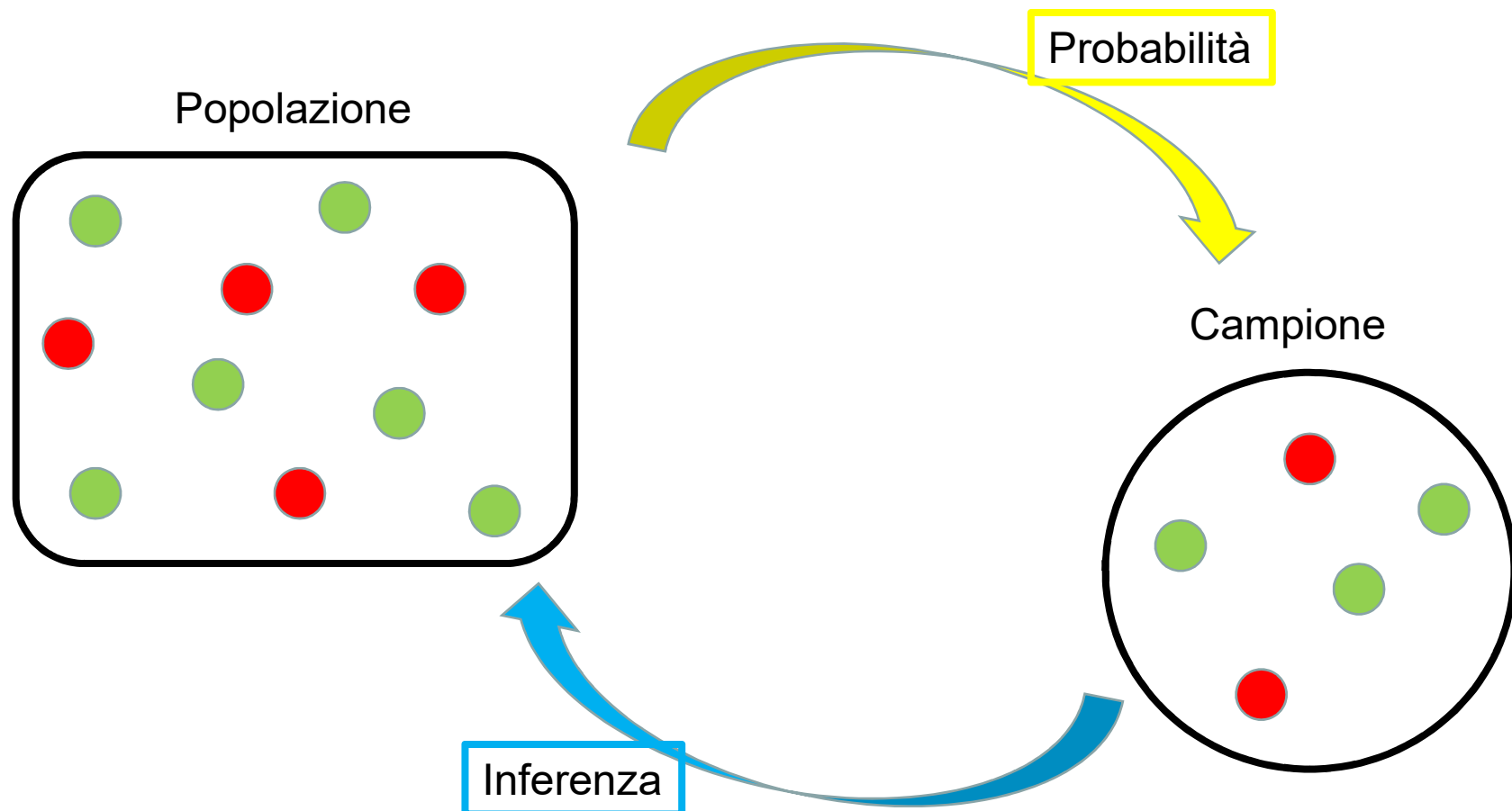


Probabilità e inferenza

- **Inferenza statistica**: insieme delle procedure attraverso cui dalle caratteristiche osservate di un campione si cerca di risalire a quelle della popolazione di riferimento.

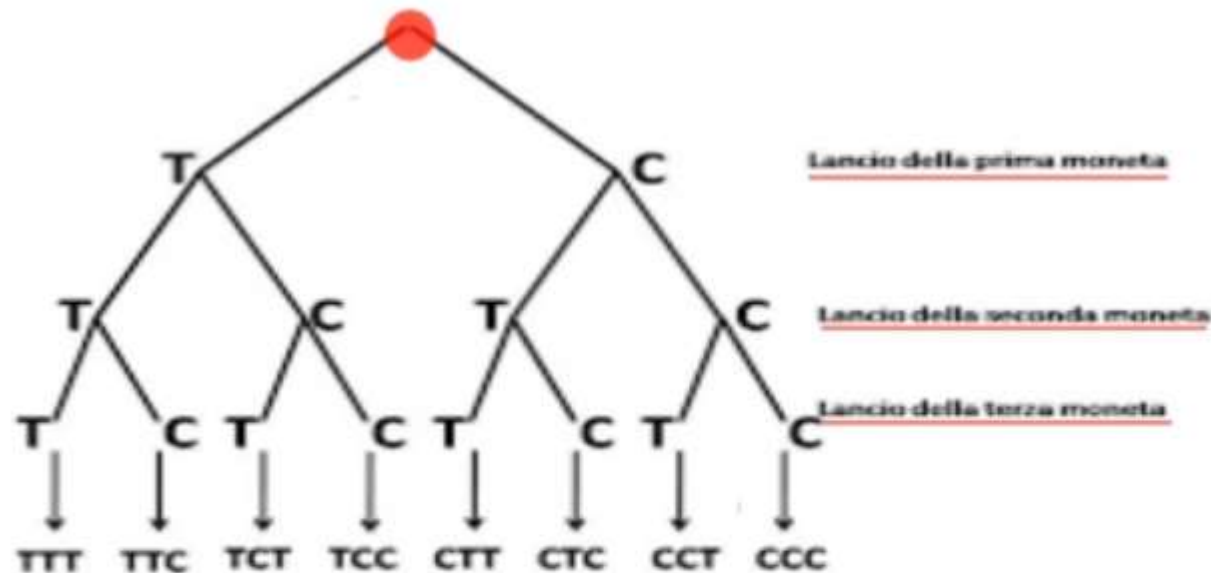


Probabilità: concetti di base

- **Prova**: (o esperimento aleatorio) è un esperimento caratterizzato da due o più possibili risultati, per il quale esiste incertezza circa il risultato che si realizzerà
- **Evento elementare**: ogni possibile risultato dell'esperimento aleatorio, indicato genericamente come ω_i
- **Evento**: insieme di eventi elementari, indicato genericamente come E
- **Probabilità**: numero compreso tra 0 e 1 che misura il grado di incertezza connesso al risultato scaturito da una prova

In una data **prova**, l'**evento** E
si verifica con **probabilità** $P(E)$

Esempio: Consideriamo l'esperimento che consiste nel lanciare tre volte una moneta e nell'osservare le facce che si presentano. Qual è lo spazio campionario? Quali sono gli eventi elementari?



Il lancio della **prima moneta** produce i due rami T e C, nel lancio della **seconda moneta** ad ogni nodo del primo lancio si associano altri due nodi TeC, nel lancio della **terza moneta** ad ogni nodo del secondo lancio si associano altri nodi T e C.

Per ottenere tutti i possibili casi nel lancio delle tre monete, si percorrono tutti i rami, partendo dalla radice fino alla fine del ramo.

Leggendo il primo ramo abbiamo l'evento TTT

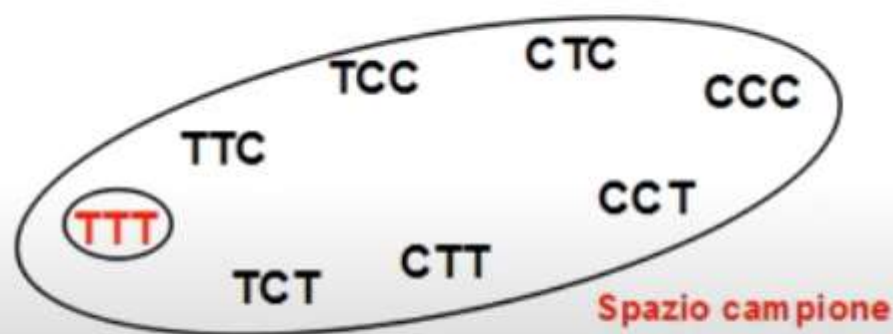


Diagramma di Venn

Esempio:

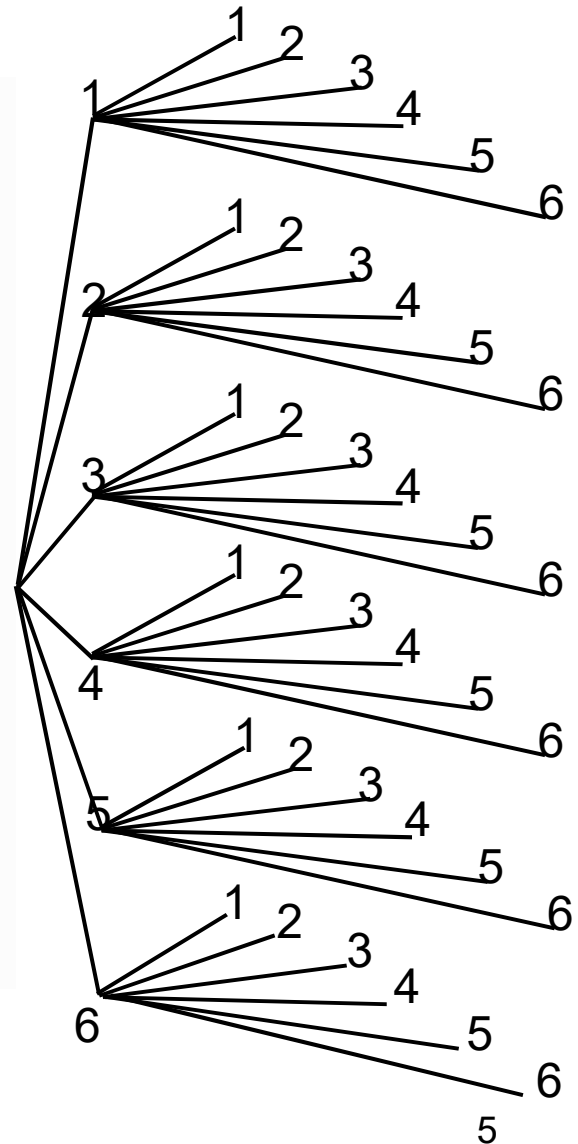
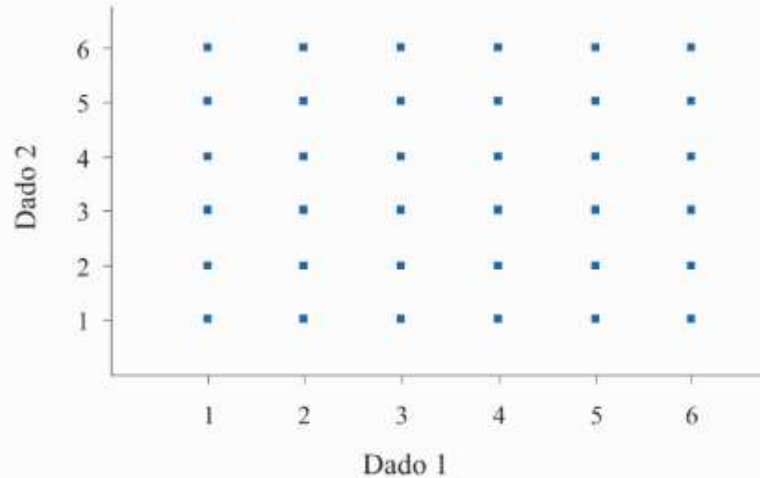
Si consideri il lancio di due dadi e si elenchino gli eventi elementari generati dall'esperimento.

Soluzione

Lo spazio campionario è costituito dalle 36 coppie di numeri:

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), \dots, (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\},$$

rappresentate nella Figura



Esempio:

Si immagini di lanciare una moneta ripetutamente finché non esca per la prima volta “Testa”. Si descriva lo spazio campionario connesso all’esperimento.

Soluzione

Lo spazio campionario è costituito dalla seguente successione di eventi elementari:

$$S = \{T, CT, CCT, CCCT, CCCCT, \dots\}.$$

Si tratta di un’infinità numerabile di elementi. 

Esempio:

Si immagini di osservare la durata di una lampadina elettrica prodotta da una certa azienda. Si definisca lo spazio campionario connesso all’esperimento.

Soluzione

I possibili risultati dell’esperimento sono tutti i numeri reali dell’intervallo $[0, T]$, dove T è la durata massima desumibile dalle caratteristiche del processo produttivo. Si può allora scrivere

$$S = \{x : 0 \leq x \leq T\}.$$



Operazioni sugli insiemi

- Le operazioni sugli insiemi possono essere visualizzate attraverso i **diagrammi di Venn**: ogni insieme è rappresentato da una *linea curva chiusa* e si trova all'interno di una *scatola* che rappresenta lo spazio, Ω , dei risultati dell'esperimento.
- **Unione** di due eventi A e B : è l'evento $E = A \cup B$ che si verifica se almeno uno dei due eventi A o B si verificano
- **Intersezione** di due eventi A e B : è l'evento $E = A \cap B$ che si verifica se si verificano entrambi gli eventi A e B
- **Negazione** di un evento A : è l'evento A^c che si verifica se non si verifica A . La negazione di A può indicarsi come A^c oppure $\bar{A}$

•Sfruttando le operazioni sugli insiemi si possono definire i seguenti eventi:

➤ **Evento impossibile:** è l'evento che non può mai verificarsi e può essere definito come

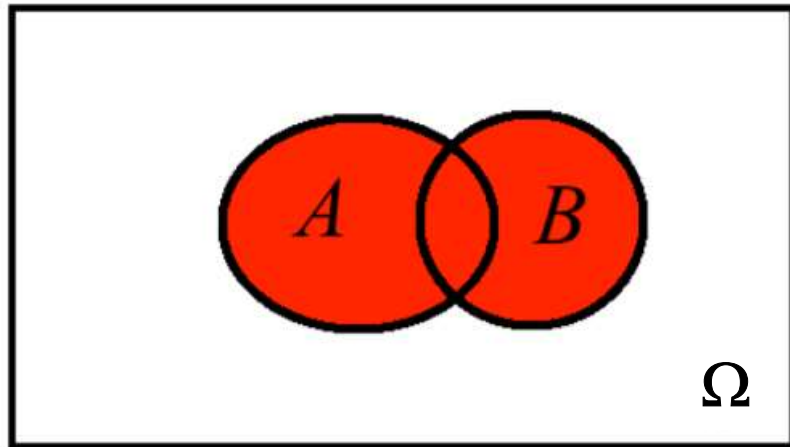
$$\emptyset \equiv \overline{\Omega}$$

➤ **Evento certo,** ossia l'evento che si verifica sempre in quanto comprende tutti i possibili risultati dell'esperimento. Può essere definito come

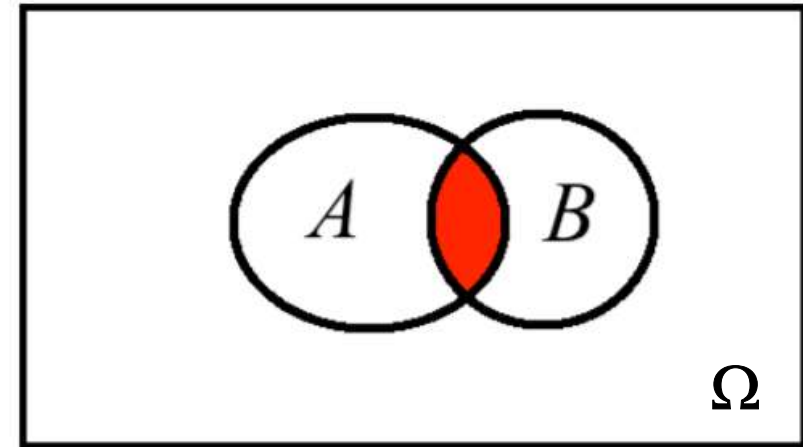
$$A \cup \bar{A} \equiv B \cup \bar{B} \equiv \Omega$$

➤ **Eventi incompatibili:** due eventi A e B si dicono incompatibili se

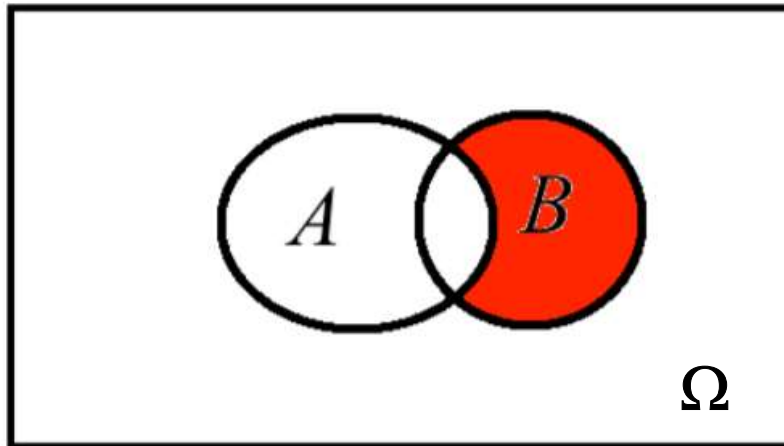
$$A \cap B = \emptyset$$



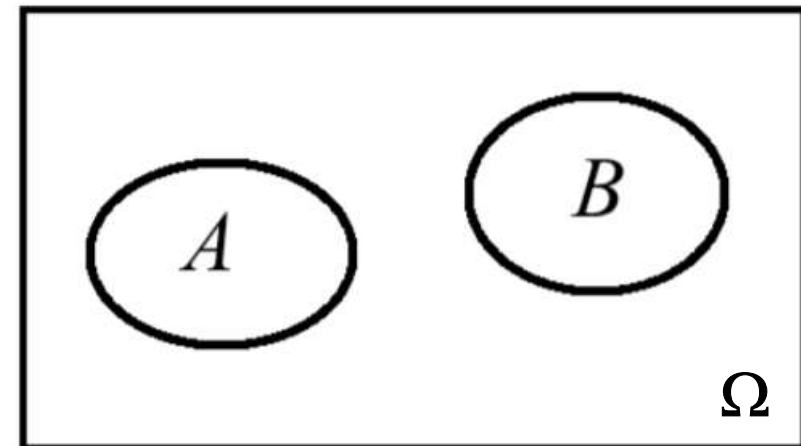
Unione tra A e B ($A \cup B$)



Intersezione tra A e B ($A \cap B$)



Intersezione tra B e negato di A ($B \cap A^c$)



Eventi disgiunti $A \cap B = \emptyset$

L'**elemento vuoto** $\emptyset$ è di fondamentale importanza per l'insiemistica, e quindi anche nella Teoria delle Probabilità, per la quale infatti prende il nome di **evento impossibile**.

Proprietà delle operazioni sugli insiemi

Le operazioni di unione e intersezione godono delle proprietà *commutativa*, *associativa* e *distributiva*.

- Le operazioni di intersezione e unione sono *commutative* cioè scambiando l'ordine della coppia degli insiemi, il risultato dell'operazione è lo stesso insieme, in simboli

$$A \cap B \equiv B \cap A \quad \text{e} \quad A \cup B \equiv B \cup A$$

- Le operazioni di intersezione e unione sono *associative* cioè il risultato non dipende dall'ordine con cui si eseguono le operazioni, pertanto risultano superflue le parentesi, in simboli

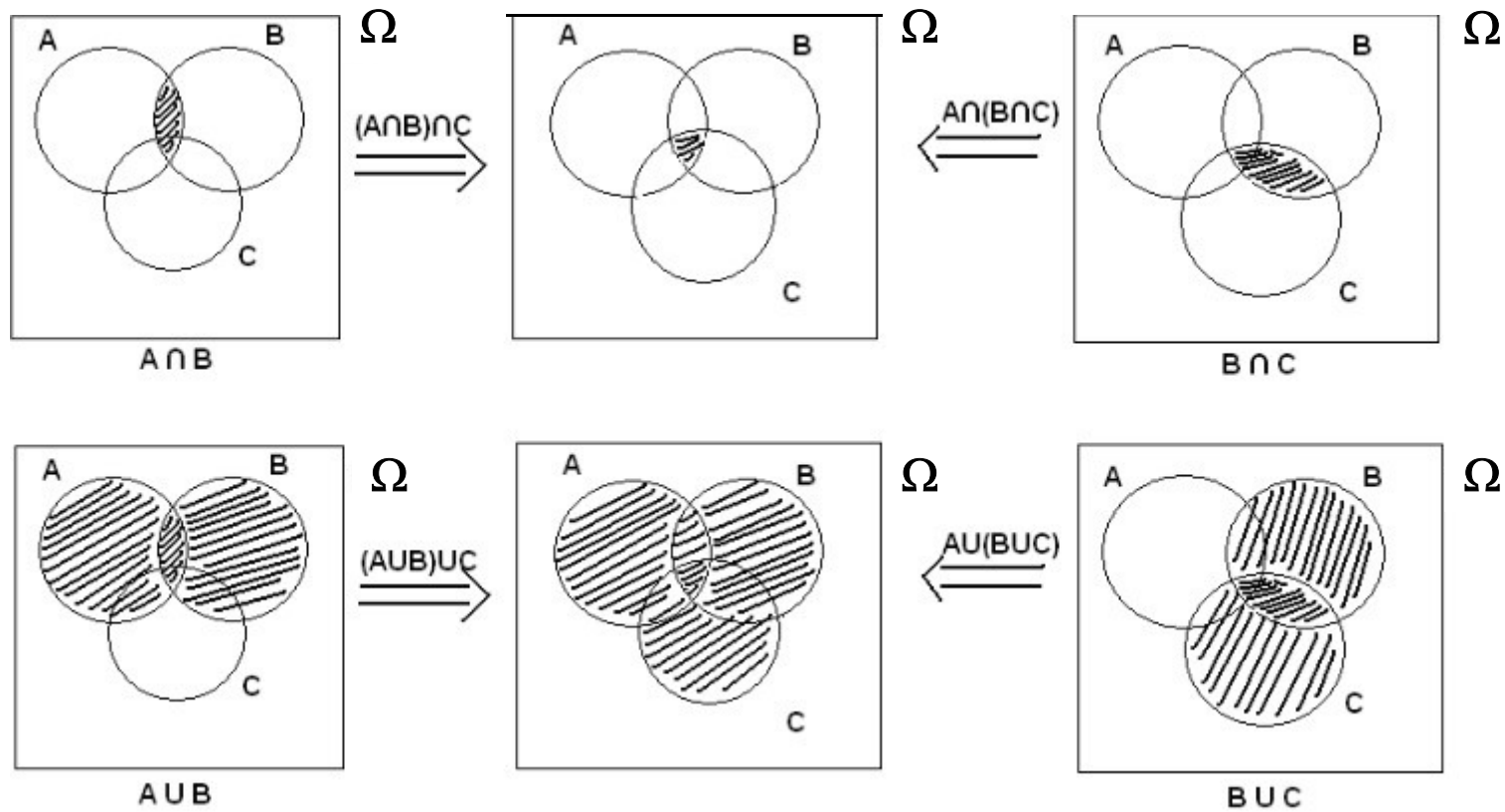
$$(A \cap B) \cap C \equiv A \cap (B \cap C) \quad \text{e} \quad (A \cup B) \cup C \equiv A \cup (B \cup C)$$

- Le operazioni di intersezione e di unione sono *distributive* l'una rispetto all'altra

$$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{e} \quad A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

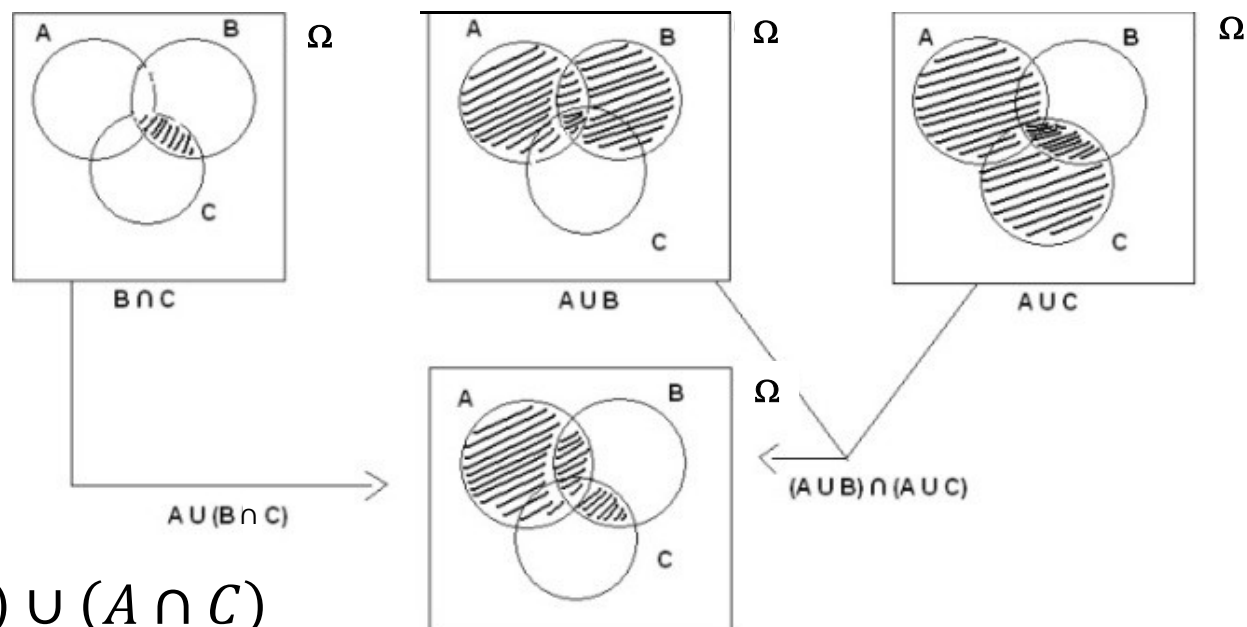
Proprietà associativa

$$(A \cap B) \cap C \equiv A \cap (B \cap C) \quad \text{e} \quad (A \cup B) \cup C \equiv A \cup (B \cup C)$$

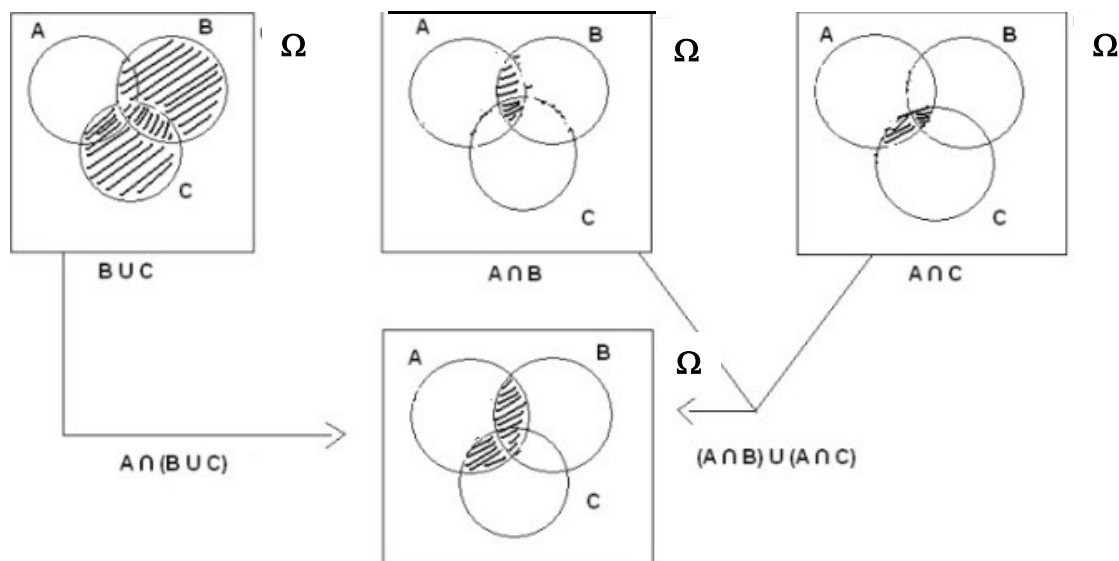


Proprietà distributiva

$$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

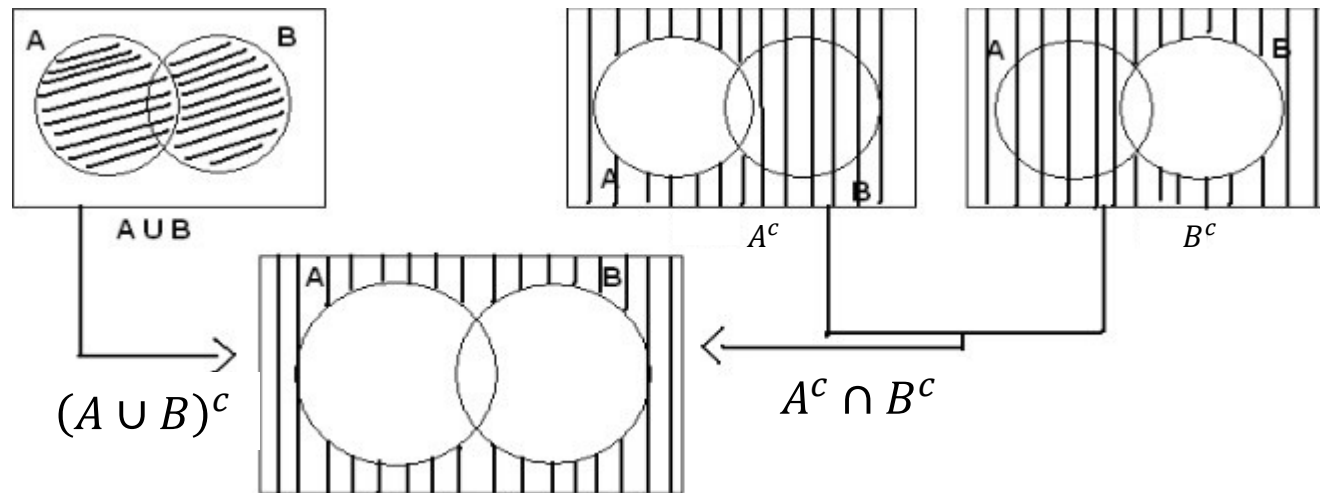


$$A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



Leggi di De Morgan

1. $(A \cup B)^c \equiv A^c \cap B^c$

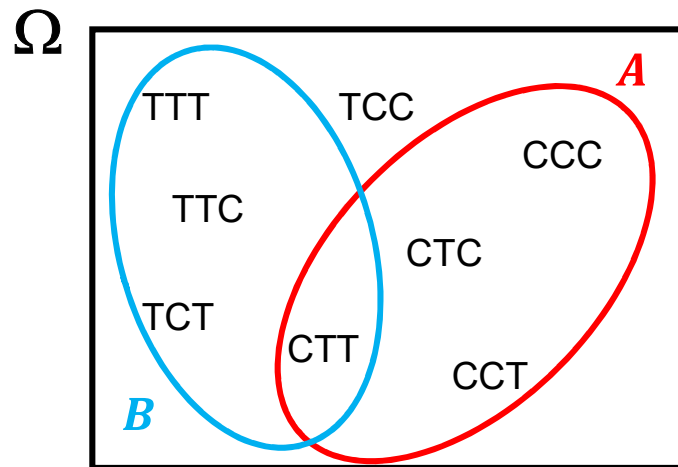


2. $(A \cap B)^c \equiv A^c \cup B^c$

Definizioni della probabilità

- **Definizione classica:** la probabilità è data dal rapporto tra il numero dei *casi favorevoli* all'evento e il numero dei *casi possibili* purché essi siano tutti *ugualmente possibili*.
- **Definizione frequentista:** la probabilità di un evento E è il limite a cui tende la *frequenza relativa* con cui si osserva il verificarsi di E in un numero n di *prove ripetute* nelle *stesse condizioni*, quando n tende a infinito
- **Definizione soggettiva:** la probabilità di un evento E è il *grado di fiducia* che ciascun individuo, in maniera *soggettiva*, attribuisce al verificarsi dell'evento, in base alle *informazioni a sua disposizione*.

Esempio di applicazione della definizione classica: riprendiamo l'esperimento che consiste nel lanciare tre volte una moneta. Si calcoli la probabilità degli eventi $A = \{\text{Croce nel primo lancio}\}$, $B = \{\text{Almeno due volte testa}\}$, $A \cup B = \{\text{Croce al primo lancio o almeno due volte testa}\}$ e $A \cap B = \{\text{Croce al primo lancio e almeno due volte testa}\}$



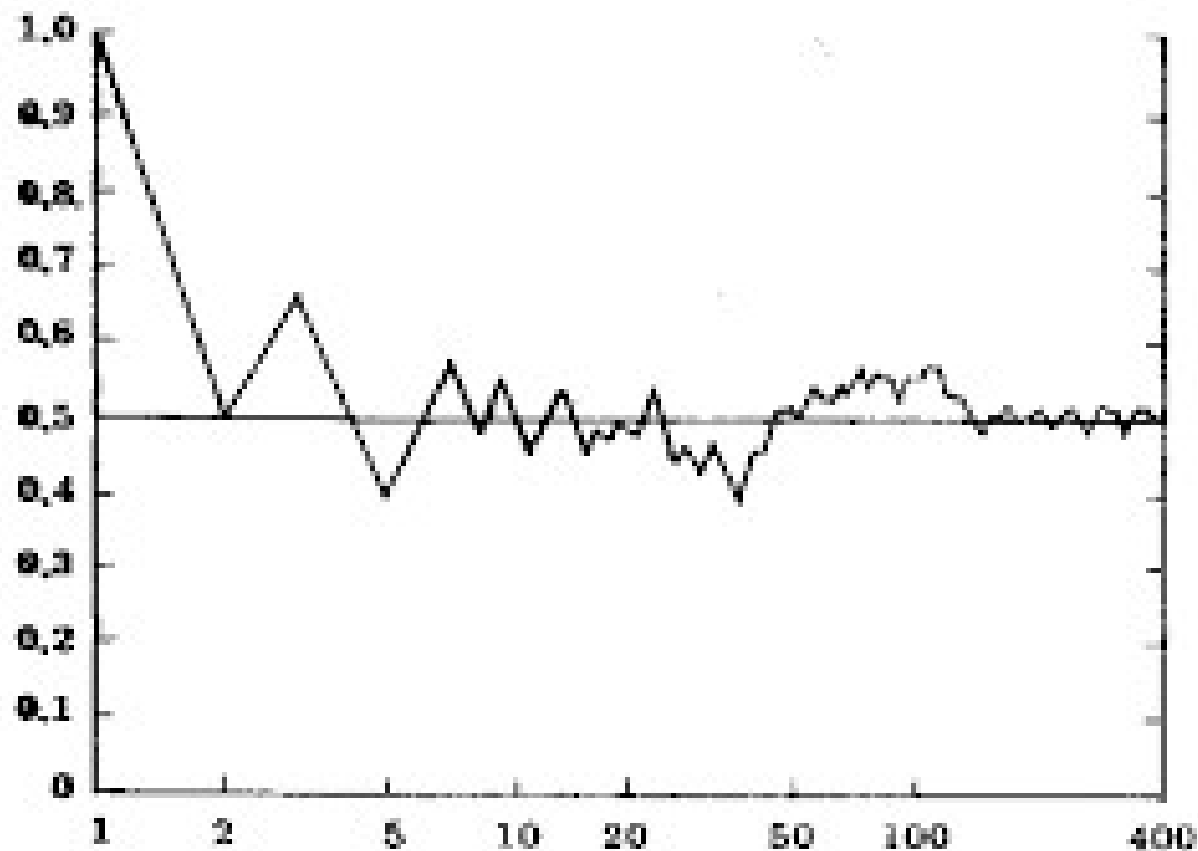
$$P(A) = \frac{4}{8} = 0,5$$

$$P(B) = \frac{4}{8} = 0,5$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{8} = 0,875$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = 0,25$$

Esemplificazione della definizione frequentista di probabilità:
frequenza relativa dell'evento «Testa» all'aumentare del numero delle prove.



Frequenza relativa dell'evento testa in una successione di lanci (scala logaritmica per il numero di lanci)

Approccio assiomatico

- La probabilità è una funzione di insieme che associa a ogni evento E un numero reale. La probabilità sarà indicata con $P(E)$.
- La probabilità deve sottostare alle seguenti proprietà assiomatiche:

Postulato 1

$$\longrightarrow P(A) \geq 0$$

Postulato 2

$$\longrightarrow P(\Omega) = 1$$

Postulato 3

$$\longrightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

•A partire dai tre assiomi è possibile derivare tutta una serie di leggi che la probabilità deve rispettare, tra cui:

➡ $0 \leq P(A) \leq 1$

- Per il primo assioma $P(A) \geq 0$. Per il secondo assioma $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$. Per il terzo assioma $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Quindi $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ e $P(A) \leq 1$.

➡ $P(\emptyset) = 0$

- Per il secondo assioma $P(\emptyset \cup \Omega) = P(\Omega) = 1$. Per il terzo assioma $P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$. Quindi $P(\emptyset) + P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) + 1 = 1$ e $P(\emptyset) = 0$.

➡ $B \subset A \rightarrow P(B) \leq P(A)$

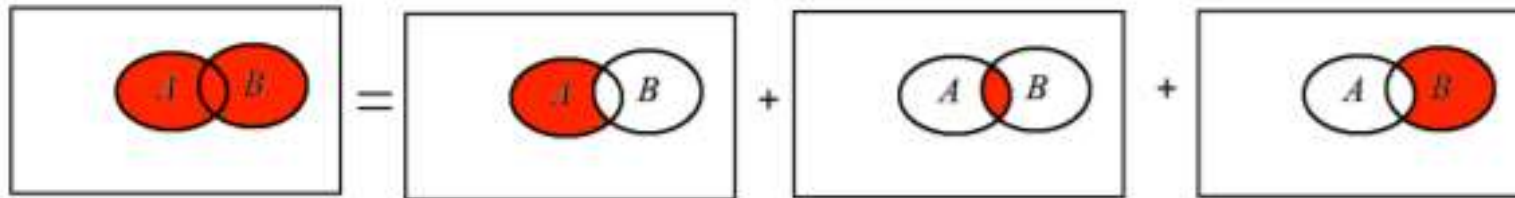
➡ $P(A^c) = 1 - P(A)$

➡ $P(B) = 1 \rightarrow P(B \cap A) = P(A)$

➡ $P(B) = 0 \rightarrow P(B \cup A) = P(A)$

➡ $P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (**Legge delle probabilità totali o legge della somma**)

Legge delle probabilità totali



$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) *$$

$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \quad B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$$

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \quad P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

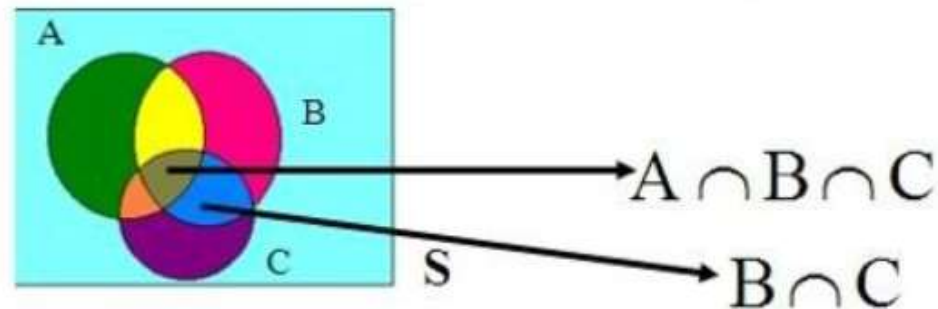
$$P(A) + P(B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + 2P(A \cap B) **$$

$$** - * \quad \text{dà } P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Generalizzazione del teorema della probabilità totale al caso di 3 eventi

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \\ &\quad - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$



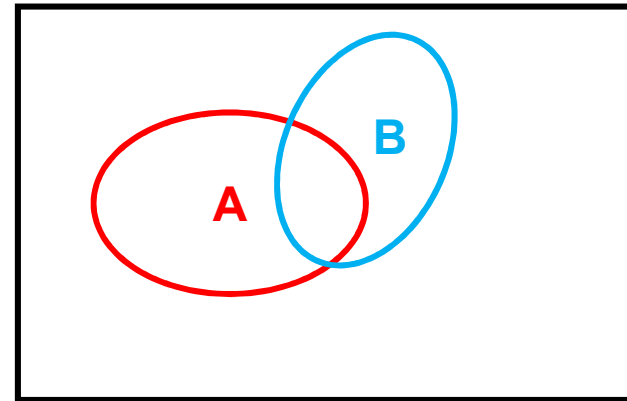
Generalizzazione al caso di n eventi

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

Esercizio: Dati due eventi A e B dello spazio campionario Ω , si sa che $P(\bar{A}) = 0,3$, $P(B) = 0,4$, $P(A \cap \bar{B}) = 0,5$. Si determinino le probabilità:

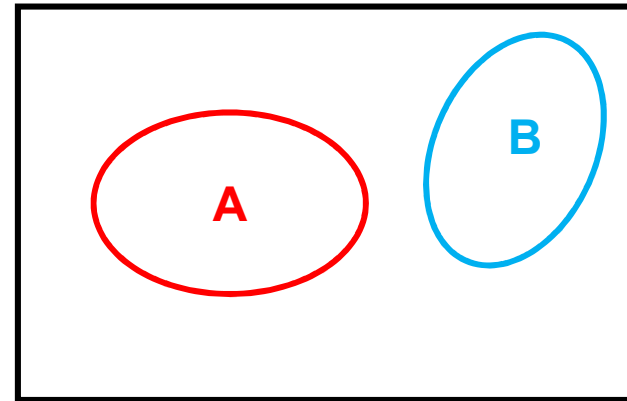
- 1) $P(A)$
- 2) $P(A \cap B)$
- 3) $P(A \cup B)$
- 4) $P(\bar{A} \cup B)$

Soluzione:



Esercizio: Dati due eventi incompatibili A e B tali che $P(A) = 0,35$ e $P(B) = 0,4$, si determinino le probabilità:

- 1) $P(\bar{A})$
- 2) $P(A \cap B)$
- 3) $P(A \cup B)$
- 4) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$
- 5) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$



Esercizio: Le valutazioni di un esperto di borsa circa il rendimento, nel prossimo anno, di una determinata azione del settore industriale sono indicate nella seguente tabella:

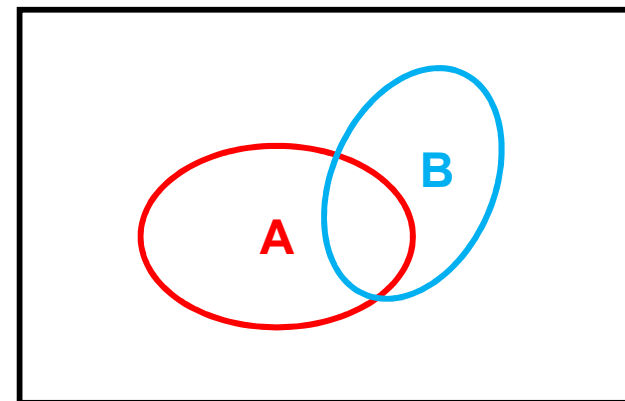
Tasso di rendimento %	Fino a -5	Da -5 a 0	Da 0 a 5	Da 5 a 10	Più di 10
Probabilità	0,02	0,12	0,33	0,47	0,06

Si definiscano gli eventi $A = \{\text{Il tasso di rendimento sarà negativo o nullo}\}$ e $B = \{\text{Il tasso di rendimento sarà maggiore di 5}\}$

- Si descriva l'evento complementare di A e se ne determini la probabilità
- Si descriva l'evento intersezione di A e di B e se ne determini la probabilità
- Si descriva l'evento unione di A e di B e se ne determini la probabilità

Esercizio: Per i due eventi A e B sono note le probabilità: $P(A) = 0,48$, $P(B) = 0,39$, $P(A \cap B) = 0,18$. Si dispongano le probabilità nella tabella che segue

	A	$\bar{A}$
B		
$\bar{B}$		



Probabilità condizionate e indipendenza

- A volte si vuole valutare la probabilità di un certo evento A, sapendo che si è già verificato un evento B ad esso collegato. Si parla allora di probabilità di A **condizionata** a B e si indica come $P(A|B)$

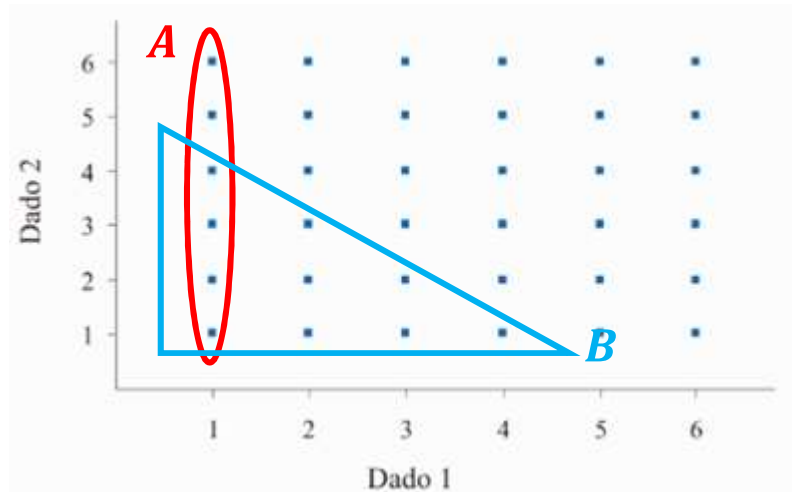
- La probabilità di A condizionata a B si calcola come:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

- Dalla probabilità condizionata segue che (**principio delle probabilità composte** o **regola del prodotto**)

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Esempio: Riprendiamo l'esempio del lancio di due dadi e consideriamo gli eventi $A = \{\text{Si ottiene 1 al primo lancio}\}$ e $B = \{\text{La somma dei due dadi è minore di 6}\}$. Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ e $P(B|A)$.

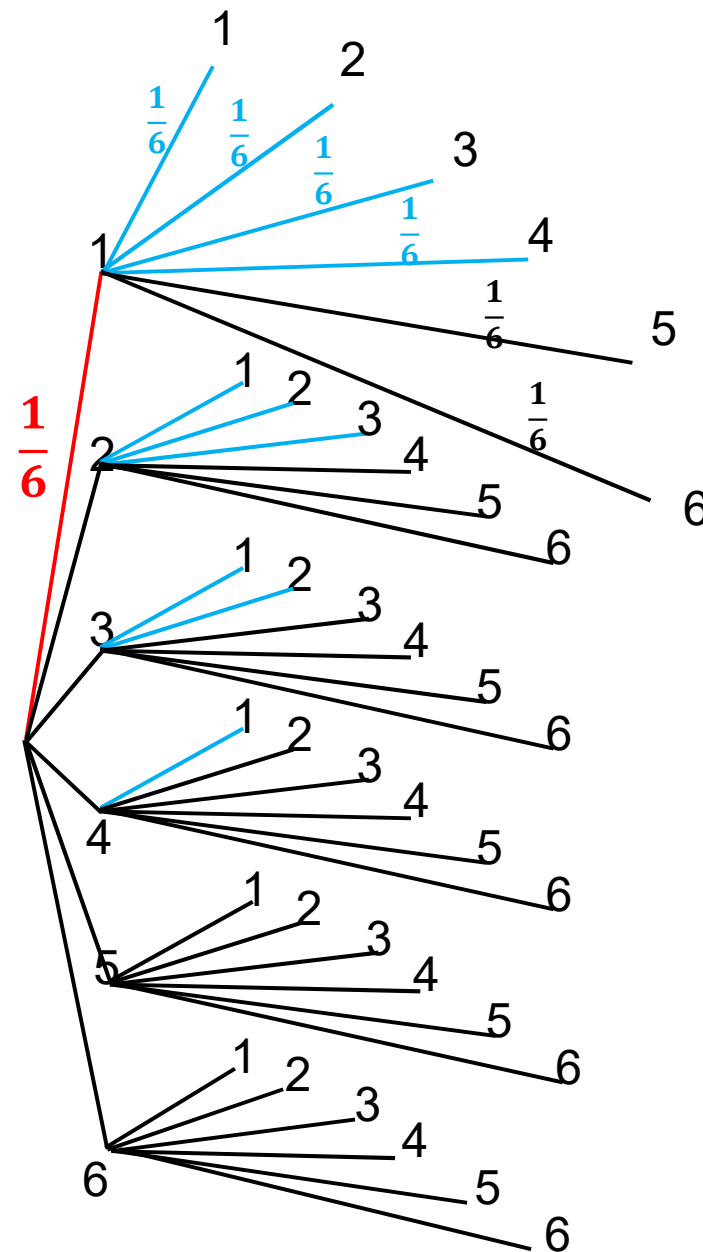


$$P(A) = \frac{6}{36}$$

$$P(B) = \frac{10}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36}$$

$$P(B|A) = \frac{4}{6} = \frac{4/36}{6/36} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



- Se il verificarsi dell'evento B non modifica in alcun modo la probabilità di verificarsi dell'evento A, i due eventi si dicono **indipendenti**.

- Il concetto di indipendenza è simmetrico e può essere formalizzato in due modi equivalenti:

- Due eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A | B) = P(A)$$

- Due eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se

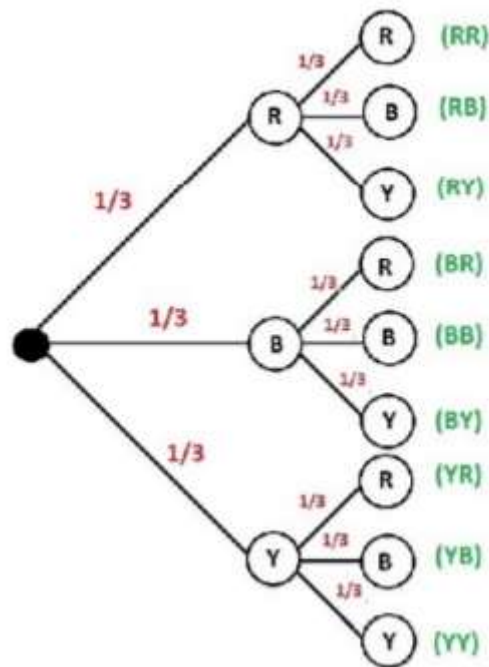
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Infatti, dalla legge del prodotto

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \stackrel{!}{=} P(A)P(B)$$

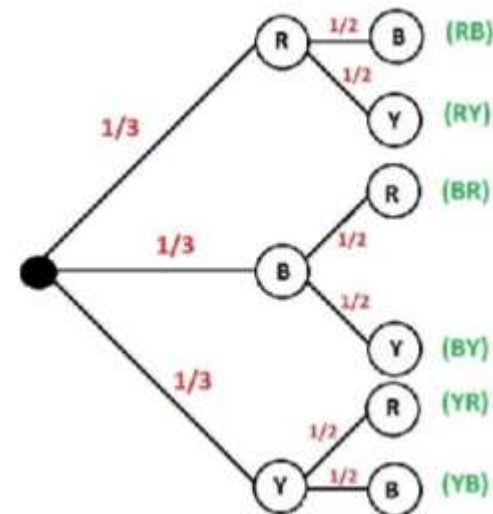
Esempio: Consideriamo un'urna che contiene 3 palline di colore diverso, rosso (R), blu (B) e giallo (Y). Si descriva lo spazio campionario nel caso di estrazione di due biglie con e senza ripetizione e si calcoli la probabilità di estrarre una pallina R seguita da una pallina B, rispettivamente nei due schemi di estrazione.

Estrazioni con ripetizione



$$P(R_1 \cap B_2) = P(B_2|R_1)P(R_1) = \\ P(B_2)P(R_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Estrazioni senza ripetizione



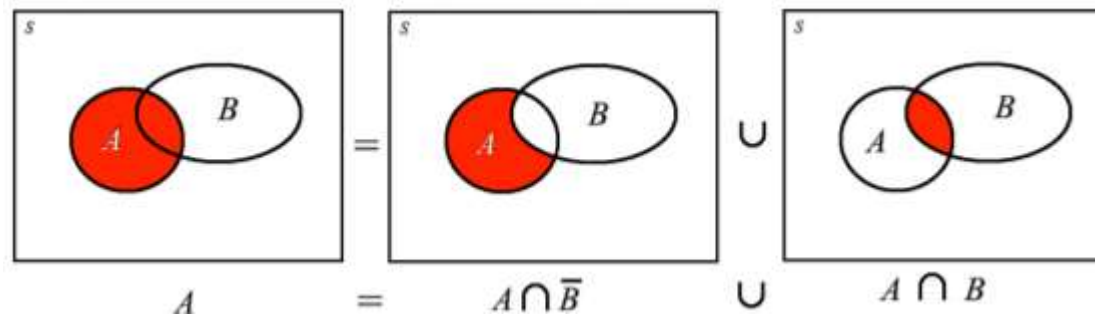
$$P(R_1 \cap B_2) = P(B_2|R_1)P(R_1) = \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Fattorizzazione di un evento

Dati due eventi qualsiasi A e B , si può esprimere A nel seguente modo:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

Infatti ogni elemento che appartiene all'evento A , sta in A ma non in B , oppure sta sia in A che in B .



Dato che $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$,

- per il terzo assioma $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$
- per la regola del prodotto $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$

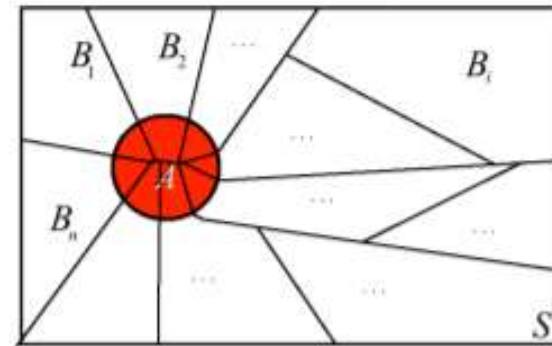
La probabilità di un evento A è la media, pesata opportunamente, delle probabilità condizionate di A , sapendo che si è verificato B , e che non si è verificato B . I pesi sono le probabilità degli eventi rispetto a cui si condiziona.

Generalizzazione della fattorizzazione di un evento

La relazione $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$ può essere generalizzata.

Si definisce partizione di Ω un insieme di eventi $B_1, \dots, B_j, \dots, B_n$ mutualmente disgiunti e la cui unione restituisce l'intero spazio Ω :

- $B_i \cap B_j = \emptyset$, per ogni i, j
- $\sum_{j=1}^n B_j = \Omega$



Consideriamo un qualsiasi evento A che possiamo riscrivere come $A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$ dove gli eventi $(A \cap B_i)$ sono a loro volta disgiunti

- per il terzo assioma $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$
- per la regola del prodotto $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$

La formula precedente è detta formula di fattorizzazione della probabilità: è possibile calcolare la probabilità di un evento A , condizionandolo rispetto a un gruppo di eventi, mutuamente disgiunti, che siano una partizione di tutto Ω .

Il teorema di Bayes

Supponiamo che si sia verificato l'evento A . Che probabilità avranno di conseguenza gli eventi B_i ?

Teorema di Bayes

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}$$

Infatti per la definizione di probabilità condizionata

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)},$$

per la legge del prodotto

$$P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i),$$

e per la formula di fattorizzazione

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

Osservazioni:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}$$

La formula di Bayes sintetizza il processo di apprendimento dall'esperienza.

- Immaginiamo che gli eventi B_i rappresentino delle ipotesi o delle possibili cause alla base di un fenomeno o di un evento A . Sulla base delle conoscenze attuali a queste ipotesi viene assegnata una probabilità, detta probabilità *a priori*.
- Un evento A ha una certa probabilità $P(A|B_i)$ di verificarsi sotto ciascuna ipotesi. Questa probabilità è chiamata *verosimiglianza*.
- Attraverso il teorema di Bayes, la probabilità di un ipotesi B_i , viene aggiornata in seguito all'osservazione di un certo evento A . La formula di Bayes rappresenta il modo con cui deve ragionevolmente modificarsi la conoscenza attuale, in seguito al fatto di aver osservato A . Le probabilità $P(B_i|A)$ sono dette probabilità *a posteriori*.

Esempio: Teorema di Bayes e tamponi

Perché fare due tamponi per determinare se un paziente è guarito?

	Malato (M)	Sano (S)	
Test Positivo	VP	FP	VP+FP
Test Negativo	FN	VN	FN+FP
	Totale M	Totale S	Totale


Sensibilità = $VP / (Tot\ M)$


Specificità = $VN / (Tot\ S)$

- Il test diagnostico attualmente utilizzato per la diagnosi del Covid-19 è il **test molecolare con metodo Real Time PCR** per SARS-CoV-2 indicato dall'OMS (il cosiddetto *tampone*).
- Il test ha (valori arrotondati) sensibilità del 95% e specificità del 95%.
- Formalizziamo le caratteristiche del test:
 - M = (il paziente è malato)
 - S = (il paziente è sano)
 - T^+ = (il test è positivo)
 - T^- = (il test è negativo)

$$\text{Sensibilità} = \frac{P(M \text{ e } T^+)}{P(M)} = P(T^+|M) = 0.95$$

$$\text{Specificità} = \frac{P(S \text{ e } T^-)}{P(S)} = P(T^-|S) = 0.95$$

	Malato	Sano
Test positivo	$P(M \text{ e } T^+)$	$P(S \text{ e } T^+)$
Test negativo	$P(M \text{ e } T^-)$	$P(S \text{ e } T^-)$
	$P(M)$	$P(S)$



$$\text{Sensibilità} = \frac{P(M \text{ e } T^+)}{P(M)}$$

$$\text{Specificità} = \frac{P(S \text{ e } T^-)}{P(S)}$$

- La performance del test (specificità e significatività) è:

$$P(T^+|M) = P(T^+|S) = 0.95$$

$$P(T^-|M) = P(T^-|S) = 0.05$$

Ma non conosciamo la PREVALENZA $P(M)$

- Attualmente le “stime”, fatte regione per regione, variano da circa 0.4% a 10%.
- Ma noi assegniamo, più pessimisticamente, $P(M) = 0.2$ (20%).
- Quindi $P(S) = 1 - P(M) = 0.8$ (80%).
- Noi vogliamo $P(S|T^-)$.

	Malato	Sano	
Test positivo	$P(M \text{ e } T^+)$	$P(S \text{ e } T^+)$	$P(T^+)$
Test negativo	$P(M \text{ e } T^-)$	$P(S \text{ e } T^-)$	$P(T^-)$
	$P(M)$	$P(S)$	

$$P(S|T^-) = \frac{P(S \text{ e } T^-)}{P(T^-)}$$

$$P(S|T^-) = \frac{P(T^-|S)P(S)}{P(T^-|S)P(S) + P(T^-|M)P(M)} = \frac{0,95 \cdot 0,80}{0,95 \cdot 0,80 + 0,05 \cdot 0,20} = 0,987$$

Con una probabilità del 98,7% il paziente è guarito se il tampone risulta negativo 35

E perché allora due tamponi?

- Ho una probabilità del 98.7% di essere guarito se il mio primo tampone è negativo
- Rifacciamo il tampone e calcoliamo $P(S|T_1^-, T_2^-)$
- Si usa sempre il **teorema di Bayes** ma con 0.987 quale probabilità iniziale: $P(S|T_1^-)$ invece che $P(S)$

$$\begin{aligned} P(S|T_1^-, T_2^-) &= \frac{P(T_2^-|S)P(S|T_1^-)}{P(T_2^-|S)P(S|T_1^-) + P(T_2^-|M)P(M|T_1^-)} \\ &= \frac{0.95 \times 0.987}{0.95 \times 0.987 + 0.05 \times 0.013} \\ &= 0.999 \end{aligned}$$

Esempio: Teorema di Bayes e filtri antispam

Il 10% degli email ricevuti giornalmente si configurano come spam. Inoltre l'80% dei messaggi di spam contengono la parola «gratis», mentre tale parola è contenuta solo nel 5 percento dei messaggi non spam. Arriva un nuovo messaggio contenente la parola «gratis», qual è la probabilità che si tratti di un messaggio di spam.

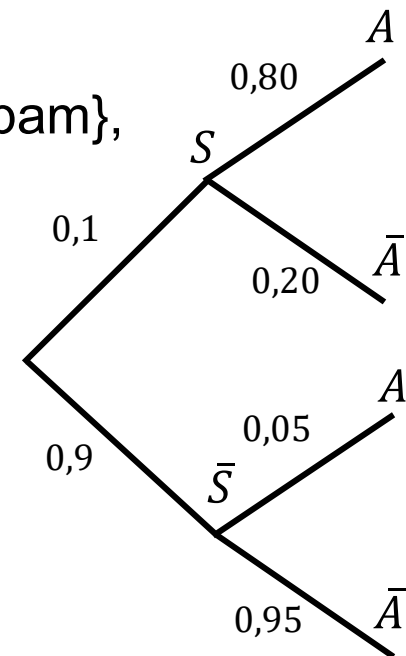
Siano S ={Il messaggio è spam}, $\bar{S}$ ={Il messaggio non è spam},
 A ={Il messaggio contiene la parola «gratis»}

Probabilità a priori: $P(S) = 0,1$ e $P(\bar{S}) = 0,9$

Verosimiglianza: $P(A|S) = 0,80$ e $P(A|\bar{S}) = 0,05$

Probabilità a posteriori:

$$P(S|A) = \frac{P(A|S)P(S)}{P(A|S)P(S) + P(A|\bar{S})P(\bar{S})} = \frac{0,80 \cdot 0,1}{0,80 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,90} = 0,64$$



Esempio: Teorema di Bayes e rischio di credito

Una banca sa dall'esperienza passata che il 70% dei prestiti concessi vengono restituiti, il 20% vengono restituiti in parte e il 10% non vengono restituiti affatto. Inoltre tra coloro che hanno restituito il prestito, il 55% hanno un reddito medio-alto, mentre tale percentuale è del 25% tra coloro che hanno restituito solo parzialmente il prestito e del 5% tra coloro che non lo hanno restituito affatto. Un nuovo cliente con reddito medio-alto fa domanda per un prestito. Qual è la probabilità che lo restituirà? Qual è la probabilità che lo restituirà solo in parte?

Siano $B_1 = \{\text{Il prestito viene restituito}\}$,
 $B_2 = \{\text{Il prestito viene restituito in parte}\}$,
 $B_3 = \{\text{Il prestito non viene restituito}\}$
 $A = \{\text{Il cliente ha un reddito medio-alto}\}$

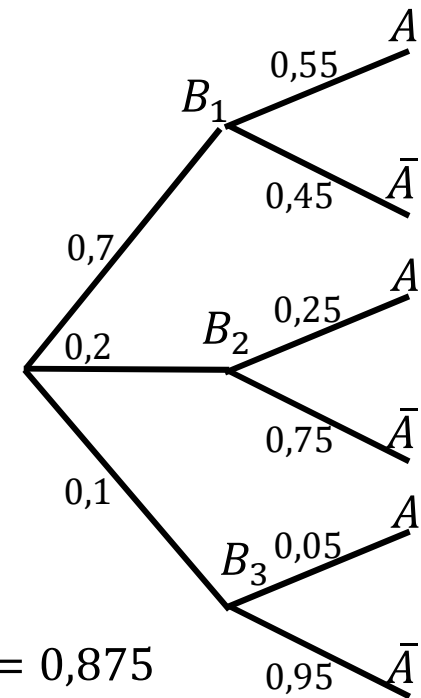
Probabilità a priori: $P(B_1) = 0,7$, $P(B_2) = 0,2$, $P(B_3) = 0,1$

Verosimiglianza: $P(A|B_1) = 0,55$, $P(A|B_2) = 0,25$, $P(A|B_3) = 0,05$

Probabilità a posteriori:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0,55 \cdot 0,7}{0,55 \cdot 0,7 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,1} = 0,875$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{\sum_{i=1}^3 P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0,25 \cdot 0,2}{0,55 \cdot 0,7 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,1} = 0,114$$



Dove e come studiare

- Libro di testo: S. Borra, A. Di Ciaccio (2014), Cap. 8 (escluso paragrafo 16.6)
- Svolgere 'Esercitazione 4', esercizi dal 3 in poi.
- Svolgere gli esercizi nel file 'Esercizi di probabilità.xls', limitatamente ai fogli 4, 9, 12, 14, 16, 17, 21, 24, 27