Esercitazione 5 - Soluzione

1.

$P(X \le 3) = 0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}20 + 0{,}25 = 0{,}7$

$P(X < 3) = 0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}20 = 0{,}45$

$P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$

$P(2 \le X \le 5) = 0{,}20 + 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}06 = 0{,}71$

$P(X \le 2) = 0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}20 = 0{,}45$

$E(X) = \sum x f(x) = 0 \cdot 0{,}10 + 1 \cdot 0{,}15 + \ldots + 6 \cdot 0{,}04 = 2{,}64$

$V(X) = \sum [x - E(x)]^2 f(x) = (0 - 2{,}64)^2 \cdot 0{,}10 + (1 - 2{,}64)^2 \cdot 0{,}15 + \ldots + (6 - 2{,}64)^2 \cdot 0{,}04 = 2{,}37$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum x^2 f(x) - [\sum x f(x)]^2 = 0^2 \cdot 0{,}10 + 1^2 \cdot 0{,}15 + \ldots + 6^2 \cdot 0{,}04 - 2{,}64^2 = 2{,}37$

2.

La v.c. ha distribuzione binomiale con n = 10 e π = 0,05.

Dalla $P(X = x) = f(x) = \binom{10}{x} 0{,}05^x (1 - 0{,}05)^{10-x}$ si ottiene la seguente tabella:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0,5987	0,3151	0,0746	0,0105	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$P(X \le 1) = \sum_{x=0}^{1} P(X = x) = 0{,}9138$

$E(X) = \sum x f(x) = 0 \cdot 0{,}5987 + 1 \cdot 0{,}3151 + \ldots + 10 \cdot 0{,}0000 = 0{,}5$

$V(X) = \sum [x - E(x)]^2 f(x) = (0 - 0{,}5)^2 \cdot 0{,}5987 + (1 - 0{,}5)^2 \cdot 0{,}3151 + \ldots + (10 - 0{,}5)^2 \cdot 0{,}0000 = 0{,}475$

Oppure, ricordando il valore atteso e la varianza di una binomiale:

$E(X) = n \cdot \pi = 0{,}5$

$V(X) = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi) = 0{,}475$

3.

La v.c. X ha distribuzione di Poisson con λ = 8, quindi la funzione di probabilità è data da

$$P(X = x) = f(x) = \frac{8^x e^{-8}}{x!}$$

Inoltre *E(X)* = *V(X)* = 8. Quindi:

$$P(X \le 5) = \sum_{x=0}^{5} P(X = x) = \frac{8^0 e^{-8}}{0!} + \frac{8^1 e^{-8}}{1!} + \ldots + \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = 0{,}1912$$

$$P(6 \le X \le 9) = \sum_{x=6}^{9} P(X = x) = \frac{8^6 e^{-8}}{6!} + \frac{8^7 e^{-8}}{7!} + \frac{8^8 e^{-8}}{8!} + \frac{8^9 e^{-8}}{9!} = 0{,}5254$$

$$P(X \ge 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - (0{,}1912 + 0{,}5254)$$

$$E(X) = 8$$

$$\sqrt{V(X)} = 2{,}8284$$

4.

Data X~N(1,25;0,46²), si può calcolare la v.c. normale standardizzata. Quindi, con l'utilizzo delle tavole possiamo calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \le 1) = P(Z < (1 - 1{,}25)/0{,}46) = \Phi(-0{,}54) = \Phi(0{,}54) = 0{,}2945$$

$$P(1 \le X \le 2) = P(Z \le (2 - 1{,}25)/0{,}46) - P(Z \le (1 - 1{,}25)/0{,}46) =$$
$$= \Phi(1{,}63) - \Phi(-0{,}54) = 0{,}9485 - 0{,}2945 = 0{,}6540$$

In base ai risultati dei punti precedenti è immediato ottenere P(X≤2)=0,9485. Di conseguenza la probabilità che un individuo abbia un incidente è pari a
p = 1-0,9485 = 0,0515.
Indicando con Y la v.c. che esprime il numero di assicurati che hanno un incidente su 100 assicurati, cioè Y~ Bin(100; 0,0515), la probabilità che più di 5 individui abbiano un incidente è pari a

$$P(Y > 5) = 1 - P(Y \le 5) = 1 - \sum_{y=0}^{5} \binom{100}{y} 0{,}0515^y (1 - 0{,}0515)^{100-y} = 0{,}4110$$

5.

Utilizzando le tavole si ricava che i quantili della distribuzione normale standardizzata corrispondenti al 25-esimo e al 90-esimo percentile sono -0,67 e 1,28. Quindi i parametri μ e σ della distribuzione normale si ottengono risolvendo in seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{1{,}4-\mu}{\sigma} = -0{,}67 \\ \dfrac{1{,}8-\mu}{\sigma} = 1{,}28 \end{cases}$$

da cui μ = 1,5374 e σ = 0,2051. Il valore atteso del diametro di un bullone è μ = 1,5374, mentre una misura dell'inaccuratezza del processo è data dalla deviazione standard σ = 0,2051. Inoltre:

$$P(X \le 1{,}2) = \Phi\left(\frac{1{,}2-1{,}5374}{0{,}2051}\right) = \Phi(-1{,}645) = 1-\Phi(1{,}645) \approx 0{,}05$$

$$P(X > 2) = 1-\Phi\left(\frac{2-1{,}5374}{0{,}2051}\right) = 1-\Phi(2{,}255) =\approx 0{,}01205$$

Il numero di bulloni di larghezza superiore a 2mm in un lotto di 10 bulloni può essere descritto da una v.c. Y~Bin(10;0,01205). Quindi

$$P(Y \le 1) = \sum_{y=0}^{1} \binom{10}{y} 0{,}01205^{y} (1-0{,}01205)^{100-y} = 0{,}9938$$