Esercitazione 7 - Soluzione

1.

a) I valori della concentrazione di zinco riscontrati in un campione di n = 12 pesci possono essere usati per calcolare la concentrazione media e la varianza campionaria:

$$\bar{x} = \frac{9{,}89 + 10{,}05 + \cdots + 11{,}46}{12} = 9{,}188$$

$$s^2 = \frac{(9{,}89 - 9{,}188)^2 + (10{,}05 - 9{,}188)^2 + \cdots + (11{,}46 - 9{,}188)^2}{12-1} = 1{,}386$$

b) Assumendo che la concentrazione di zinco si distribuisca secondo una v.c. Gaussiana, gli estremi di un intervallo fiduciario al 99% per la concentrazione media di zinco sono dati da $\bar{x} \pm t_{\alpha/2}\sqrt{s^2/n}$:

$$9{,}188 \pm 3{,}106\sqrt{1{,}386/12} = [8{,}132 \quad ; \quad 10{,}246]$$

c) Assumendo che la concentrazione di zinco si distribuisca secondo una v.c. Gaussiana, gli estremi di un intervallo fiduciario al 95% per la varianza sono dati da

$$\left[s^2(n-1)/\chi^2_{\alpha/2}\,;\, s^2(n-1)/\chi^2_{1-\alpha/2}\right] = [1{,}386 \cdot 11/21{,}92\,;\, 1{,}386 \cdot 11/3{,}82] = [0{,}695\,;\, 3{,}991]$$

d) Assumendo di conoscere σ = 1,71, gli estremi di un intervallo fiduciario al 99% per μ sono:

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n} = 9{,}188 \pm 2{,}576\sqrt{1{,}71^2/12} = [7{,}916\,;\, 10{,}460]$$

2.

a) Stimatori non distorti della media e della varianza del consumo mensile di benzina delle famiglie sono rispettivamente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{213} x_i}{n} = \frac{34293}{213} = 161 \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{213}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{18062400}{213-1} = 85200$$

b) L'intervallo fiduciario al 95% per μ e pari a

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{s^2/n} = 161 \pm 1{,}96\sqrt{85200/213} = [121{,}8\,;\, 200{,}2]$$

c) Assumendo che il consumo mensile delle famiglie si distribuisca secondo una v.c. Gaussiana, gli estremi di un intervallo fiduciario al 90% per la varianza sono dati da

$$\left[s^2(n-1)/\chi^2_{\alpha/2}\,;\, s^2(n-1)/\chi^2_{1-\alpha/2}\right] =$$

$$= [85200 \cdot 212/246{,}968\,;\, 85200 \cdot 212/179{,}305] = [73136{,}6\,;\, 100735{,}6]$$

3. L'errore massimo di stima ε che si può commettere con probabilità del 99% si può scrivere come segue:

$$P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 0{,}99$$

Considerando un campione n = 100 sufficiente per poter affermare che la media campionaria si distribuisce normalmente:

$$P\left(\frac{\left|\bar{X} - \mu\right|}{\sqrt{s^2/n}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{s^2/n}}\right) = P\left(|Z| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{s^2/n}}\right) = 0{,}99$$

Quindi $\frac{\varepsilon}{\sqrt{s^2/n}} = z_{\alpha/2}$. Sostituendo $\frac{\varepsilon}{\sqrt{0{,}01/100}} = 2{,}576$, da cui ε = 0,0256.

4. Si definisca la v.c. Y che esprime il numero di possessori di carta di credito che hanno subito un addebito durante l'anno precedente. Tale v.c. ha distribuzione binomiale con n = 200 e π incognito. La stima del parametro incognito e data da 23/200 = 0,115, ossia la frazione di possessori che hanno avuto un addebito. Gli estremi di un intervallo fiduciario al 90% per π sono dati da:

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})/n} = 0{,}115 \pm 1{,}645\sqrt{0{,}115(1-0{,}115)/200} = [0{,}078\,;\, 0{,}152]$$

5.

a) Relativamente ai lavoratori che guadagnano tra i 20 e i 40 mila euro l'anno, la proporzione dei lavoratori dipendenti e pari a 58/108 = 0,537. L'intervallo fiduciario al 95% ha limiti

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})/n} = 0{,}537 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}537(1-0{,}537)/108} = [0{,}443\,;\, 0{,}631]$$

b) I valori centrali di classe per il reddito sono {15; 30; 60} mentre le frequenze per la distribuzione dei liberi professionisti sono {22; 50; 54}. Il reddito medio e la varianza campionaria sono, rispettivamente, pari a 40,24 e 322,74. L'intervallo fiduciario al 99% per il reddito medio dei liberi professionisti ha limiti

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{s^2/n} = 40{,}24 \pm 2{,}576\sqrt{322{,}74/126} = [36{,}12;\, 44{,}36]$$

c) La proporzione di lavoratori dipendenti è pari a 116/242 = 0,479. I limiti dell'intervallo fiduciario al 99% sono pari a

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})/n} = 0{,}479 \pm 2{,}576\sqrt{0{,}479(1-0{,}479)/242} = [0{,}396\,;\, 0{,}562]$$

Se la forza lavoro fosse equamente suddivisa tra lavoratori dipendenti e liberi professionisti allora π = 0,5. Dal momento che tale valore è compreso all'interno dei limiti dell'intervallo fiduciario sopra calcolato, possiamo ritenere plausibile l'affermazione che nella popolazione π = 0,5.