matrice $[a_{11}]$, e la matrice A stessa, che possiamo immaginare come un "allargamento" della matrice $[a_{11}]$ verso sud-est.

Il caso di n variabili

Il prossimo Teorema 5.3 generalizza il risultato che abbiamo appena dimostrato alle forme quadratiche di n variabili, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definite da matrici $A(n \times n)$, $Q(x) = x^T Ax$. La natura di Q viene stabilita mediante lo studio dei segni dei determinanti di tutte le sottomatrici quadrate disposte per dimensione crescente sulla diagonale principale di A da nord-ovest verso sud-est.

DEFINIZIONE 5.5 (SOTTOMATRICI E MINORI PRINCIPALI) Data una matrice quadrata $A(n \times n)$, la sottomatrice quadrata di dimensione $k \times k$ ottenuta eliminando $n - k$ colonne e le *corrispondenti* $n - k$ righe si dice **sottomatrice principale** di A di dimensione $k \times k$, e il suo determinante si dice **minore principale** di A di ordine k.

[11] I coefficienti a_{11} e a_{22} devono avere lo stesso segno dal momento che $a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \geq 0$ implica $a_{11}a_{22} > 0$.

ESEMPIO 5.6 Una matrice di dimensione 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ammette un minore principale di ordine 3, $\det(A)$ stesso; tre minori principali di ordine 2: 1) $\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right)$, riferito alla sottomatrice principale ottenuta eliminando l'ultima colonna e l'ultima riga, 2) $\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$, riferito alla sottomatrice principale ottenuta eliminando la seconda colonna e la seconda riga, e 3) $\det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$, riferito alla sottomatrice principale ottenuta eliminando la prima colonna e la prima riga; e infine tre minori principali di ordine 1 che corrispondono agli elementi sulla diagonale principale: 1) $\det(a_{11}) = a_{11}$, 2) $\det(a_{22}) = a_{22}$ e 3) $\det(a_{33}) = a_{33}$, riferiti alle matrici ottenute rispettivamente eliminando le ultime due colonne e righe, la prima e l'ultima colonna e la prima e l'ultima riga, e la prime due colonne e righe.

OSSERVAZIONE 5.1 Le sottomatrici quadrate che non sono simmetriche rispetto alla diagonale principale non c'entrano nulla, l'aggettivo *principale* si riferisce proprio alla suddetta diagonale. Ad esempio $\det(a_{31})$ *non è un minore principale*, così come non lo è $\det\left(\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\right)$. I minori principali si riferiscono a matrici ottenute eliminando *le colonne e le righe nella stessa posizione*, ad esempio la colonna i e la riga i, la colonna j e la riga j ecc.; la matrice quadrata ottenuta eliminando, ad esempio, la colonna j e la riga i, con $i \neq j$, non è una sottomatrice principale.

Si invita il lettore ad elencare tutti i minori principali di una matrice 4×4.

In realtà, come abbiamo avuto modo di subodorare in precedenza, siamo interessati a un sottoinsieme dei minori principali di una matrice quadrata: quelli riferiti alle matrici che si "allargano" in dimensione (sono di ordine crescente) procedendo sulla diagonale da nord-ovest verso sud-est.

DEFINIZIONE 5.6 (SOTTOMATRICI E MINORI PRINCIPALI DI NORD-OVEST) Data una matrice quadrata $A\,(n \times n)$, la sottomatrice principale di dimensione $k \times k$ ottenuta eliminando *le ultime* $n - k$ colonne e *le ultime* $n - k$ righe si dice **sottomatrice principale di nord-ovest** di A di dimensione $k \times k$ e si indica[12] con A_k; il suo determinante, $\det(A_k)$, si dice **minore principale di nord-ovest** di A di ordine k.

[12] Attenzione a non confondere A_k con A_{ij}, simbolo usato per indicare la sottomatrice di dimensione $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna di A, con i e j qualsiasi (Notazione 2.2).

Una matrice $A\ (n \times n)$ ha n sottomatrici principali di nord-ovest:

$$A_1 = a_{11} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \dots \qquad A_n = A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

rispettivamente di dimensione $1 \times 1, 2 \times 2, \dots, n \times n$; di conseguenza la stessa matrice ha anche n minori principali di nord-ovest.

Siamo pronti per enunciare, senza dimostrarlo, il risultato principale di questo paragrafo.

TEOREMA 5.3 (SYLVESTER-JACOBI) La forma quadratica $Q(x) = x^T Ax$ definita dalla matrice simmetrica $A\,(n \times n)$, è:

1. *definita positiva* se e solo se tutti gli n minori principali di nord-ovest di A sono (strettamente) positivi: $\det(A_1) > 0$, $\det(A_2) > 0, \dots, \det(A_n) > 0$;
2. *definita negativa* se e solo se gli n minori principali di nord-ovest di A sono tutti non nulli e hanno segno alterno a partire dal segno negativo: $\det(A_1) < 0$, $\det(A_2) > 0, \dots, (-1)^n \det(A_n) > 0$, ovvero i minori principali di nord-ovest *di ordine dispari hanno segno (strettamente) negativo* e i minori principali di nord-ovest *di ordine pari hanno segno (strettamente) positivo*;
3. *indefinita* se almeno un minore principale di nord-ovest di A è diverso da zero ma il suo segno non rispetta nessuna delle due sequenze precedenti; ciò avviene, ad esempio, quando un minore principale di nord-ovest di ordine pari è (strettamente) negativo, oppure se un minore principale di nord-ovest di ordine dispari è (strettamente) negativo ma esiste un altro minore principale di nord-ovest di ordine dispari (strettamente) positivo.

La natura di $Q(x) = x^T Ax$ si identifica dunque con sequenze specifiche di segni dei minori principali di nord-ovest della matrice A; per questo motivo *parleremo indifferentemente di* **natura della forma quadratica** Q oppure di **segno della matrice simmetrica** A che la definisce.

I punti 1 e 2 del Teorema 5.3 applicati alla forma quadratica di due variabili $Q(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$ equivalgono alle condizioni ricavate in precedenza: 1) a_{11}, che è un minore principale di nord-ovest di ordine *dispari*, positivo se Q è definita positiva e negativo se Q è definita negativa; 2) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, sempre positivo, sia che Q sia definita positiva o definita negativa, perché $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A_2) = \det(A)$ è un minore principale di nord-ovest di ordine *pari*.

Il Teorema 5.3 non comprende tutti i casi possibili perché non dice nulla del caso in cui almeno un minore principale di nord-ovest è nullo ma gli altri rispettano una sequenza del tipo 1 o 2. In questa circostanza si può certamente escludere che Q sia definita, ma non siamo in grado di stabilire se è semidefinita (positiva o negativa) oppure indefinita. Per chiarire quest'ultimo punto, è necessario studiare il segno di *tutti i minori principali*, i minori principali di nord-ovest non bastano più.

TEOREMA 5.4 La forma quadratica $Q(x) = x^T Ax$ definita dalla matrice simmetrica $A(n \times n)$, è:

1. *semidefinita positiva* se e solo se almeno un minore principale di nord-ovest è nullo e *tutti i minori principali* (non solo quelli di nord-ovest) di A sono *non negativi* (cioè positivi o nulli);
2. *semidefinita negativa* se e solo se almeno un minore principale di nord-ovest è nullo e ogni minore principale (non solo quelli di nord-ovest) di A di *ordine dispari è non positivo* (cioè negativo o nullo) e ogni minore principale di A di *ordine pari è non negativo* (cioè positivo o nullo).

I Teoremi 5.3 e 5.4 non sono di facile lettura. Cerchiamo di riordinare le idee applicando i suddetti teoremi ad alcuni casi possibili per una matrice di dimensione 4×4.

ESEMPIO 5.7 Consideriamo alcune situazioni possibili per una matrice simmetrica $A(4 \times 4)$.

1. Se $\det(A_1) > 0$, $\det(A_2) > 0$, $\det(A_3) > 0$ e $\det(A_4) = \det(A) > 0$, chiaramente vale il punto 1 del Teorema 5.3 e deduciamo che A è *definita positiva.*
2. Se $\det(A_1) < 0$, $\det(A_2) > 0$, $\det(A_3) < 0$ e $\det(A) > 0$, allora vale il punto 2 del Teorema 5.3 e deduciamo che A è *definita negativa.*
3. Se $\det(A_1) < 0$, $\det(A_2) > 0$, $\det(A_3) > 0$ e $\det(A) > 0$, allora vale il punto 3 del Teorema 5.3 e deduciamo che A è *indefinita*; ci sono due interpretazioni alternative possibili: da un lato, poiché tutti i minori principali di nord-ovest sono positivi tranne il primo, possiamo pensare ad una 'mancata' definita positiva a causa di A_1, dall'altro possiamo anche leggere una 'mancata' definita negativa a causa di A_3 [se $\det(A_3)$ fosse negativo, per il punto 2 del Teorema 5.3 A sarebbe definita negativa].
4. Se $\det(A_1) < 0$, $\det(A_2) < 0$, $\det(A_3) < 0$ e $\det(A) < 0$, allora vale il punto 3 del Teorema 5.3 a causa di A_2 e $A_4 = A$ e deduciamo che A è *indefinita.*
5. Se $\det(A_1) = 0$, $\det(A_2) < 0$, $\det(A_3) = 0$ e $\det(A) < 0$, allora siamo nella stessa situazione del punto precedente: A_2 e $A_4 = A$ rendono A *indefinita.*
6. Se $\det(A_1) > 0$, $\det(A_2) > 0$, $\det(A_3) = 0$ e $\det(A) > 0$, la situazione si complica: certamente, a causa di A_3, A non può essere definita, così come non può essere semidefinita negativa a causa di A_1; per stabilire se A è semidefinita positiva oppure indefinita è necessario applicare il Teorema 5.4 e calcolare tutti i minori principali di A, non solo quelli di nord-ovest: se nessuno dei minori principali è negativo, allora A è semidefinita positiva, mentre se almeno uno di essi è negativo, allora A è indefinita.
7. Se $\det(A_1) < 0$, $\det(A_2) = 0$, $\det(A_3) < 0$ e $\det(A) = 0$, possiamo affermare che A non è definita a causa di A_2 e $A_4 = A$, così come non può essere semidefinita positiva a causa di A_1 e A_3; per stabilire se A è semidefinita negativa oppure indefinita è necessario applicare anche in questo caso il Teorema 5.4 e calcolare tutti i minori principali di A: se nessuno dei minori principali di ordine dispari è positivo e nessuno dei minori principali di ordine pari è negativo, allora A è semidefinita negativa, altrimenti A è indefinita.

Matrici diagonali

Prima di passare agli esempi, illustriamo il Teorema 5.3 giustificando le sequenze di segni dei minori principali di nord-ovest ivi stabilite nel caso particolare delle matrici diagonali. Questa tipologia di matrici definisce le forme quadratiche più semplici, quelle costituite dalla somma dei soli termini al quadrato (gli addendi 'misti', $a_{ij}x_ix_j$, per $i \neq j$, sono nulli):

$$\begin{aligned} Q(x) = x^T A x &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Poiché tutte le sottomatrici principali di A sono anch'esse matrici diagonali, tutti i minori principali di A sono semplicemente prodotti di coefficienti della diagonale: $\det(A_1) = a_{11}$, $\det(A_2) = a_{11}a_{22}$, $\det(A_3) = a_{11}a_{22}a_{33}$, $\det(A_n) = \det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ ecc..

Osservando il termine in (5.7), si vede subito che Q è definita positiva se e solo se tutti i coefficienti a_{ii} sono positivi, ma allora anche tutti i loro prodotti (e quindi tutti i minori principali di nord-ovest) sono positivi e ciò corrisponde alla sequenza descritta al punto 1 del Teorema 5.3. Viceversa, Q è definita negativa se e solo se tutti i coefficienti a_{ii} sono negativi; questo implica che il loro prodotto è positivo quando ne moltiplichiamo un numero pari mentre è negativo se ne moltiplichiamo un numero dispari, determinando così la sequenza di segni alternati per i minori principali di nord-ovest descritta al punto 2 del Teorema 5.3. Se esistono due coefficienti distinti, $a_{ii} \neq a_{jj}$, con segno opposto, la (5.7) mostra chiaramente che Q è indefinita dal momento che, fissati due numeri $x_i, x_j \neq 0$, nei punti distinti $(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ e $(0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ Q assume valori di segno opposto; in questo caso i prodotti fra coefficienti a_{ii} generano una sequenza di segni incompatibile con quelle dei segni dei minori principali di nord-ovest descritte nei punti 1 e 2 del Teorema 5.3, a conferma di quanto stabilito dal punto 3 del teorema stesso.

ESEMPIO 5.8 Studiamo la natura delle seguenti forme quadratiche.

1. $Q(x, y) = -5x^2 - 3y^2 + 6xy$ è identificata dalla matrice $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$; vale $\det(A_1) = -5 < 0$ e $\det(A_2) = \det(A) = 15 - 9 = 6 > 0$, da cui deduciamo che, per il punto 2 del Teorema 5.3, Q è definita negativa.
2. $Q(x, y) = 2x^2 + 8y^2 + 8xy$ è espressa dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$; vale $\det(A_1) = 2 > 0$ e $\det(A_2) = \det(A) = 16 - 16 = 0$, per cui siamo costretti a considerare tutti i minori principali (Teorema 5.4), cioè anche $\det(a_{22}) = 8 > 0$

(e basta, non ce ne sono altri), deducendo che si tratta di una forma quadratica semidefinita positiva (punto 1 del Teorema 5.4).

3. $Q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 2yz$ è rappresentata dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; vale $\det(A_1) = 2 > 0$, $\det(A_2) = 2 - 1 = 1 > 0$ e (sviluppando la terza riga) $\det(A_3) = \det(A) = (-1)^{3+2}(2-0) + (-1)^{3+3} 3(2-1) = -2 + 3 = 1 > 0$, da cui deduciamo che, per il punto 1 del Teorema 5.3, Q è definita positiva.
4. La matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -5/2 \\ 1 & -5/2 & 0 \end{bmatrix}$ definisce la forma quadratica $Q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 5x_2x_3$; vale $\det(A_1) = -1 < 0$ e $\det(A_2) = 3 - 4 = -1 < 0$, e questo è sufficiente per stabilire che Q è indefinita (punto 3 del Teorema 5.3).

5.5 Condizioni sufficienti del secondo ordine

Il Teorema 5.3 fornisce un criterio per stabilire quando l'origine è l'*unico* punto di minimo o di massimo assoluto oppure l'unico punto di sella per una forma quadratica definita (positiva o negativa) o indefinita. Applicando questo risultato alla forma quadratica caratterizzante l'espansione di Taylor T_2 di f in un punto stazionario x^*, definita dalla matrice Hessiana di f, $H(x^*)$, possiamo determinare se x^* è un punto estremo oppure no; abbiamo cioè raggiunto l'obiettivo che ci eravamo posti nel Paragrafo 5.3. Notiamo che le forme quadratiche semidefinite, pur mantenendo l'origine come punto di minimo o massimo assoluto (in senso debole), si rivelano insufficienti a garantire che x^* sia effettivamente un punto estremo, non potendo escludere che si tratti di un punto di sella. Una forma quadratica semidefinita coincidente con la costante nulla su una direzione passante per l'origine corrisponde alla situazione di derivata seconda nulla per le funzioni di una variabile.

Per stabilire condizioni sufficienti del secondo ordine per punti di ottimo relativo interno si tratta dunque di studiare la *natura della forma quadratica individuata dalla matrice Hessiana* di f, ovvero *il segno* della matrice stessa, sul punto stazionario x^*; in altre parole, dobbiamo riscrivere le condizioni (sufficienti) espresse nel Teorema 5.3 direttamente in termini di matrice Hessiana.

TEOREMA 5.5 (CONDIZIONI SUFFICIENTI PER UN PUNTO ESTREMO RELATIVO) Sia $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, di classe C^2 e sia $x^* \in \mathrm{Int}(X)$ un *punto stazionario*, cioè tale che $\nabla f(x^*) = (0,0,\ldots,0)$.

1. Se la matrice Hessiana H (ovvero la forma quadratica da essa rappresentata) calcolata nel punto x^* è *definita negativa*, allora x^* è un punto di *massimo relativo* per f.

2. Se la matrice Hessiana H calcolata nel punto x^* è *definita positiva*, allora x^* è un punto di *minimo relativo* per f.
3. Se la matrice Hessiana H calcolata nel punto x^* è *indefinita*, allora x^* non è né un punto di massimo né un punto di minimo, è un *punto di sella*.

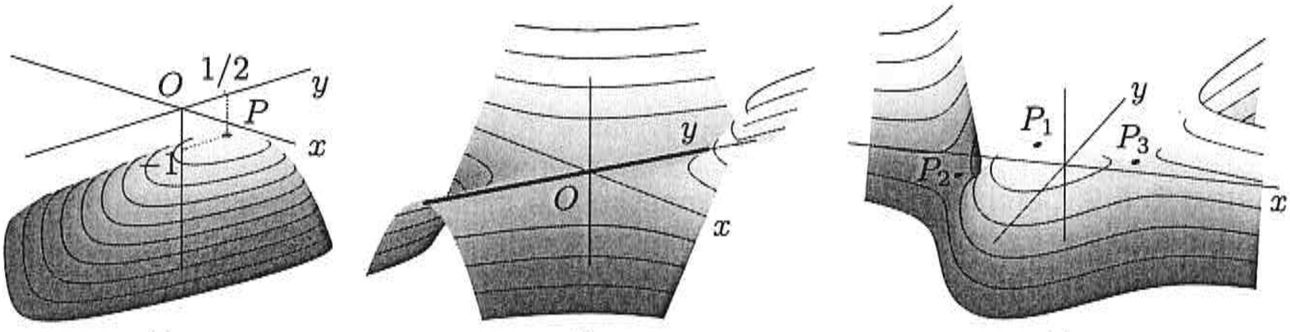
L'ipotesi che f sia di classe C^2 garantisce la simmetria della matrice Hessiana (Teorema 4.2).

ESEMPIO 5.9 Cerchiamo gli eventuali massimi e/o minimi relativi interni delle funzioni già studiate nell'Esempio 5.4 sul loro dominio naturale.

1. L'unico punto stazionario per $f(x,y) = x + 2ey - e^x - e^{2y}$ è $(x^*, y^*) = (0, 1/2)$. La matrice Hessiana è $H = \begin{bmatrix} -e^x & 0 \\ 0 & -4e^{2y} \end{bmatrix}$, che, calcolata in $(x^*, y^*) = (0, 1/2)$, vale $H(0, 1/2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4e \end{bmatrix}$; poiché $\det(H_1) = -1 < 0$ e $\det(H_2) = \det(H) = 4e > 0$ siamo nella situazione descritta dal punto 1 del Teorema 5.3, ovvero H rappresenta una forma quadratica definita negativa, pertanto, per il punto 1 del Teorema 5.5, $(x^*, y^*) = (0, 1/2)$ è un punto di massimo relativo. La Figura 5.6(a) mostra il grafico di f con il massimo P.
2. $f(x,y) = x^2y$ ha infiniti punti stazionari corrispondenti all'asse delle ordinate, cioè tutti i punti del tipo $(x^*, y^*) = (0, y)$. $H = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$ e $H(0, y) = \begin{bmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; applicando il Teorema 5.4 possiamo dedurre che H individua una forma quadratica che è semidefinita positiva per $y > 0$ e semidefinita negativa per $y < 0$, mentre non siamo in grado di dire nulla per $y = 0$. In tutti i casi il Teorema 5.5 è inapplicabile e quindi non siamo in grado di caratterizzare nessuno dei punti stazionari. Il grafico di f è riportato in Figura 5.6(b): dovrebbe essere evidente che tutti i punti sull'asse delle ordinate (evidenziato in grassetto) non sono né massimi né minimi (in senso proprio) né selle.[13]
3. $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - y^2 - 2y$ ha tre punti stazionari: $(0, -1)$, $(-1, 1/2)$ e $(2/3, -1/3)$. $H = \begin{bmatrix} 6(x+y) & 6x \\ 6x & -2 \end{bmatrix}$; pertanto, $H(0, -1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e da $\det(H_1) = -6 < 0$ e $\det(H) = 12 > 0$ deduciamo che $(0, -1)$ è un punto di massimo relativo; $H(-1, 1/2) = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ e poiché $\det(H_1) = -3 < 0$ e $\det(H) = -30 < 0$, $(-1, 1/2)$ è un punto di sella; infine, $H(2/3, -1/3) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $\det(H_1) = 2 > 0$ e $\det(H) = -20 < 0$ implicano

[13] Per essere precisi, l'origine potrebbe essere un punto di sella; in ogni caso, poiché in $(0,0)$ tutte le derivate parziali seconde sono nulle, nessuno dei teoremi del paragrafo precedente ci consente di stabilirlo con esattezza.

che anche $(2/3, -1/3)$ è un punto di sella. In Figura 5.6(c) sono evidenziati i punti P_1, P_2 e P_3, corrispondenti a $(0, -1)$, $(-1, 1/2)$ e $(2/3, -1/3)$ rispettivamente, sul grafico di f.



(a) (b) (c)

FIGURA 5.6: grafici delle funzioni dell'Esempio 5.9 con evidenziati i punti estremi, (a) $f(x, y) = x + 2ey - e^x - e^{2y}$, (b) $f(x, y) = x^2 y$, (c) $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y - y^2 - 2y$.

4. $f(x, y, z) = \ln x + \ln(y + 1) + e^{-yz} - x + y$ ha l'unico punto stazionario $(1, 0, 2)$.

$$H = \begin{bmatrix} -1/x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/(y+1)^2 + z^2 e^{-yz} & (yz-1) e^{-yz} \\ 0 & (yz-1) e^{-yz} & y^2 e^{-yz} \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$H(1, 0, 2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

da $\det(H_1) = -1 < 0$ e $\det(H_2) = -3 < 0$ segue che $(1, 0, 2)$ è un punto di sella.

5.6 Funzioni obiettivo concave (convesse)

Il grafico di una funzione concava sul suo dominio – o su un vincolo – ha la forma di un'unica "collina" (o meglio, poiché stiamo ragionando in termini 'globali', "montagna"), ammettendo così al più un *unico* punto di massimo assoluto ed escludendo a priori l'esistenza di massimi relativi. Inoltre, se esiste un punto stazionario, la concavità diventa addirittura condizione sufficiente per l'*esistenza* del massimo assoluto senza dover ricorrere al Teorema di Weierstrass: il punto di massimo assoluto è proprio il punto stazionario stesso. Situazione "ribaltata" per il minimo assoluto, dove la convessità gioca un ruolo equivalente a quello della concavità per il massimo.

5.6.1 Definizione di concavità/convessità

Per poter parlare di concavità/convessità per funzioni di n variabili sono necessarie restrizioni analoghe a quelle viste per le funzioni di una sola variabile: poiché la definizione utilizza tutti i punti appartenenti al segmento congiungente qualsiasi coppia di punti nell'insieme ammissibile (sia esso il dominio naturale o un vincolo), tutte le coppie di punti devono essere tali che il segmento che li congiunge sia anch'esso tutto contenuto nell'insieme ammissibile. Questa necessità richiama immediatamente alla mente la Definizione 4.6, che in verità è stata introdotta proprio per questo scopo: l'insieme ammissibile delle funzioni concave/convesse dovrà essere necessariamente un *insieme convesso*. Dal momento che tutti e soli gli insiemi convessi della retta reale sono intervalli, la restrizione delle funzioni di n variabili a insiemi convessi corrisponde, per le funzioni di una variabile, alla richiesta che l'insieme di definizione delle funzioni concave/convesse sia un *intervallo*.

La prossima definizione di concavità/convessità per funzioni di n variabili esprime analiticamente l'idea contenuta nella definizione per funzioni di una variabile e che avevamo già illustrato nel primo volume: dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *convesso*, $f : X \to \mathbb{R}$ è concava (convessa) se per ogni coppia di punti (vettori) $x, y \in X$ il segmento congiungente i punti corrispondenti sul grafico di f – cioè i punti di $\mathbb{R}^{n+1}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x))$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n, f(y))$ – sta tutto sotto (sopra) il grafico di f.

DEFINIZIONE 5.7 (FUNZIONE CONCAVA/CONVESSA) Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *convesso*, diremo che $f : X \to \mathbb{R}$ è (debolmente) **concava** se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ e per ogni scalare α tale che $0 \leq \alpha \leq 1$ vale:

$$f[\alpha x + (1-\alpha) y] \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{5.8}$$

Diremo che $f : X \to \mathbb{R}$ è **strettamente concava** se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ distinti, $x \neq y$, e per ogni scalare α tale che $0 < \alpha < 1$ vale:

$$f[\alpha x + (1-\alpha) y] > \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{5.9}$$

Diremo che f è rispettivamente **convessa e strettamente convessa** quando le disuguaglianze nelle (5.8) e (5.9) sono invertite.

Per α fissato, l'argomento del termine di sinistra della (5.8), il vettore $\alpha x + (1-\alpha) y$, costituisce un punto sul segmento congiungente i vettori di $\mathbb{R}^n$ x e y. Per ogni valore di α compreso tra 0 e 1, $\alpha x + (1-\alpha) y$ individua tutti i punti del segmento congiungente x e y, segmento tutto contenuto in $X \subseteq \mathbb{R}^n$; ad esempio, i due estremi del segmento (i punti x e y stessi) si ottengono per $\alpha = 1$ e $\alpha = 0$ rispettivamente. Il termine di sinistra, dunque, al variare di α considera tutti i valori assunti da f lungo il segmento congiungente x e y, corrispondenti a *punti di* $\mathbb{R}^{n+1}$ *che stanno sul grafico di* f. Il termine a destra, invece, al variare di α fra 0 e 1 individua tutti i valori definiti dal segmento congiungente i punti di $\mathbb{R}^{n+1}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x))$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n, f(y))$, corrispondenti ai *punti di* $\mathbb{R}^{n+1}$ *che stanno sul segmento stesso*. La disuguaglianza (5.8), dunque, esprime analiticamente proprio la proprietà che il grafico di f si trova sopra – o, al più, coincide

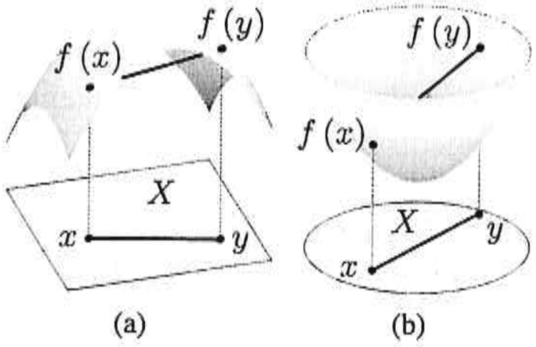


FIGURA 5.7: (a) funzione concava; (b) funzione convessa.

con esso – il segmento congiungente due punti appartenenti al grafico di f.[14] Valgono considerazioni analoghe per la disuguaglianza stretta (5.9) e per le proprietà di convessità e stretta convessità.

La Figura 5.7 illustra la Definizione 5.7 mostrando i grafici di due *funzioni di due variabili*: una strettamente concava (Figura 5.7(a)) e una strettamente convessa (Figura 5.7(b)). Per comodità, indichiamo tali funzioni con $f(x_1, x_2)$ anziché usare la notazione usuale $f(x, y)$. Nelle figure i punti dello spazio $\mathbb{R}^3$ $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ e $(y_1, y_2, f(y_1, y_2))$ sono sintetizzati dai simboli $f(x)$ e $f(y)$. Si noti il ruolo della *convessità degli insiemi ammissibili* X (da non confondersi con la proprietà di *convessità di una funzione*!): essa garantisce l'esistenza dei punti del grafico di f in corrispondenza di tutti i punti che costituiscono il segmento congiungente x e y (riportato in basso, dentro la superficie grigia che rappresenta $X \subseteq \mathbb{R}^2$), in modo da poterli confrontare con i punti del segmento congiungente i punti di $\mathbb{R}^3$ $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ e $(y_1, y_2, f(y_1, y_2))$ (riportato in alto, in prossimità del grafico di f).

Dalla Definizione 5.7 segue immediatamente che:

$$f \text{ concava} \quad \Longleftrightarrow \quad -f \text{ convessa}$$

poiché, moltiplicando entrambi i termini delle (5.8) e (5.9) per -1, la disuguaglianza si inverte.

Come per le funzioni di una variabile, la definizione di concavità/convessità prescinde dalla proprietà di differenziabilità. Nel seguito concentreremo la nostra analisi su funzioni concave/convesse che siano anche differenziabili.

5.6.2 Caratterizzazione per funzioni differenziabili

Enunciamo condizioni sufficienti (e necessarie e sufficienti) per la concavità/convessità analoghe a quelle basate sul segno della derivata seconda per le funzioni di una variabile.

[14]Fissati x e y, è evidente che il termine di destra è una *funzione lineare* della sola variabile (numerica) α poiché α agisce sui due elementi immagine $f(x)$ e $f(y)$, che rimangono fissi; diversamente, se f è concava, il termine a sinistra si muove in modo *non lineare* al variare di α, dal momento che α agisce sull'argomento di f e non sulla sua immagine.

Si noti la somiglianza fra la (5.8) e la (2.6) che definisce una *funzione lineare*: se poniamo $\beta = 1 - \alpha$ nella seconda e sostituiamo l'uguaglianza al posto della disuguaglianza nella prima, esse coincidono. Possiamo dunque pensare alla (5.8) come ad una generalizzazione della (2.6), e interpretare la concavità come una proprietà di "sopra-linearità" che distorce il grafico della funzione lineare di partenza rendendolo curvo verso il basso, generando, cioè, una "torsione" verso l'alto fra ciascuna coppia di punti x e y.

TEOREMA 5.6 Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e $f : X \to \mathbb{R}$ di classe C^2.

1. **Condizioni sufficienti:**
   (a) se la matrice Hessiana $H(x)$ di f è *definita negativa* per ogni $x \in \text{Int}(X)$ allora f è *strettamente concava*;
   (b) se la matrice Hessiana $H(x)$ di f è *definita positiva* per ogni $x \in \text{Int}(X)$ allora f è *strettamente convessa*.
2. **Condizioni necessarie e sufficienti:**
   (a) f è (debolmente) *concava* se e solo se la matrice Hessiana $H(x)$ di f è *semidefinita negativa* per ogni $x \in \text{Int}(X)$;
   (b) f è (debolmente) *convessa* se e solo se la matrice Hessiana $H(x)$ di f è *semidefinita positiva* per ogni $x \in \text{Int}(X)$.

La prima parte del Teorema 5.6 estende le condizioni del secondo ordine del Teorema 5.5 a tutti i punti interni dell'insieme ammissibile X, senza limitarsi ai punti stazionari. Essendo la concavità/convessità una proprietà *globale*, viene richiesto che la funzione f mantenga ovunque lo stesso tipo di curvatura che assume *localmente* su (in un intorno di) un punto estremo. Se, ad esempio, vale il primo punto del Teorema 5.6, l'espansione di Taylor di secondo grado T_2 ha come componente non lineare [l'ultimo addendo in (4.28)] una forma quadratica definita negativa (strettamente concava) su tutto $\text{Int}(X)$. Viceversa, se vale il secondo punto del Teorema 5.6, T_2 ha come componente non lineare una forma quadratica definita positiva (strettamente convessa) su tutto $\text{Int}(X)$.

La seconda parte del Teorema 5.6 viene interpretata nello stesso modo con l'accortezza di sostituire le forme quadratiche semidefinite al posto di quelle definite nella componente non lineare dell'espansione di Taylor T_2 su tutti i punti interni all'insieme ammissibile.

5.6.3 Altre condizioni sufficienti

Molte funzioni che incontreremo permettono la verifica della concavità/convessità in modo diretto, senza dover ricorrere al Teorema 5.6 che richiede il calcolo di una matrice Hessiana, una noia che, se è possibile, è meglio evitare. I prossimi risultati forniscono semplici criteri per attuare questa verifica; li enunciamo solo per le funzioni concave, poiché le versioni analoghe per funzioni convesse sono facilmente ottenibili ricordando che se f è convessa allora $-f$ è concava.

PROPOSIZIONE 5.1 Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso, $f_i : X \to \mathbb{R}$, per $i = 1, 2, \ldots, m$, sono m funzioni concave e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sono m scalari non negativi, $\alpha_i \geq 0$ per $i = 1, 2, \ldots, m$, allora la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ definita dalla somma delle f_i, ciascuna pesata per il coefficiente α_i:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$$

è concava. Inoltre, f è strettamente concava se *almeno una* delle f_i è strettamente concava e il corrispondente coefficiente α_i è strettamente positivo, $\alpha_i > 0$.

La Proposizione 5.1, che è una conseguenza della Definizione 5.7, stabilisce che la *somma* pesata (da coefficienti non negativi) *di funzioni concave è ancora concava*. La seconda parte asserisce che basta una sola f_i strettamente concava per rendere l'intera somma strettamente concava.

La prossima Proposizione 5.2 a prima vista assomiglia alla precedente, in realtà è profondamente diversa. Per enunciarla abbiamo bisogno della seguente definizione.

DEFINIZIONE 5.8 (RETTANGOLO GENERALIZZATO) Dati n intervalli della retta reale $\mathbb{R}$, $[a_i, b_i]$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, l'insieme:

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

si dice **rettangolo (generalizzato) di $\mathbb{R}^n$**. Chiaramente si tratta di un *insieme convesso* di $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIZIONE 5.2 Siano $f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, n *funzioni di una sola variabile* e α_1, α_2, ..., α_n n scalari non negativi, $\alpha_i \geq 0$. Se ciascuna $f_i(x_i)$ *è concava nella propria variabile* x_i, per $i = 1, \ldots, n$, allora la *funzione di* n *variabili* $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ definita dalla somma pesata delle f_i:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x_i) \tag{5.10}$$

è concava. Inoltre, se *tutte le* $f_i(x_i)$ sono strettamente concave e $\alpha_i > 0$ per ogni $i = 1$, 2, ..., n, allora f è strettamente concava.

La differenza rispetto alla Proposizione 5.1 è che nella Proposizione 5.2 le funzioni da sommare non sono in numero m qualsiasi, sono esattamente n – pari al numero di variabili della funzione somma f – e sono tutte funzioni di una sola variabile, anziché funzioni di n variabili come nella Proposizione 5.1. La seconda parte della Proposizione 5.2 è sostanzialmente diversa dalla seconda parte della Proposizione 5.1: apparentemente richiede la *concavità stretta di tutte le* f_i *e non*, come la Proposizione 5.1, *solo di una di esse*; in realtà, *ciascuna funzione* di una variabile $f_i(x_i)$, pur essendo *strettamente concava rispetto all'unica variabile* x_i, certamente *è solo debolmente concava in* $\mathbb{R}^n$, cioè rispetto all'insieme delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ secondo la Definizione 5.7, perché è costante (e quindi lineare) rispetto a tutte le altre variabili $x_j \neq x_i$. La dimostrazione della Proposizione 5.2 sfrutta la Definizione 5.7.

PROPOSIZIONE 5.3 Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso e $g : X \to \mathbb{R}$ è una *funzione di* n *variabili* concava e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una *funzione di una variabile* crescente e concava, allora la *funzione composta* $f[g(x)]$ è concava.

La dimostrazione utilizza la Definizione 5.7 e la definizione di monotonia in una variabile.

Esempio 5.10 Stabiliamo le eventuali proprietà (globali) di concavità o convessità delle seguenti funzioni sul loro dominio naturale.

1. $f(x,y) = x + 2ey - e^x - e^{2y}$, già studiata negli Esempi 5.4 e 5.9, è strettamente concava sul suo dominio naturale $X = \mathbb{R}^2$ poiché si tratta della somma di due funzioni di una variabile, $f_1(x) = x - e^x$ e $f_2(y) = 2ey - e^{2y}$, entrambe strettamente concave e pertanto vale la Proposizione 5.2 (con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1 > 0$). Verifichiamo questo fatto studiando il segno della matrice Hessiana, $H = \begin{bmatrix} -e^x & 0 \\ 0 & -4e^{2y} \end{bmatrix}$: poiché $\det(H_1) = -e^x < 0$ e $\det(H_2) = \det(H) = 4e^{x+2y} > 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$, il Teorema 5.6 conferma la nostra analisi. La Figura 5.6(a) mostra chiaramente che f è strettamente concava.
2. $f(x,y) = -x^2$, definita su $X = \mathbb{R}^2$, ha il grafico riportato in Figura 5.5(d), da cui evinciamo che si tratta di una funzione soltanto debolmente concava in quanto è costante su tutte le rette parallele all'asse delle ordinate. Richiamando la discussione successiva alla Proposizione 5.2, $-x^2$ è una funzione strettamente concava nella sola variabile x, ma è debolmente concava rispetto a entrambe le variabili x e y. La nostra conclusione è confermata dal segno della matrice Hessiana $H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, chiaramente semidefinita negativa.
3. $f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 7z^2 - \ln(3x + 2y + 7z)$ è strettamente convessa sul dominio naturale $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y + 7z > 0\}$. Per verificarlo possiamo utilizzare le Proposizioni 5.1 – 5.3. L'ultimo addendo, $-\ln(3x + 2y + 7z)$, è una funzione (debolmente) convessa perché è l'opposto della funzione $\ln(3x + 2y + 7z)$, che a sua volta è la funzione composta di $f(w) = \ln(w)$, crescente e concava, e di $g(x,y,z) = 3x + 2y + 7z$, che è lineare e quindi debolmente concava; la nostra conclusione dunque segue dall'applicazione della Proposizione 5.3. I primi tre addendi, $3x^2 + 2y^2 + 7z^2$, costituiscono una funzione strettamente convessa nelle tre variabili x, y e z perché si tratta della somma di tre funzioni di una variabile strettamente convesse: $f_1(x) = 3x^2$, $f_2(y) = 2y^2$ e $f_3(z) = 7z^2$ (Proposizione 5.2). Ma allora, per la seconda parte della Proposizione 5.1, la somma della funzione strettamente convessa $3x^2 + 2y^2 + 7z^2$ con la funzione (debolmente) convessa $-\ln(3x + 2y + 7z)$ è una funzione strettamente convessa. Si verifichino queste conclusioni con il Teorema 5.6 (prendendo nota di quanto più laborioso sia quest'ultimo approccio...).
4. $f(x,y,z) = (xy)^2 + x^2 - 2y - 3z$, definita su $X = \mathbb{R}^3$ non consente l'applicazione di alcun risultato diretto, dal momento che non siamo in grado di stabilire a priori il tipo di curvatura del primo addendo, la funzione composta $(xy)^2$. La matrice Hessiana è:
$$H = \begin{bmatrix} 2y^2 + 2 & 4xy & 0 \\ 4xy & 2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
che, ad esempio, nel punto $(1,1,0)$ è indefinita, come si verifica immediatamente. Possiamo quindi concludere che f non è né concava né convessa.

ESEMPIO 5.11 Data la funzione $f(x,y) = -(x+1)^3 + \mu(x+1)(y+1) - (y+1)^3$ *ristretta all'ortante positivo* $\mathbb{R}^2_+$ e dipendente da un parametro $\mu \in \mathbb{R}$, ci chiediamo se esistono valori del parametro μ per i quali la funzione data è concava su $X = \mathbb{R}^2_+$.

A colpo d'occhio ci rendiamo conto che non sono utilizzabili i risultati diretti, dobbiamo studiare il segno della matrice Hessiana: $H = \begin{bmatrix} -6(x+1) & \mu \\ \mu & -6(y+1) \end{bmatrix}$. Chiaramente $\det(H_1) = -6(x+1) < 0$ sotto l'ipotesi che $x \geq 0$, pertanto dobbiamo trovare i valori di μ, se esistono, tali che $\det(H_2) = \det(H) = 36(x+1)(y+1) - \mu^2 \geq 0$ (la disuguaglianza debole include il caso di concavità debole). Poiché questa disuguaglianza deve valere per ogni punto $(x,y) \in X = \mathbb{R}^2_+$, consideriamo il minimo del primo addendo per ogni (x,y) ammissibile, ovvero risolviamo:

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+} 36(x+1)(y+1)$$

L'insieme ammissibile, $X = \mathbb{R}^2_+$, non è aperto perché contiene la semiretta positiva di entrambi gli assi cartesiani; pertanto, a rigore, non abbiamo ancora gli strumenti per risolverlo. Ciononondimeno, è sufficiente un po' di buon senso per rendersi conto che il minimo assoluto cercato è l'origine $(x,y) = (0,0)$, punto di frontiera per $X = \mathbb{R}^2_+$. Pertanto rimane da risolvere rispetto a μ la disequazione $\mu^2 \leq 36$ che ha come soluzione $\mu \in [-6,6]$. Concludendo, f è strettamente concava per valori di μ compresi fra -6 e 6, mentre è debolmente concava se $\mu = -6$ o se $\mu = 6$.

5.7 Concavità/convessità e punto estremo assoluto

I risultati che assicurano l'unicità del punto estremo assoluto e la sua esistenza in presenza di un punto stazionario sotto l'ipotesi di concavità (convessità) della funzione obiettivo visti nel primo volume valgono anche per funzioni di più variabili. In più variabili assumono ancora più importanza dal momento che nella maggior parte dei problemi economici quando c'è più di una variabile in gioco è troppo restrittivo ipotizzare la compattezza dell'insieme ammissibile per poter applicare il Teorema di Weierstrass (Teorema 5.1). Quando l'insieme ammissibile è aperto e/o non limitato, ovvero non è compatto, la concavità/convessità rimane dunque l'unico strumento a disposizione per garantire l'esistenza dell'ottimo assoluto.

TEOREMA 5.7 Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e $f : X \to \mathbb{R}$ è *strettamente concava (convessa)*, allora *il punto di massimo (minimo)*, se esiste, *è unico*. In altre parole, il massimo (minimo) assoluto viene raggiunto in un solo punto e non esistono massimi (minimi) relativi distinti da esso.

TEOREMA 5.8 Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e $f : X \to \mathbb{R}$ *differenziabile* su $\mathrm{Int}(X)$ e *strettamente concava (convessa)*. Se *esiste un punto stazionario* $x^* \in \mathrm{Int}(X)$, cioè tale che $\nabla f(x^*) = 0 \in \mathbb{R}^n$, allora x^* è l'unico punto di massimo (minimo) assoluto. Inoltre, se f è solo *debolmente concava (convessa)* ma il punto stazionario x^* è unico, allora x^* è l'unico punto di massimo (minimo) assoluto.

Rispetto all'enunciato del teorema analogo in una variabile, nel Teorema 5.8 abbiamo aggiunto una seconda parte che riguarda il caso di funzioni obiettivo debolmente concave/convesse. Essa vale anche per funzioni di una variabile; nel primo volume avevamo omesso questa appendice perché in una sola variabile è una situazione che non si presenta quasi mai.

ESEMPIO 5.12 Rivediamo alcune delle funzioni già studiate nei paragrafi precedenti.

1. Al primo punto dell'Esempio 5.10 avevamo stabilito che la funzione $f(x, y) = x + 2ey - e^x - e^{2y}$ è strettamente concava sul suo dominio naturale $\mathbb{R}^2$. Applicando il Teorema 5.8, siamo quindi ora in grado di affermare che il punto stazionario $(x^*, y^*) = (0, 1/2)$, già calcolato nell'Esempio 5.4 e classificato come punto di massimo relativo nell'Esempio 5.9, è in realtà proprio l'unico punto di massimo assoluto. La Figura 5.6(a) conferma questo fatto.
2. Al secondo punto dell'Esempio 5.10 avevamo visto che la funzione $f(x, y) = -x^2$, che, come mostra la Figura 5.5(d), è una forma quadratica semidefinita negativa, è (debolmente) concava: esistono infiniti punti stazionari (in corrispondenza dell'asse delle ordinate) e quindi ci troviamo in un caso particolare in cui il Teorema 5.8 non è applicabile. Per essere precisi, è la parte che riguarda l'unicità del massimo a non essere applicabile, dal momento che ci sono (infiniti) punti stazionari distinti, però la parte sull'esistenza del massimo assoluto rimane valida: la Figura 5.5(d) mostra chiaramente che il massimo assoluto esiste ed è raggiunto da tutti i punti del tipo $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$.
3. Al terzo punto dell'Esempio 5.10 avevamo scoperto che la funzione $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 7z^2 - \ln(3x + 2y + 7z)$ è strettamente convessa sul dominio naturale $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y + 7z > 0\}$; calcolando le derivate parziali prime e ponendole uguali a zero si ricava facilmente l'unico punto stazionario $(x^*, y^*, z^*) = \left(1/\left(2\sqrt{6}\right), 1/\left(2\sqrt{6}\right), 1/\left(2\sqrt{6}\right)\right) \in \operatorname{Int}(X)$ (si invita il lettore a sviluppare i dettagli). Il Teorema 5.8 ci consente di affermare direttamente che tale punto è l'unico punto di minimo assoluto.

Esercizi

ESERCIZIO 5.1 Determinare gli eventuali punti stazionari delle seguenti funzioni e calcolare il valore di ciascuna funzione in tali punti:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y$ **2.** $f(x, y) = y^3 + (x + y)^2 + x - 2y$
3. $f(x, y) = x^2 + y^2 - \ln(x + y)$ **4.** $f(x, y) = \ln(1 + x) + \ln(1 + x + 2y)$
5. $f(x, y, z) = x^4 + y^2 - 4xy + z^2 + 2z$
6. $f(x, y, z) = 5x - x^3 + 2y + z + \ln(-x - y) - e^{x+y+z}$
7. $f(x, y, z) = \left(x^2 + 3y^2 + 6z^2\right) e^{-x^2-y^2-z^2}$

ESERCIZIO 5.2 Studiare la natura delle seguenti forme quadratiche:

1. $Q(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy$ **2.** $Q(x, y) = -(1/2)\,x^2 - (1/3)\,y^2 + (2/3)\,xy$
3. $Q(x, y) = -3x^2 - 4y^2 - 10xy$ **4.** $Q(x, y) = -4x^2 - 3y^2 + \left(4\sqrt{3}\right) xy$
5. $Q(x, y) = 2x^2 - xy$ **6.** $Q(x, y) = x^2 + (3/2)\,y^2 + xy$
7. $Q(x, y, z) = 3x^2 + xy + y^2 - xz - yz + 5z^2$

8. $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$
9. $Q(x, y, z) = -x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy$
10. $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_4$

Esercizio 5.3 Cercare gli eventuali massimi e/o minimi relativi interni delle seguenti funzioni sul loro dominio naturale:
1. $f(x, y) = x^2y - 3y$ **2.** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y$
3. $f(x, y) = y^3 + (x + y)^2 + x - 2y$ **4.** $f(x, y) = (x - y^2)\, e^{-x}$
5. $f(x, y) = x^2 + y^2 - \ln(x + y)$ **6.** $f(x, y) = x \ln y - y\sqrt{x}$
7. $f(x, y) = x \ln x - y \ln y$ **8.** $f(x, y, z) = x^4 + y^2 - 4xy + z^2 + 2z$
9. $f(x, y, z) = 5x - x^3 + 2y + z + \ln(-x - y) - e^{x+y+z}$
10. $f(x, y, z) = (x^2 + 3y^2 + 6z^2)\, e^{-x^2-y^2-z^2}$

Esercizio 5.4 Stabilire eventuali proprietà di concavità o convessità delle seguenti funzioni sul loro dominio naturale:
1. $f(x, y) = y^2$ **2.** $f(x, y) = x^2y$ **3.** $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - y^2 - 2y$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y$ **5** $f(x, y) = -x^3 - y^2 + \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$
6. $f(x, y) = y \ln x - y \ln y$ **7.** $f(x, y) = \ln(1 + x) + \ln(1 + x + 2y)$
8. $f(x, y, z) = 1 - e^{-2x-y-z/2}$
9. $f(x, y, z) = -\sqrt{1 - x^4 - e^{4y} + \ln(3z)} + 4(x + y + z) + e^{x+y+z}$
10. $f(x, y, z) = -e^{x+y+z} + x - y^2 - z^2$

Esercizio 5.5 Stabilire per quali valori del parametro μ le seguenti funzioni sono concave:
1. $f(x, y) = -(x + 2)^3 + \mu xy - (1/6)\, y^2 - 12$ sull'ortante positivo $\mathbb{R}_+^2$
2. $f(x, y, z) = -(e^{-x} + e^{-y})^2 + \mu z$ su $\mathbb{R}^3$

Esercizio 5.6 Calcolare, se esistono, i punti estremi assoluti delle seguenti funzioni sul loro dominio naturale, sfruttando le eventuali proprietà di concavità/convessità:
1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y$ **2.** $f(x, y) = x^3 + y^2 - \sqrt{x} - 2\sqrt{y}$
3. $f(x, y) = \ln(1 + x) + \ln(1 + x + 2y)$ **4.** $f(x, y) = x \ln x + y \ln y$
5. $f(x, y) = y \ln x - y \ln y$ **6.** $f(x, y, z) = -3x^2 - 2y^2 - z^2 + \ln(x + 2y + 3z)$
7. $f(x, y, z) = 1 - e^{-2x-y-z/2}$ **8.** $f(x, y, z) = -e^{x+y+z} + x - y^2 - z^2$

Cosa bisogna ricordare di questo capitolo

1. Occorre avere ben presenti le nozioni di massimo e minimo per funzioni di più variabili, e quella di punti stazionari.
2. Si deve comprendere la nozione di forma quadratica, con i diversi casi che si possono presentare in relazione alla sua natura (definitiva positiva, definita negativa ecc.) e i metodi che permettono di individuarli.
3. È necessario comprendere le condizioni del primo e del secondo ordine per l'individuazione di massimi e minimi di funzioni in più variabili.

4. Occorre avere ben chiara la nozione di concavità/convessità di una funzione di più variabili, e i risultati che consentono di stabilire quando una funzione è concava/convessa.
5. Si devono comprendere le relazioni tra concavità/convessità di una funzione e punti di massimo/minimo, in particolare la relazione con la proprietà di unicità del massimo/minimo assoluto.