

## TEORIA E METODI MATEMATICI PER LA FINANZA-PROVA SCRITTA

### -SIMULAZIONE 1-

#### -Domande brevi-

1. Dopo aver dato la definizione di forma quadratica spiegare come si ottiene la matrice associata e presentare un esempio di forma quadratica con tre variabili che è definita positiva.
2. Dopo aver dato la definizione di grafico per una funzione di due variabili, si consideri la seguente funzione  $z = 3\sin x - \cos y$ . Si tracci il grafico della superficie con MatLab (da salvare col proprio cognome in jpg) e si indichino le istruzioni impiegate.
3. Dare la definizione di insieme ammissibile per un problema di ottimizzazione vincolata. Definire quindi un punto di minimo assoluto vincolato stabilendo se la seguente affermazione è vera o falsa. "Se  $P_0$  è un punto di minimo assoluto libero allora  $P_0$  è anche un punto di minimo assoluto vincolato."
4. Si consideri la varianza di una somma di variabili aleatorie, si spieghi in quale modo essa è legata alla varianza di ciascuna variabile aleatoria ed in cosa consiste la covarianza.

#### -Esercizi-

5. Per produrre sono impiegati 4 input (1,2,3,4). Il costo unitario per ciascuno di essi è pari a  $p_1=1$ ,  $p_2=3$ ,  $p_3=5$ ,  $p_4=7$ . La funzione di produzione è descritta dalla seguente legge  $Y=3x_1^{0.2}x_2^{0.4}x_3^{0.3}x_4^{0.1}$ . Si consideri un'impresa che vuole produrre 200 unità di output minimizzando il costo di acquisto degli input sapendo che la quantità usata del primo input deve uguagliare quella impiegata del quarto input. Formalizzare il problema e risolverlo con MatLab spiegando il comando usato. Dire inoltre quanto sarà il costo totale sostenuto dall'impresa nel punto di ottimo.
6. Si considerino 3 titoli rischiosi (A-B-C) con rendimenti attesi rispettivamente di 2 3 4 e matrice varianza covarianza data da 
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & 0 \\ -6 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$
. Si calcoli il portafoglio di minima varianza: formalizzare il problema e risolverlo analiticamente (sono possibili vendite allo scoperto). Verificare con MatLab il risultato ottenuto e tracciare la frontiera efficiente (da salvare ed inviare in jpg). Quale è il rendimento atteso e la deviazione standard del portafoglio così individuato?
7. Data la seguente funzione  $y = -x_1^3 - x_3^2 - 2x_1x_3 + (x_2 - 1)^2$  determinare i suoi punti critici e stabilire se sono punti di massimo o di minimo relativi (risolvere analiticamente).

## -SIMULAZIONE 2-

### -Domande brevi-

1. Data la seguente matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  determinare analiticamente gli autovalori e autovettori e verificare il risultato con MatLab spiegando il comando usato.
2. Dare la definizione di funzione di tre variabili reali e presentare un esempio di funzione di tre variabili avente il seguente dominio  $A = \{(x,y,z): y > 2 \text{ e } z < 0\}$ .
3. Dare la definizione di punto di minimo assoluto per una funzione  $z = f(x,y)$  e presentare un esempio grafico di una funzione che presenta un punto di minimo assoluto ma non di massimo assoluto.
4. Data la funzione di utilità dell'investitore e dati  $n$  titoli rischiosi, spiegare il problema di massimizzazione dell'utilità sul piano rischio-rendimento corredando la spiegazione con un grafico.

### -Esercizi-

5. Si considerino 4 titoli rischiosi (A-B-C-D) con rendimenti attesi rispettivamente di 4, 6, 8 e 10

e matrice varianza covarianza data da  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ . L'investitore vuole massimizzare

- il rendimento di portafoglio sostenendo un rischio (varianza) non superiore a 3.5. Si determini con MatLab il portafoglio ottimo in ipotesi di assenza di vendite allo scoperto. Si presenti inoltre la frontiera efficiente (inviare file jpg) indicando rendimento atteso e deviazione standard associati al portafoglio ottimo individuato.
6. Siano  $x$ ,  $y$  e  $z$  tre beni. La funzione di utilità del consumatore è  $U = 3xyz^2$  e il prezzo unitario è 2 per il bene  $x$ , 3 per il bene  $y$  e 1 per il bene  $z$ . Il consumatore vuole determinare quanto domandare di ogni bene al fine di massimizzare l'utilità sostenendo un costo di 100 euro. Formalizzare il problema, risolvere analiticamente e verificare con MatLab i risultati ottenuti (riportare i comandi utilizzati).
  7. Data la seguente funzione  $z = 2x^2 + 4x - y + y^2$  determinare analiticamente i punti di massimo e di minimo relativi che verificano il seguente vincolo:  $x - 2y \geq -1$ . Verificare con MatLab i risultati ottenuti (riportare i comandi utilizzati).

