Identità e descrizioni definite

Consideriamo questa argomentazione:

(1) La stella del mattino è un pianeta.
(2) La stella del mattino è la stella della sera.
Quindi, (3) la stella della sera è un pianeta

Schema di traduzione

Mx = x è stella del mattino
Sx = x è stella della sera
Px = x è un pianeta

Formalizzazione

(1a) $\exists x((Mx \ \& \ \forall y(My \rightarrow x = y)) \ \& \ Px)$
(2a) $\exists x((Mx \ \& \ \forall y(My \rightarrow x = y)) \ \& \ \exists z((Sz \ \& \ \forall w(Sw \rightarrow z = w)) \ \& \ x = z))$
$\vdash$ (3a) $\exists z((Sz \ \& \ \forall w(Mw \rightarrow z = w)) \ \& \ Pz)$

Dimostrazione

1.	$\exists x((Mx \ \& \ \forall y(My \rightarrow x = y)) \ \& \ Px)$	A
2.	$\exists x((Mx \ \& \ \forall y(My \rightarrow x = y)) \ \& \ \exists z((Sz \ \& \ \forall w(Sw \rightarrow z = w)) \ \& \ x = z))$	A
3.	$\vert \ ((Ma \ \& \ \forall y(My \rightarrow a = y)) \ \& \ Pa)$	H (per $\exists$E, sfruttando 1)
4	$\vert \ Ma \ \& \ \forall y(My \rightarrow a = y)$	3, &E
5	$\vert \ Pa$	3, &E
6	$\vert \ \vert \ ((Mb \ \& \ \forall y(My \rightarrow b = y)) \ \& \ \exists z((Sz \ \& \ \forall w(Sw \rightarrow z = w)) \ \& \ b = z))$	H (per $\exists$E, sfruttando 2)
7	$\vert \ \vert \ Mb \ \& \ \forall y(My \rightarrow b = y)$	6, &E
8	$\vert \ \vert \ \exists z((Sz \ \& \ \forall w(Sw \rightarrow z = w)) \ \& \ b = z))$	6, &E
9	$\vert \ \vert \ \vert ((Sc \ \& \ \forall w(Sw \rightarrow c = w)) \ \& \ b = c))$	H (per $\exists$E, sfruttando 8)
10	$\vert \ \vert \ \vert \ Sc \ \& \ \forall w(Sw \rightarrow c = w)$	9, &E
11	$\vert \ \vert \ \vert \ b = c$	9, &E
12	$\vert \ \vert \ \vert \forall y(My \rightarrow a = y)$	4, &E
13	$\vert \ \vert \ \vert Ma \rightarrow a = b$	12 $\forall$E
14	$\vert \ \vert \ \vert Ma$	4, $\exists$&E
15	$\vert \ \vert \ \vert a = b$	13, 14, $\rightarrow$E
16	$\vert \ \vert \ \vert a =c$	15, 11, =E
17	$\vert \ \vert \ \vert Pc$	5, 16 =E
18	$\vert \ \vert \ \vert (Sc \ \& \ \forall w(Sw \rightarrow c = w)) \ \& \ Pc$	10,17 &I
19	$\vert \ \vert \ \vert \exists z((Sz \ \& \ \forall w(Sw \rightarrow z = w)) \ \& \ Pz)$	18, $\exists$I
20	$\vert \ \vert \exists z((Sz \ \& \ \forall w(Sw \rightarrow z = w)) \ \& \ Pz)$	8, 9-19, $\exists$E
21	$\vert \ \exists z((Sz \ \& \ \forall w(Sw \rightarrow z = w)) \ \& \ Pz)$	2, 6-20, $\exists$E
22	$\exists z((Sz \ \& \ \forall w(Sw \rightarrow z = w)) \ \& \ Pz)$	1, 3-21, $\exists$E

Consideriamo adesso questa argomentazione.

(1*) Giovanni crede che la stella del mattino è un pianeta.
(2) La stella del mattino è la stella della sera.
Quindi, (3*) Giovanni crede che la stella della sera è un pianeta.

In questo caso, l'argomentazione non è valida. Possiamo vedere che, data una appropriata formalizzazione, non è in effetti possibile inferire (3) da (1) e (2). Il punto cruciale è: come formalizzare "x crede che ..."? Intuitivamente con questa locuzione esprimiamo una relazione tra un individuo e una proposizione. Assumiamo di poter formare nomi (costanti individuali) di proposizioni mettendo tra parentesi quadre formule ben formate. Per esempio, "$[\exists x((Mx \,\&\, \forall y(My \rightarrow x = y)) \,\&\, Px)]$" è il nome della proposizione che afferma che la stella del mattino è un pianeta. Assumendo ciò, e usando "g" per "Giovanni" e "C" per "crede", otteniamo questa formalizzazione:

(1*a) $Cg[\exists x((Mx \,\&\, \forall y(My \rightarrow x = y)) \,\&\, Px)]$
(2a) $\exists x((Mx \,\&\, \forall y(My \rightarrow x = y)) \,\&\, \exists z((Sz \,\&\, \forall w(Sw \rightarrow z = w)) \,\&\, x = z))$
$\vdash$ (3*a) $Cg[\exists z((Sz \,\&\, \forall w(Mw \rightarrow z = w)) \,\&\, Pz)]$

Data questa formalizzazione, non possiamo riprodurre la dimostrazione vista prima. Infatti, al posto di

(1a) $\exists x((Mx \,\&\, \forall y(My \rightarrow x = y)) \,\&\, Px)$,

ossia una quantificazione esistenziale che ci permetteva di sfruttare la regola $\exists$E, c'è adesso una formula atomica, (1*a), che asserisce l'esistenza di una relazione di credenza tra Giovanni e una certa proposizione, $[\exists x((Mx \,\&\, \forall y(My \rightarrow x = y)) \,\&\, Px)]$. Tale proposizione è una quantificazione esistenziale, ma è nell'ambito (campo d'azione) di "Cg..." (potremmo dire, è "incapsulata" dentro le credenze di Giovanni). E quindi non possiamo sfruttare la regola $\exists$E. Analogamente, non possiamo sfruttare la regola $\exists$E a partire da, per es., $\sim\exists xPx$, perché la quantificazione esistenziale $\exists xPx$ è nell'ambito della negazione $\sim$.