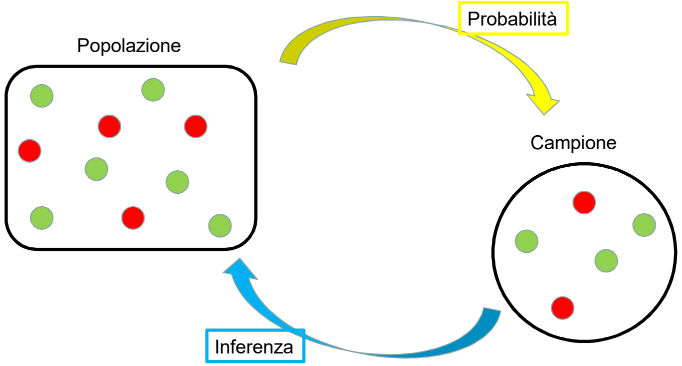
Probabilità e inferenza

• ***Inferenza statistica***: insieme delle procedure attraverso cui dalle caratteristiche osservate di un campione si cerca di risalire a quelle della popolazione di riferimento.



Probabilità: concetti di base

•***Prova***: (o esperimento aleatorio) è un esperimento caratterizzato da due o più possibili risultati, per il quale esiste incertezza circa il risultato che si realizzerà

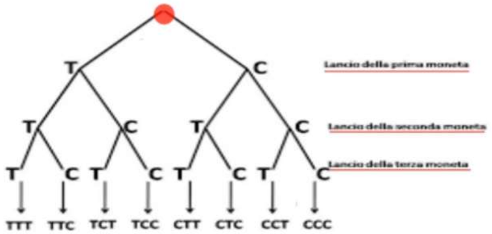
•***Evento elementare***: ogni possibile risultato dell'esperimento aleatorio, indicato genericamente come ω_i

•***Evento***: insieme di eventi elementari, indicato genericamente come E

•***Probabilità***: numero compreso tra 0 e 1 che misura il grado di incertezza connesso al risultato scaturito da una prova

In una data **prova**, l'**evento E**
si verifica con **probabilità P(E)**

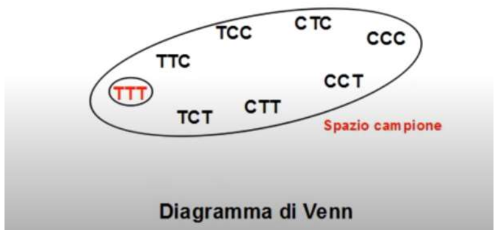
Esempio: Consideriamo l'esperimento che consiste nel lanciare tre volte una moneta e nell'osservare le facce che si presentano. Qual è lo spazio campionario? Quali sono gli eventi elementari?



Il lancio della prima moneta produce i due rami T e C, nel lancio della seconda moneta ad ogni nodo del primo lancio si associano altri due nodi TeC, nel lancio della terza moneta ad ogni nodo del secondo lancio si associano altri nodi T e C.

Per ottenere tutti i possibili casi nel lancio delle tre monete, si percorrono tutti i rami, partendo dalla radice fino alla fine del ramo.

Leggendo il primo ramo abbiamo l'evento TTT



Esempio:

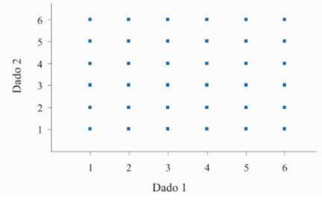
Si consideri il lancio di due dadi e si elenchino gli eventi elementari generati dall'esperimento.

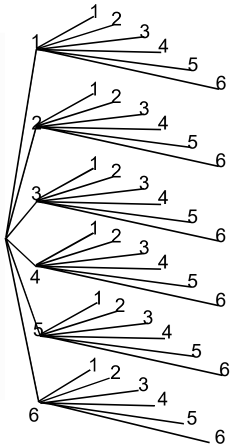
Soluzione

Lo spazio campionario è costituito dalle 36 coppie di numeri:

$$S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), \ldots, (6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\},$$

rappresentate nella Figura





Esempio:

Si immagini di lanciare una moneta ripetutamente finché non esca per la prima volta "Testa". Si descriva lo spazio campionario connesso all'esperimento.

Soluzione

Lo spazio campionario è costituito dalla seguente successione di eventi elementari:

$$S = \{T, CT, CCT, CCCT, CCCCT, \ldots\}.$$

Si tratta di un'infinità numerabile di elementi. ■

Esempio:

Si immagini di osservare la durata di una lampadina elettrica prodotta da una certa azienda. Si definisca lo spazio campionario connesso all'esperimento.

Soluzione

I possibili risultati dell'esperimento sono tutti i numeri reali dell'intervallo $[0, T]$, dove T è la durata massima desumibile dalle caratteristiche del processo produttivo. Si può allora scrivere

$$S = \{x : 0 \leq x \leq T\}.$$ ■

Operazioni sugli insiemi

•Le operazioni sugli insiemi possono essere visualizzate attraverso i ***diagrammi di Venn***: ogni insieme è rappresentato da una *linea curva chiusa* e si trova all'interno di una *scatola* che rappresenta lo spazio, Ω, dei risultati dell'esperimento.

•***Unione*** *di due eventi A e B*: è l'evento *E = AUB* che si verifica se almeno uno dei due eventi *A* o *B* si verificano

•***Intersezione*** *di due eventi A e B*: è l'evento *E = A∩B* che si verifica se si verificano entrambi gli eventi *A* e *B*

•***Negazione*** *di un evento A*: è l'evento A^c che si verifica se non si verifica *A*. La negazione di *A* può indicarsi come A^c oppure $\bar{A}$

•Sfruttando le operazioni sugli insiemi si possono definire i seguenti eventi:

- **Evento impossibile**: è l'evento che non può mai verificarsi e può essere definito come

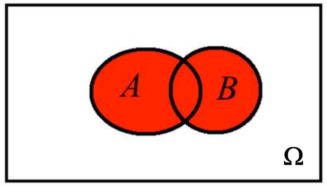
$$\varnothing \equiv \overline{\Omega}$$

- **Evento certo**, ossia l'evento che si verifica sempre in quanto comprende tutti i possibili risultati dell'esperimento. Può essere definito come

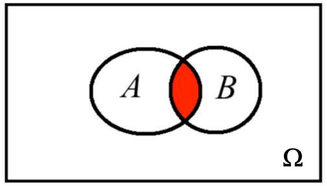
$$A \cup \bar{A} \equiv B \cup \bar{B} \equiv \Omega$$

- **Eventi incompatibili**: due eventi *A* e *B* si dicono incompatibili se

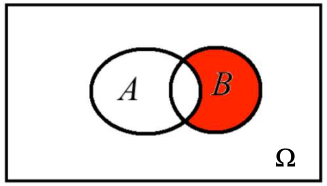
$$A \cap B = \emptyset$$



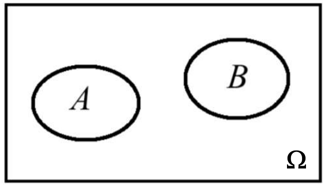
Unione tra A e B ($A \cup B$)



Intersezione tra A e B ($A \cap B$)



Intersezione tra B e negato di A ($B \cap A^c$)



Eventi disgiunti $A \cap B = \varnothing$

L'**elemento vuoto** $\varnothing$ è di fondamentale importanza per l'insiemistica, e quindi anche nella Teoria delle Probabilità, per la quale infatti prende il nome di **evento impossibile**.

Proprietà delle operazioni sugli insiemi

Le operazioni di unione e intersezione godono delle proprietà *commutativa*, *associativa* e *distributiva*.

- Le operazioni di intersezione e unione sono *commutative* cioè scambiando l'ordine della coppia degli insiemi, il risultato dell'operazione è lo stesso insieme, in simboli

$$A \cap B \equiv B \cap A \quad \text{e} \quad A \cup B \equiv B \cup A$$

- Le operazioni di intersezione e unione sono *associative* cioè il risultato non dipende dall'ordine con cui si eseguono le operazioni, pertanto risultano superflue le parentesi, in simboli

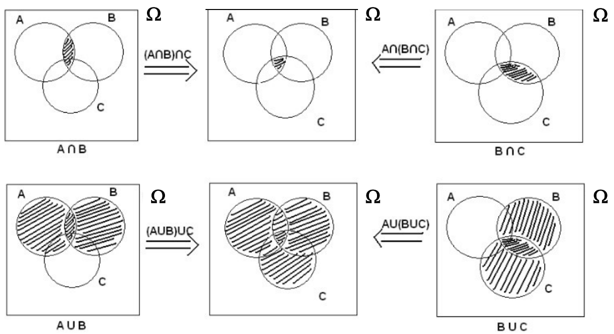
$$(A \cap B) \cap C \equiv A \cap (B \cap C) \quad \text{e} \quad (A \cup B) \cup C \equiv A \cup (B \cup C)$$

- Le operazioni di intersezione e di unione sono *distributive* l'una rispetto all'altra

$$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{e} \quad A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

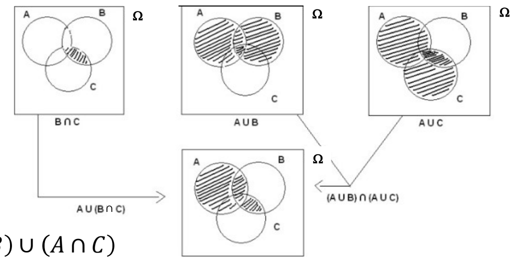
Proprietà associativa

$$(A \cap B) \cap C \equiv A \cap (B \cap C) \quad \text{e} \quad (A \cup B) \cup C \equiv A \cup (B \cup C)$$

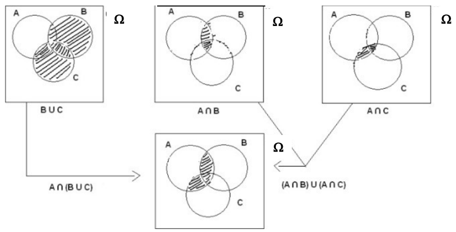


Proprietà distributiva

$$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

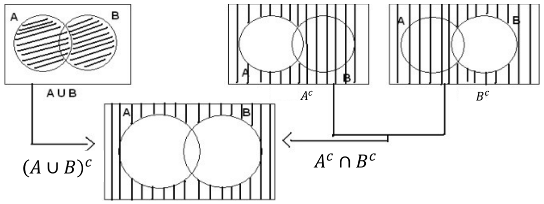


$$A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



Leggi di De Morgan

1. $(A \cup B)^c \equiv A^c \cap B^c$



2. $(A \cap B)^c \equiv A^c \cup B^c$

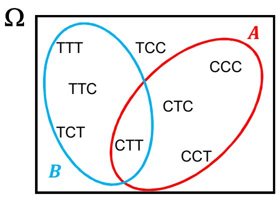
Definizioni della probabilità

•***Definizione classica***: la probabilità è data dal rapporto tra il numero dei *casi favorevoli* all'evento e il numero dei *casi possibili* purché essi siano tutti *ugualmente possibili*.

•***Definizione frequentista***: la probabilità di un evento *E* è il limite a cui tende la *frequenza relativa* con cui si osserva il verificarsi di *E* in un numero *n* di *prove ripetute* nelle *stesse condizioni*, quando *n* tende a infinito

•***Definizione soggettiva***: la probabilità di un evento E è il *grado di fiducia* che ciascun individuo, in maniera *soggettiva*, attribuisce al verificarsi dell'evento, in base alle *informazioni a sua disposizione*.

Esempio di applicazione della definizione classica: riprendiamo l'esperimento che consiste nel lanciare tre volte una moneta. Si calcoli la probabilità degli eventi A = {Croce nel primo lancio}, B = {Almeno due volte testa}, $A \cup B$ = {Croce al primo lancio o almeno due volte testa} e $A \cap B$ = {Croce al primo lancio e almeno due volte testa}



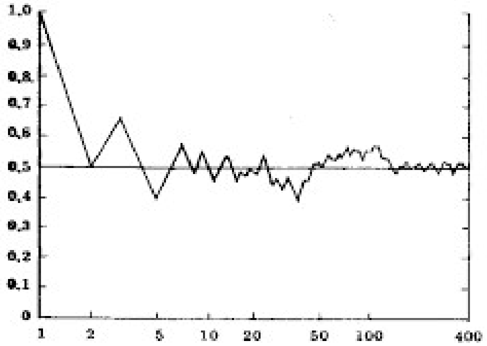
$$P(A) = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

$$P(B) = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Esemplificazione della definizione frequentista di probabilità: frequenza relativa dell'evento «Testa» all'aumentare del numero delle prove.



Frequenza relativa dell'evento testa in una successione di lanci (scala logaritmica per il numero di lanci)

Approccio assiomatico

•La probabilità è una funzione di insieme che associa a ogni evento *E* un numero reale. La probabilità sarà indicata con *P(E)*.

•La probabilità deve sottostare alle seguenti proprietà assiomatiche:

Postulato 1 ⟶ $P(A) \geq 0$

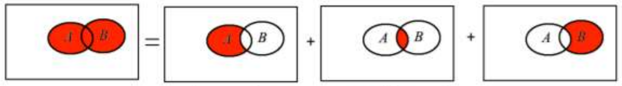
Postulato 2 ⟶ $P(\Omega) = 1$

Postulato 3 ⟶ $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

•A partire dai tre assiomi è possibile derivare tutta una serie di leggi che la probabilità deve rispettare, tra cui:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
  - Per il primo assioma $P(A) \geq 0$. Per il secondo assioma $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$. Per il terzo assioma $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Quindi $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ e $P(A) \leq 1$.
- $P(\varnothing) = 0$
  - Per il secondo assioma $P(\emptyset \cup \Omega) = P(\Omega) = 1$. Per il terzo assioma $P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$. Quindi $P(\emptyset) + P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) + 1 = 1$ e $P(\emptyset) = 0$.
- $B \subset A \rightarrow P(B) \leq P(A)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(B) = 1 \rightarrow P(B \cap A) = P(A)$
- $P(B) = 0 \rightarrow P(B \cup A) = P(A)$
- $P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (***Legge delle probabilità totali*** o ***legge della somma***)

Legge delle probabilità totali



$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)^*$$

$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \qquad B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$$

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \qquad P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

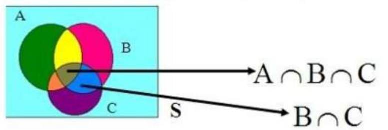
$$P(A) + P(B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + 2P(A \cap B)^{**}$$

$$** - * \text{ dà } P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Generalizzazione del teorema della probabilità totale al caso di 3 eventi

$$P(A \cup B \cup C) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$$
$$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

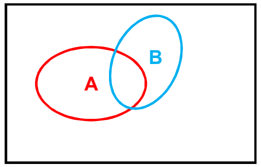


Generalizzazione al caso di *n* eventi

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots$$
$$+ (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Esercizio: Dati due eventi A e B dello spazio campionario Ω, si sa che $\mathrm{P}(\bar{A}) = 0{,}3$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(A \cap \bar{B}) = 0{,}5$. Si determinino le probabilità:

1) $\mathrm{P}(A)$
2) $\mathrm{P}(A \cap B)$
3) $\mathrm{P}(A \cup B)$
4) $\mathrm{P}(\bar{A} \cup B)$

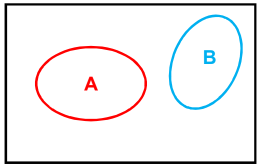


Soluzione:

1) $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$
2) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
   $\mathrm{P}(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$
   $P(A \cap B) = \mathrm{P}(A) - P(A \cap \bar{B}) = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2$
3) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}9$
4) $\mathrm{P}(\bar{A} \cup B) = \mathrm{P}(\bar{A}) + \mathrm{P}(B) - P(\bar{A} \cap B)$
   $\mathrm{P}(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
   $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$
   $\mathrm{P}(\bar{A} \cup B) = \mathrm{P}(\bar{A}) + \mathrm{P}(B) - P(\bar{A} \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}5$

Esercizio: Dati due eventi incompatibili A e B tali che $\mathrm{P}(A) = 0{,}35$ e $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$, si determinino le probabilità:

1) $\mathrm{P}(\bar{A})$
2) $\mathrm{P}(A \cap B)$
3) $\mathrm{P}(A \cup B)$
4) $\mathrm{P}(\bar{A} \cup \bar{B})$
5) $\mathrm{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$



Soluzione:

1) $\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$
2) $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0$
3) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = 0{,}35 + 0{,}4 = 0{,}75$
4) $\mathrm{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) = \mathrm{P}(\overline{A \cap B}) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$
5) $\mathrm{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

Esercizio: Le valutazioni di un esperto di borsa circa il rendimento, nel prossimo anno, di una determinata azione del settore industriale sono indicate nella seguente tabella:

Tasso di rendimento %	Fino a -5	Da -5 a 0	Da 0 a 5	Da 5 a 10	Più di 10
Probabilità	0,02	0,12	0,33	0,47	0,06

Si definiscano gli eventi A = {Il tasso di rendimento sarà negativo o nullo} e B = {Il tasso di rendimento sarà maggiore di 5}

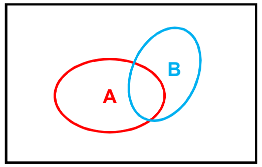
a) Si descriva l'evento complementare di A e se ne determini la probabilità
b) Si descriva l'evento intersezione di A e di B e se ne determini la probabilità
c) Si descriva l'evento unione di A e di B e se ne determini la probabilità

Soluzione:

a) $\bar{A}$ = {Il tasso di rendimento sarà positivo}. $\mathrm{P}(\bar{A}) = 0{,}33 + 0{,}47 + 0{,}06 = 0{,}86$
b) $A \cap B$ = {Il tasso di rendimento sarà negativo o nullo e maggiore di 5} = $\{\emptyset\}$. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.
c) $A \cup B$ = {Il tasso di rendimento sarà negativo o nullo oppure maggiore di 5}. $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}02 + 0{,}12 + 0{,}47 + 0{,}06 = 0{,}67$

Esercizio: Per i due eventi A e B sono note le probabilità: $\mathrm{P}(A) = 0{,}48$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}39$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}18$. Si dispongano le probabilità nella tabella che segue

	A	$\bar{A}$	
B	0,18	0,21	0,39
$\bar{B}$	0,3	0,31	0,61
	0,48	0,52	1



Probabilità condizionate e indipendenza

•A volte si vuole valutare la probabilità di un certo evento A, sapendo che si è già verificato un evento B ad esso collegato. Si parla allora di probabilità di A ***condizionata*** a B e si indica come P(A|B)

•La probabilità di A condizionata a B si calcola come:

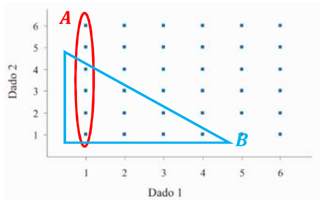
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B)>0$$

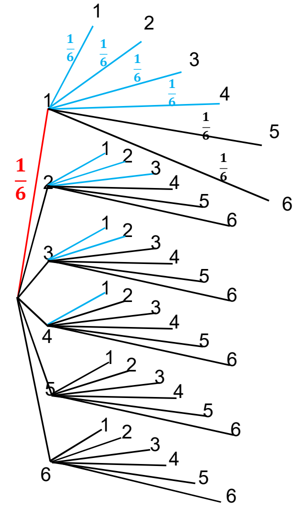
•Dalla probabilità condizionata segue che (***principio delle probabilità composte*** o ***regola del prodotto***)

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

25

Esempio: Riprendiamo l'esempio del lancio di due dadi e consideriamo gli eventi $A = \{\text{Si ottiene 1 al primo lancio}\}$ e $B = \{\text{La somma dei due dadi è minore di 6}\}$.
Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ e $P(B|A)$.





$$P(A) = \frac{6}{36}$$

$$P(B) = \frac{10}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36}$$

$$P(B|A) = \frac{4}{6} = \frac{4/36}{6/36} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

26

•Se il verificarsi dell'evento B non modifica in alcun modo la probabilità di verificarsi dell'evento A, i due eventi si dicono ***indipendenti***.

•Il concetto di indipendenza è simmetrico e può essere formalizzato in due modi equivalenti:

- Due eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A\,|\,B) = P(A)$$

- Due eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

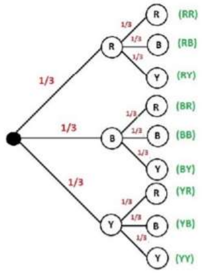
Infatti, dalla legge del prodotto

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \stackrel{\perp}{=} P(A)P(B)$$

27

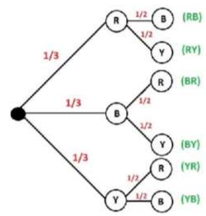
Esempio: Consideriamo un'urna che contiene 3 palline di colore diverso, rosso (R), blu (B) e giallo (Y). Si descriva lo spazio campionario nel caso di estrazione di due biglie con e senza ripetizione e si calcoli la probabilità di estrarre una pallina R seguita da una pallina B, rispettivamente nei due schemi di estrazione.

Estrazioni con ripetizione



$$P(R_1 \cap B_2) = P(B_2|R_1)P(R_1) = P(B_2)P(R_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Estrazioni senza ripetizione



$$P(R_1 \cap B_2) = P(B_2|R_1)P(R_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

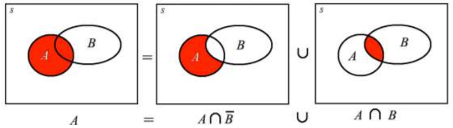
28

Fattorizzazione di un evento

Dati due eventi qualsiasi A e B, si può esprimere A nel seguente modo:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

Infatti ogni elemento che appartiene all'evento A, sta in A ma non in B, oppure sta sia in A che in B.



Dato che $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$,

- per il terzo assioma $\mathrm{P}(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$
- per la regola del prodotto $\mathrm{P}(A) = P(A|B)\mathrm{P}(B) + P(A|\bar{B})\mathrm{P}(\bar{B})$

La probabilità di un evento A è la media, pesata opportunamente, delle probabilità condizionate di A, sapendo che si è verificato B, e che non si è verificato B. I pesi sono le probabilità degli eventi rispetto a cui si condiziona.

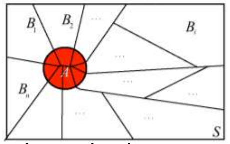
29

Generalizzazione della fattorizzazione di un evento

La relazione $\mathrm{P}(A) = P(A|B)\mathrm{P}(B) + P(A|\bar{B})\mathrm{P}(\bar{B})$ può essere generalizzata.

Si definisce partizione di Ω un insieme di eventi $B_1, \cdots, B_j, \cdots, B_n$ mutualmente disgiunti e la cui unione restituisce l'intero spazio Ω:

- $B_i \cap B_j = \emptyset$, per ogni *i*, *j*
- $\sum_{j=1}^{n} B_j = \Omega$



Consideriamo un qualsiasi evento A che possiamo riscrivere come $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$ dove gli eventi $(A \cap B_i)$ sono a loro volta disgiunti

- per il terzo assioma $\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$
- per la regola del prodotto $\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$

La formula precedente è detta formula di fattorizzazione della probabilità: è possibile calcolare la probabilità di un evento A, condizionandolo rispetto a un gruppo di eventi, mutuamente disgiunti, che siano una partizione di tutto Ω.

30

Il teorema di Bayes

Supponiamo che si sia verificato l'evento A. Che probabilità avranno di conseguenza gli eventi B_i?

Teorema di Bayes

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Infatti per la definizione di probabilità condizionata

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)},$$

per la legge del prodotto

$$P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i),$$

e per la formula di fattorizzazione

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

31

Osservazioni:

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

La formula di Bayes sintetizza il processo di apprendimento dall'esperienza.

- Immaginiamo che gli eventi B_i rappresentino delle ipotesi o delle possibili cause alla base di un fenomeno o di un evento A. Sulla base delle conoscenze attuali a queste ipotesi viene assegnata una probabilità, detta probabilità *a priori*.
- Un evento A ha una certa probabilità $P(A|B_i)$ di verificarsi sotto ciascuna ipotesi. Questa probabilità è chiamata *verosimiglianza*.
- Attraverso il teorema di Bayes, la probabilità di un ipotesi B_i, viene aggiornata in seguito all'osservazione di un certo evento A. La formula di Bayes rappresenta il modo con cui deve ragionevolmente modificarsi la conoscenza attuale, in seguito al fatto di aver osservato A. Le probabilità $\mathrm{P}(B_i|A)$ sono dette probabilità *a posteriori*.

32

Esempio: Teorema di Bayes e tamponi

Perché fare due tamponi per determinare se un paziente è guarito?

	Malato (*M*)	Sano (*S*)	
Test Positivo	VP	FP	VP+FP
Test Negativo	FN	VN	FN+FP
	Totale *M*	**Totale *S***	**Totale**

Sensibilità = VP/(Tot *M*)

Specificità = VN/(Tot *S*)

- Il test diagnostico attualmente utilizzato per la diagnosi del Covid-19 è il **test molecolare con metodo Real Time PCR** per SARS-CoV-2 indicato dall'OMS (il cosiddetto *tampone*).
- Il test ha (valori arrotondati) sensibilità del 95% e specificità del 95%.
- Formalizziamo le caratteristiche del test:
  - M = (il paziente è malato)
  - S = (il paziente è sano)
  - T^+ = (il test è positivo)
  - T^- = (il test è negativo)

	Malato	Sano
Test positivo	$P(M \text{ e } T^+)$	$P(S \text{ e } T^+)$
Test negativo	$P(M \text{ e } T^-)$	$P(S \text{ e } T^-)$
	$P(M)$	$P(S)$

Sensibilità = $P(M \text{ e } T^+)/P(M)$

Specificità = $P(S \text{ e } T^-)/P(S)$

$$\text{Sensibilità} = \frac{P(M \text{ e } T^+)}{P(M)} = P(T^+|M) = 0.95$$

$$\text{Specificità} = \frac{P(S \text{ e } T^-)}{P(S)} = P(T^-|S) = 0.95$$

- La performance del test (specificità e significatività) è:

$$P(T^+|M) = P(T^-|S) = 0.95$$
$$P(T^-|M) = P(T^+|S) = 0.05$$

Ma non conosciamo la PREVALENZA $P(M)$

- Attualmente le "stime", fatte regione per regione, variano da circa 0.4% a 10%.
- Ma noi assegniamo, più pessimisticamente, $P(M) = 0.2$ (20%).
- Quindi $P(S) = 1 - P(M) = 0.8$ (80%).
- Noi vogliamo $P(S|T^-)$.

	Malato	Sano	
Test positivo	$P(M \text{ e } T^+)$	$P(S \text{ e } T^+)$	$P(T^+)$
Test negativo	$P(M \text{ e } T^-)$	$P(S \text{ e } T^-)$	$P(T^-)$
	$P(M)$	$P(S)$	

$$P(S|T^-) = \frac{P(S \text{ e } T^-)}{P(T^-)}$$

$$\mathrm{P}(S|T^-) = \frac{P(T^-|S)P(S)}{P(T^-|S)P(S) + P(T^-|M)P(M)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}80}{0{,}95 \cdot 0{,}80 + 0{,}05 \cdot 0{,}20} = 0{,}987$$

Con una probabilità del 98,7% il paziente è guarito se il tampone risulta negativo

E perché allora due tamponi?

- Ho una probabilità del 98.7% di essere guarito se il mio primo tampone è negativo

- Rifacciamo il tampone e calcoliamo $P(S|T_1^-, T_2^-)$

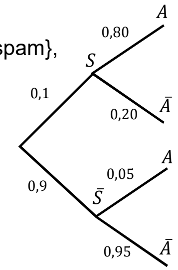
- Si usa sempre il **teorema di Bayes** ma con 0.987 quale probabilità iniziale: $P(S|T_1^-)$ invece che $P(S)$

$$\begin{aligned} P(S|T_1^-, T_2^-) &= \frac{P(T_2^-|S)P(S|T_1^-)}{P(T_2^-|S)P(S|T_1^-) + P(T_2^-|M)P(M|T_1^-)} \\ &= \frac{0.95 \times 0.987}{0.95 \times 0.987 + 0.05 \times 0.013} \\ &= 0.999 \end{aligned}$$

Esempio: Teorema di Bayes e filtri antispam

Il 10% degli email ricevuti giornalmente si configurano come spam. Inoltre l'80% dei messaggi di spam contengono la parola «gratis», mentre tale parola è contenuta solo nel 5 percento dei messaggi non spam. Arriva un nuovo messaggio contenente la parola «gratis», qual è la probabilità che si tratti di un messaggio di spam.

Siano S={Il messaggio è spam}, $\bar{S}$={Il messaggio non è spam}, A={Il messaggio contiene la parola «gratis»}



Probabilità a priori: $P(S) = 0{,}1$ e $P(\bar{S}) = 0{,}9$

Verosimiglianza: $P(A|S) = 0{,}80$ e $P(A|\bar{S}) = 0{,}05$

Probabilità a posteriori:

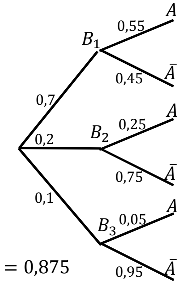
$$\mathrm{P}(S|A) = \frac{P(A|S)P(S)}{P(A|S)P(S) + P(A|\bar{S})P(\bar{S})} = \frac{0{,}80 \cdot 0{,}1}{0{,}80 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}90} = 0{,}64$$

37

Esempio: Teorema di Bayes e rischio di credito

Una banca sa dall'esperienza passata che il 70% dei prestiti concessi vengono restituiti, il 20% vengono restituiti in parte e il 10% non vengono restituiti affatto. Inoltre tra coloro che hanno restituito il prestito, il 55% hanno un reddito medio-alto, mentre tale percentuale è del 25% tra coloro che hanno restituito solo parzialmente il prestito e del 5% tra coloro che non lo hanno restituito affatto. Un nuovo cliente con reddito medio-alto fa domanda per un prestito. Qual è la probabilità che lo restituirà? Qual è la probabilità che lo restituirà solo in parte?

Siano B_1={Il prestito viene restituito},
B_2={Il prestito viene restituito in parte},
B_3={Il prestito non viene restituito}
A={Il cliente ha un reddito medio-alto}



Probabilità a priori: $P(B_1) = 0{,}7$, $P(B_2) = 0{,}2$, $P(B_3) = 0{,}1$
Verosimiglianza: $P(A|B_1) = 0{,}55$, $P(A|B_2) = 0{,}25$, $P(A|B_3) = 0{,}05$
Probabilità a posteriori:

$$\mathrm{P}(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0{,}55 \cdot 0{,}7}{0{,}55 \cdot 0{,}7 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 + 0{,}05 \cdot 0{,}1} = 0{,}875$$

$$\mathrm{P}(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}2}{0{,}55 \cdot 0{,}7 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 + 0{,}05 \cdot 0{,}1} = 0{,}114$$

38

Dove e come studiare

- Libro di testo: S. Borra, A. Di Ciaccio (2014), Cap. 8 (escluso paragrafo 16.6)
- Svolgere 'Esercitazione 4', esercizi dal 3 in poi.
- Svolgere gli esercizi nel file 'Esercizi di probabilità.xls', limitatamente ai fogli 4, 9, 12, 14, 16, 17, 21, 24, 27

39