Esercizio 1

I prelievi giornalieri ad un certo sportello bancomat si distribuiscono normalmente con un ammontare medio di 3500 euro e una deviazione standard di 450 euro.
Calcolare

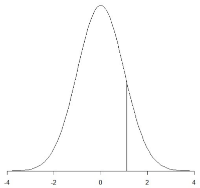
a) la probabilità che in un determinato giorno l'ammontare dei prelievi superi i 4000 euro

$X = \{\text{Ammontare giornaliero dei prelievi}\}$

$X \sim N(3500; 450^2)$

$$P(X > 4000) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{4000-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{4000-3500}{450}\right) =$$

$$= P(Z > 1{,}11) = 1 - \Phi(1{,}11) = 1 - 0{,}8665 = 0{,}1335$$



b) la probabilità che in una settimana i prelievi totali superino i 25000 euro

$X = \{\text{Ammontare giornaliero dei prelievi}\}$

$Y = \{\text{Ammontare dei prelievi in una settimana}\}$

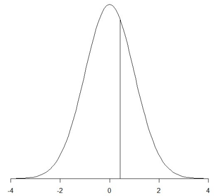
$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$

$X \sim N(3500; 450^2)$

$Y \sim N(3500 \cdot 7; 450^2 \cdot 7) \sim N(24500; 1417500)$

$$P(Y > 25000) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{25000-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{25000-24500}{\sqrt{1417500}}\right) =$$

$$= P(Z > 0{,}42) = 1 - \Phi(0{,}42) = 1 - 0{,}66276 = 0{,}33724$$



c) la probabilità che in una settimana il prelievo medio giornaliero sia inferiore a 3000 euro

$X = \{\text{Ammontare giornaliero dei prelievi}\}$

$Y = \{\text{Ammontare del prelievo medio giornaliero in una settimana}\}$

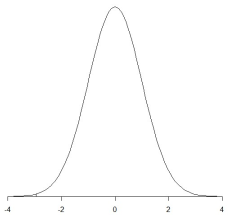
$$Y = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7}{7}$$

$X \sim N(3500; 450^2)$

$Y \sim N(3500; 450^2/7) \sim N(3500; 28928{,}57)$

$$P(Y < 3000) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{3000-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{3000-3500}{\sqrt{28928{,}57}}\right) =$$

$$= P(Z < -2{,}94) = 1 - \Phi(2{,}94) = 1 - 0{,}99836 = 0{,}00164$$



d) la probabilità che in una settimana, almeno per un giorno si osservino prelievi superiori a 4000 euro

$X = \{\text{Ammontare giornaliero dei prelievi}\}$

$Y = \{\text{Numero di giorni in una settimana in cui si osservano prelievi superiori a 4000 euro}\}$

$X \sim N(3500; 450^2)$

$Y \sim Bin(n; \pi)$

$n = 7$

$\pi = P(X > 4000) = 0{,}1335$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0{,}1335^0 \cdot (1 - 0{,}1335)^7 = 1 - \frac{7!}{0!\,(7-0)!} \cdot 0{,}1335^0 \cdot (1 - 0{,}1335)^7$$
$$= 0{,}633$$

Esercizio 2

Un’indagine di una compagnia telefonica ha stabilito che la durata (in secondi) delle chiamate dei propri utenti è distribuita come una Normale con media 325 secondi e deviazione standard di 95 secondi.

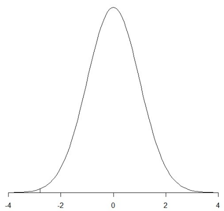
a) Qual è la probabilità che una telefonata duri più di un minuto?

$X = \{\text{Durata in secondi delle chiamate}\}$

$X \sim N(325; 95^2)$

$P(X > 60) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{60-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{60-325}{95}\right) =$

$= P(Z > -2{,}79) = 1 - \Phi(-2{,}79) = \Phi(2{,}79) = 0{,}99736$



b) Qual è la probabilità che la durata totale di 5 chiamate scelte a caso sia superiore ai 30 minuti?

$X = \{\text{Durata in secondi delle chiamate}\}$

$X \sim N(325; 95^2)$

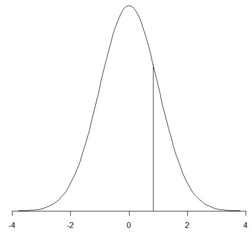
$Y = \{\text{Durata totale di 5 chiamate}\}$

$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$

$Y \sim N(325 \cdot 5; 95^2 \cdot 5) \sim N(1625; 45125)$

$P(Y > 1800) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{1800-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{1800-1625}{\sqrt{45125}}\right) =$

$= P(Z > 0{,}82) = 1 - \Phi(0{,}82) = 1 - 0{,}79389 = 0{,}20611$



c) Qual è la probabilità che estraendo casualmente 10 chiamate, la loro durata media sia compresa tra i 290 e 310 secondi?

$X = \{\text{Durata in secondi delle chiamate}\}$

$X \sim N(325; 95^2)$

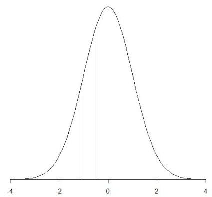
$Y = \{\text{Durata media di 10 chiamate}\}$

$Y = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}}{10}$

$Y \sim N(325; 95^2/10) \sim N(325; 902{,}5)$

$P(290 < Y < 310) = P\left(\frac{290-\mu}{\sigma} < \frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{310-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{290-325}{\sqrt{902{,}5}} < Z < \frac{310-325}{\sqrt{902{,}5}}\right) =$

$= P(-1{,}16 < Z < -0{,}50) = \Phi(1{,}16) - \Phi(0{,}5) = 0{,}87698 - 0{,}69146 = 0{,}18552$



d) Qual è la probabilità che estraendo a caso 10 chiamate, almeno 9 durino più di un minuto?

$X = \{\text{Durata in secondi delle chiamate}\}$

$X \sim N(325; 95^2)$

$Y = \{\text{Numero di chiamate sulle 10 estratte che durano più di un minuto}\}$

$Y \sim Bin(n; \pi)$

$n = 10$

$\pi = P(X > 60) = 0{,}99736$

$P(Y \geq 9) = P(Y = 9) + P(Y = 10) =$

$= \binom{10}{9} \cdot 0{,}99736^{\,9} \cdot (1 - 0{,}99736)^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}99736^{\,10} \cdot (1 - 0{,}99736)^0 =$

$= \frac{10!}{9!\,(10-1)!} \cdot 0{,}99736^{\,9} \cdot (1 - 0{,}99736)^1 + \frac{10!}{10!\,(10-10)!} \cdot 0{,}99736^{\,10} \cdot (1 - 0{,}99736)^0 = 0{,}99969$

Esercizio 3

Un sito internet di vendite on line viene visitato con una media di 8 persone ogni ora. Assumendo che il numero di visite in un'ora sia indipendente dal numero di visite in un'ora precedente o successiva,
a) si scelga una variabile aleatoria appropriata per rappresentare il fenomeno, motivando la risposta;

$X = \{\text{Numero di visite in un'ora}\}$

$X \sim Poisson(8)$

b) si calcoli la probabilità che in un'ora il sito sia visitato al massimo da 3 persone;

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{e^{-8}8^0}{0!} + \frac{e^{-8}8^1}{1!} + \frac{e^{-8}8^2}{2!} + \frac{e^{-8}8^3}{3!} =$$

$$= 0{,}000335 \; + \; 0{,}00268 \; + \; 0{,}01073 \; + \; 0{,}02863 \; = \; 0{,}04239$$

c) si calcoli la probabilità che in mezz'ora il sito sia visitato da più di 4 persone;

$X = \{\text{Numero di visite in un'ora}\}$

$X \sim Poisson(8)$

$Y = \{\text{Numero di visite in mezz'ora}\}$

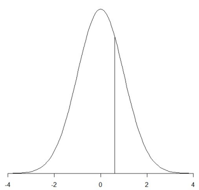
$Y \sim Poisson(4)$

$$P(Y > 4) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4)]$$
$$= 1 - \left(\frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^1}{1!} + \frac{e^{-4}4^2}{2!} + \frac{e^{-4}4^3}{3!} + \frac{e^{-4}4^4}{4!}\right)$$
$$= 1 \; - \; 0{,}0183 \; - \; 0{,}0733 \; - \; 0{,}1465 \; - \; 0{,}1954 - 0{,}1954 \; = \; 0{,}3711$$

d) Si calcoli la probabilità che in 24 ore il sito sia visitato da più di 200 persone

$X = \{\text{Numero di visite in un'ora}\}$

$X \sim Poisson(8)$



$Y = \{\text{Numero di visite in 24 ore}\}$

$Y \sim Poisson(192) \sim N(192; 192)$

$$P(Y > 200) = P(Y > 200{,}5) = P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} > \frac{200{,}5 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{200{,}5 - 192}{\sqrt{192}}\right) =$$

$$= P(Z > 0{,}61) = 1 - \Phi(0{,}61) = 1 - 0{,}72907 = 0{,}27093$$