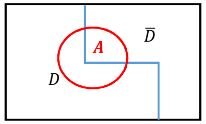
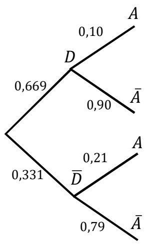
Esercizio 1

Utilizzando i dati contenuti nelle carte fedeltà di una determinata catena di supermercati, si è calcolato che la probabilità di acquisto di un determinato prodotto A è pari al 21% per gli uomini e al 10% per le donne. Inoltre, su 1980 carte fedeltà, 1325 sono possedute da donne.

a) Qual è la probabilità che estraendo a caso una carta fedeltà, si osservi l'acquisto del prodotto A?

D = {Il cliente è donna}
A = {Il cliente acquista il prodotto}
$P(A|U) = 0{,}21$
$P(A|D) = 0{,}10$
$P(D) = \frac{1325}{1980} = 0{,}669$

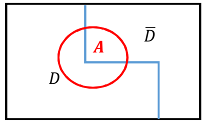


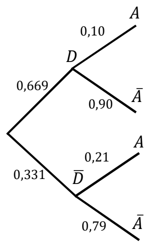


$P(A) = P(A \cap U) + P(A \cap D) = P(A|U)P(U) + P(A|D)P(D) =$
$= 0{,}21 \cdot (1 - 0{,}669) + 0{,}10 \cdot 0{,}699 = 0{,}136$

b) Avendo osservato l'acquisto del prodotto da parte di un cliente, qual è la probabilità che questi sia una donna?

D = {Il cliente è donna}
A = {Il cliente acquista il prodotto}
$P(A|U) = 0{,}21$
$P(A|D) = 0{,}10$
$P(D) = \frac{1325}{1980} = 0{,}669$



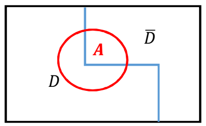


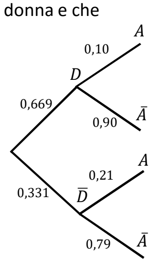
$P(A) = P(A \cap U) + P(A \cap D) = P(A|U)P(U) + P(A|D)P(D) =$
$= 0{,}21 \cdot (1 - 0{,}669) + 0{,}10 \cdot 0{,}699 = 0{,}136$

$$P(D|A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{P(A|D)P(D)}{P(A)} = \frac{P(A|U)P(D)}{P(A)} = \frac{0{,}10 \cdot 0{,}669}{0{,}136} = 0{,}491$$

c) Estraendo a caso una carta fedeltà, qual è la probabilità che appartenga ad una donna e che riveli l'acquisto del prodotto A?

D = {Il cliente è donna}
A = {Il cliente acquista il prodotto}
$P(A|U) = 0{,}21$
$P(A|D) = 0{,}10$
$P(D) = \frac{1325}{1980} = 0{,}669$





$P(A \cap D) = P(A|D)P(D) = 0{,}10 \cdot 0{,}699 = 0{,}07$

d) Estraendo a caso 15 carte fedeltà, qual è la probabilità di osservarne almeno 2 da cui risulti l'acquisto del prodotto A?

$n = 15$

X = {Numero di acquisti osservati su n carte estratte}

$X \sim Bin(n, \pi)$

$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1 - \pi)^{n-x}$

$\pi = P(A) = 0{,}136$

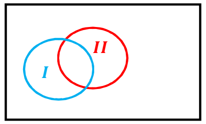
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$
$$= 1 - \left[\binom{15}{0} \cdot 0{,}136^0 \cdot (1 - 0{,}136)^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0{,}136^1 \cdot (1 - 0{,}136)^{14}\right]$$
$$= 1 - \left[\frac{15!}{0!\,(15-0)!} \cdot 1 \cdot (1 - 0{,}136)^{15} + \frac{15!}{1!\,(15-1)!} \cdot 0{,}136^1 \cdot (1 - 0{,}136)^{14}\right] = 1 - [0{,}111 + 0{,}263] = 0{,}626$$

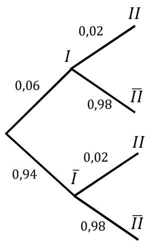
Esercizio 2

Un processo produttivo produce pezzi derivanti dall'assemblaggio di due componenti. La probabilità che la prima componente sia difettosa è pari a 0,06 mentre la probabilità che lo sia la seconda è pari a 0,02. Le due componenti possono essere sane o difettose in maniera indipendente l'una dall'altra. Inoltre, un pezzo risulta difettoso se lo è almeno una delle sue componenti.

a) Calcolare la probabilità che un pezzo sia sano.

I = {La prima componente è difettosa}
II = {La seconda componente è difettosa}
D = {Il pezzo è difettoso}
$D = I \cup II$



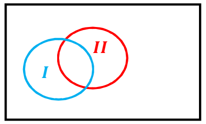


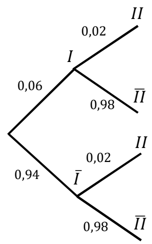
$P(I) = 0{,}06$
$P(II) = 0{,}02$
$P(I \cap II) = P(I)P(II)$

$P(D^c) = P\big((I \cup II)^c\big) = 1 - P(I \cup II) = 1 - [P(I) + P(II) - P(I \cap II)] = 1 - [0{,}06 + 0{,}02 - 0{,}06 \cdot 0{,}02]$
$= 0{,}9212$

b) Calcolare la probabilità che in un pezzo, solo la prima componente risulti difettosa.

I = {La prima componente è difettosa}
II = {La seconda componente è difettosa}
D = {Il pezzo è difettoso}
$D = I \cup II$





$P(I) = 0{,}06$
$P(II) = 0{,}02$
$P(I \cap II) = P(I)P(II)$

$P(I \cap II^c) = P(I) - P(I \cap II) = 0{,}06 - 0{,}06 \cdot 0{,}02 = 0{,}0588$

c) Calcolare la probabilità che su 10 pezzi estratti a caso, al massimo 1 sia difettoso.

I = {La prima componente è difettosa}
II = {La seconda componente è difettosa}
D = {Il pezzo è difettoso}
$D = I \cup II$

$P(I) = 0{,}06$
$P(II) = 0{,}02$
$P(I \cap II) = P(I)P(II)$

$P(D^c) = P\big((I \cup II)^c\big) = 1 - P(I \cup II) = 1 - [P(I) + P(II) - P(I \cap II)] = 1 - [0{,}06 + 0{,}02 - 0{,}06 \cdot 0{,}02]$
$= 0{,}9212$

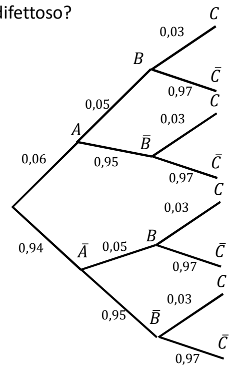
X = {Numero di pezzi difettosi sugli *n* estratti}
$X \sim Bin(n, \pi)$
$n = 10$
$\pi = P(D) = 1 - P(D^c) = 1 - 0{,}9212 = 0{,}0788$
$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}0788^0 \cdot 0{,}9212^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}0788^1 \cdot 0{,}9212^9$
$= \frac{10!}{0!\,(10-0)!} \cdot 1 \cdot 0{,}9212^{10} + \frac{10!}{1!\,(10-1)!} \cdot 0{,}0788^1 \cdot 0{,}9212^9 = 0{,}4401 + 0{,}3765 = 0{,}8166$

Esercizio 3

Un prodotto viene ottenuto assemblando 3 diversi componenti: A, B e C. Sapendo che la probabilità che ciascuno dei componenti sia difettoso è pari a 0,06 per A, a 0,05 per B ed a 0,03 per C, e che i tre componenti risultano sani o difettosi in maniera indipendente l'uno dall'altro,

a) qual è la probabilità che un articolo non presenti alcun componente difettoso?

A = {La componente *A* è difettosa}
B = {La componente *B* è difettosa}
C = {La componente *C* è difettosa}
A, *B* e *C* indipendenti tra loro



$P(A) = 0{,}06$
$P(B) = 0{,}05$
$P(C) = 0{,}03$

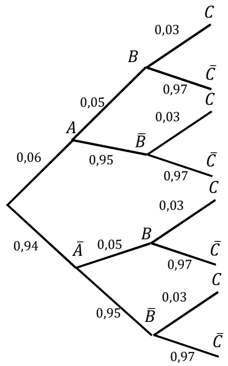
$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = (1 - 0{,}06)(1 - 0{,}05)(1 - 0{,}03) = 0{,}866$

b) qual è la probabilità che un articolo presenti al massimo due componenti difettosi?

A = {La componente A è difettosa}
B = {La componente B è difettosa}
C = {La componente C è difettosa}
A, B e C indipendenti tra loro

$P(A) = 0{,}06$
$P(B) = 0{,}05$
$P(C) = 0{,}03$

$1 - P(A \cap B \cap C) = 1 - (0{,}06 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}03) = 0{,}9999$



c) qual è la probabilità che in un articolo il componente C sia sano?

$P(C^c) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

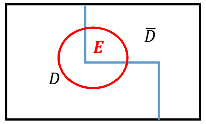
d) qual è la probabilità di osservare un componente sano su tre?

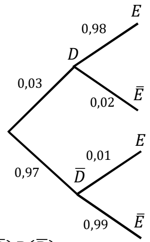
$P[(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)] = P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) =$
$0{,}06 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}97 + 0{,}06 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}03 + 0{,}94 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}03 = 0{,}006$

Esercizio 4

Si ha un sistema automatico che seleziona i pezzi difettosi prodotti da una macchina, con le seguenti proprietà:
- un pezzo difettoso è eliminato con probabilità 0,98;
- un pezzo non difettoso è eliminato per errore con probabilità 0,01.
Sapendo che la macchina produce con un tasso di difettosità del 3%,
a) Calcolare la probabilità che un pezzo sia eliminato

D = {Il pezzo è difettoso}
E = {Il pezzo viene eliminato}



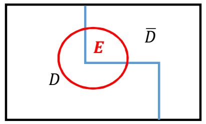


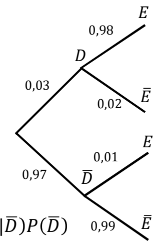
$P(E|D) = 0{,}98$
$P(E|\bar{D}) = 0{,}01$
$P(D) = 0{,}03$

$P(E) = P[(E \cap D) \cup (E \cap \bar{D})] = P(E \cap D) + P(E \cap \bar{D}) = P(E|D)P(D) + P(E|\bar{D})P(\bar{D})$
$= 0{,}98 \cdot 0{,}03 + 0{,}01 \cdot (1 - 0{,}03) = 0{,}0391$

b) Calcolare la probabilità che un pezzo non eliminato sia difettoso.

D = {Il pezzo è difettoso}
E = {Il pezzo viene eliminato}





$P(E|D) = 0{,}98$
$P(E|\bar{D}) = 0{,}01$
$P(D) = 0{,}03$

$P(E) = P[(E \cap D) \cup (E \cap \bar{D})] = P(E \cap D) + P(E \cap \bar{D}) = P(E|D)P(D) + P(E|\bar{D})P(\bar{D})$
$= 0{,}98 \cdot 0{,}03 + 0{,}01 \cdot (1 - 0{,}03) = 0{,}0391$

$$P(D|\bar{E}) = \frac{P(D \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(\bar{E}|D)P(D)}{P(\bar{E})} = \frac{(1 - 0{,}98) \cdot 0{,}03}{(1 - 0{,}0391)} = 0{,}0006$$

c) Calcolare la probabilità che un pezzo eliminato sia sano.

$$P(\bar{D}|E) = \frac{P(\bar{D} \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|\bar{D})P(\bar{D})}{P(E)} = \frac{0{,}01 \cdot (1 - 0{,}03)}{0{,}0391} = 0{,}248$$

d) Calcolare la probabilità che su 10 pezzi eliminati, nessuno sia sano. Qual è invece la probabilità di osservare più di 3 pezzi sani?

X = {Numero di pezzi sani sugli n eliminati}
$X \sim Bin(n, \pi)$
$n = 10$
$\pi = P(\bar{D}|E) = 0{,}248$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}248^0 \cdot (1 - 0{,}248)^{10} = \frac{10!}{0!(10-0)!} \cdot 1 \cdot 0{,}752^{10} = 0{,}0578$$

$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) + \cdots + P(X = 10) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$
$= 1$
$- \left[\binom{10}{0} \cdot 0{,}248^0 \cdot (1 - 0{,}248)^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}248^1 \cdot (1 - 0{,}248)^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}248^2 \cdot (1 - 0{,}248)^8 + \binom{10}{3}\right.$
$\left. \cdot 0{,}248^3 \cdot (1 - 0{,}248)^7\right] = 1 - [0{,}0578 + 0{,}1906 + 0{,}283 + 0{,}249] = 1 - 0{,}7804 = 0{,}2197$