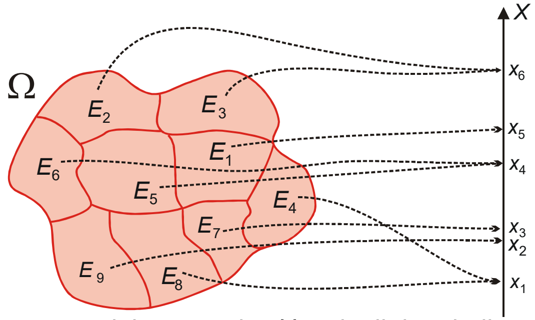
Variabili casuali

- Una ***variabile casuale*** X è una funzione definita sullo spazio campionario Ω che associa ad ogni evento $E \subset \Omega$ un unico numero reale.



- Esempi: somma dei punteggi nel lancio di due dadi, numero di pezzi difettosi in un lotto, variazione giornaliera nel rendimento di un titolo, numero di prodotti di un certo tipo venduti giornalmente in un particolare punto vendita

- Una variabile casuale può essere classificata come *discreta* o *continua*.
- Una variabile casuale **discreta** può assumere un insieme discreto (finito o numerabile) di valori.
- Una variabile casuale **continua** può assumere tutti i valori compresi in un intervallo reale.

Variabili casuali discrete

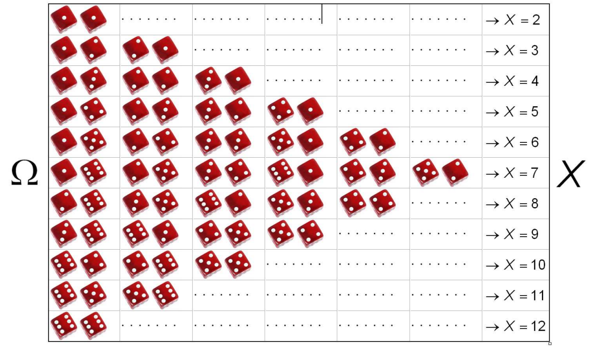
- Una variabile casuale discreta X è caratterizzata dalla sua ***funzione di probabilità*** che associa ad ognuno dei valori x_i la corrispondente probabilità $P(X=x_i)$.
- La funzione di probabilità deve verificare le due proprietà:
  - $P(x_i) \geq 0, \quad \forall i$
  - $\sum_i P(x_i) = 1$
- Una variabile aleatoria discreta può anche caratterizzarsi attraverso la sua ***funzione di ripartizione*** che fa corrispondere ai valori x le probabilità cumulate $P(X \leq x)$:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{w \leq x} P(X = w)$$

- La funzione di ripartizione verifica le seguenti proprietà:
  - F(x) è non decrescente
  - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
  - F(x) è continua a destra

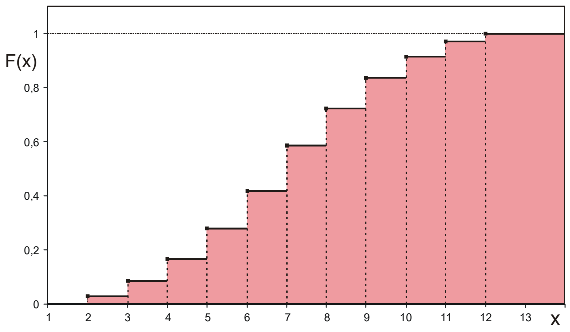
Esempio

- Corrispondenza tra eventi e valori della variabile casuale X={somma dei punteggi}, nella prova "lancio di due dadi"



X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
F(x)	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	1

- Rappresentazione grafica della funzione di ripartizione per l'esempio del lancio di due dadi



Variabili casuali continue

- Una variabile casuale continua *X* è caratterizzata dalla sua ***funzione di densità***, *f(x)* tale che l'area sottesa alla funzione, in un intervallo, è pari alla probabilità che *X* assuma un valore in quell'intervallo:

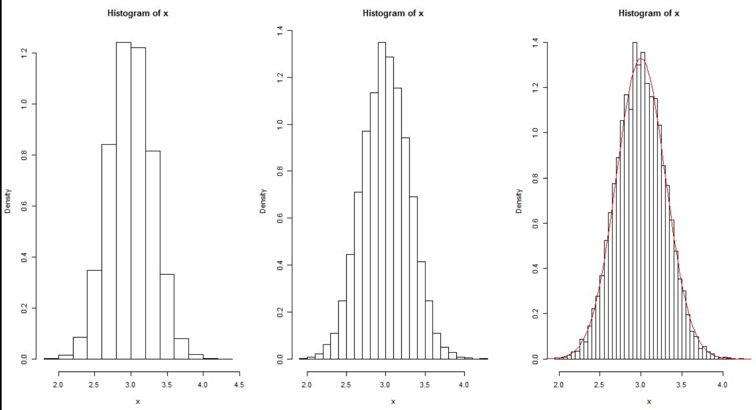
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- La funzione di densità deve verificare le proprietà:
  - $f(x) \ge 0$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
  - La probabilità che la v.c. assuma un particolare valore è 0.
- Una v.a. continua può anche caratterizzarsi attraverso la ***funzione di ripartizione***:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)\,dw$$

- La funzione di ripartizione verifica le proprietà già viste in precedenza; inoltre per v.a. continue, essa è assolutamente continua.

Funzione di densità



Valore atteso di una v.a.

- Il ***valore atteso*** di una v.c. *X*, è definito come
  - $E(X) = \sum_i x_i P(x_i)$ se la v.c. è discreta
  - $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ se la v.c. è continua
- Il valore atteso di una funzione *Y = g(x),* della v.a. *X*, può essere calcolato come:
  - $E(Y) = \sum_i g(x_i) P(x_i)$ se la v.c. è discreta
  - $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$ se la v.c. è continua

Esempio v.a. discreta

- X={somma dei punteggi}, nella prova “lancio di due dadi”

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(x)	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$
F(x)	$1/36$	$3/36$	$6/36$	$10/36$	$15/36$	$21/36$	$26/36$	$30/36$	$33/36$	$35/36$	**1**

$$E(X)=2\frac{1}{36}+3\frac{2}{36}+4\frac{3}{36}+5\frac{4}{36}+6\frac{5}{36}+7\frac{6}{36}+8\frac{5}{36}+9\frac{4}{36}$$
$$+10\frac{3}{36}+11\frac{2}{36}+12\frac{1}{36}=7$$

Varianza di una v.a.

- La ***varianza*** di una v.c. X, è definita come

$$V(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

- A seconda del tipo di v.a., la precedente definizione diventa
  - $V(X)=\sum_i (x_i-E(X))^2 P(x_i)$ se la v.c. è discreta
  - $V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx$ se la v.c. è continua
- La varianza può essere, in modo equivalente, definita come:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

- Si definisce deviazione standard di X, la radice quadrata della sua varianza $SD(X)=\sqrt{V(X)}$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

Dimostrazione nel caso discreto:

$$V(X)=E\left(X-E(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2P(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2x_iE(X)+\left(E(X)\right)^2\right)P(x_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2P(x_i)-\sum_{i=1}^{n}2x_iE(X)P(x_i)+\sum_{i=1}^{n}\left(E(X)\right)^2P(x_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2P(x_i)-2E(X)\sum_{i=1}^{n}x_iP(x_i)+\left(E(X)\right)^2\sum_{i=1}^{n}P(x_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2P(x_i)-2\left(E(X)\right)^2+\left(E(X)\right)^2=$$
$$=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

Media e Varianza di una trasformazione lineare

- Sia Y una trasformazione lineare di una v.c. X, ossia $Y=a+bX$, dove a e b sono delle costanti. Si possono allora dimostrare le seguenti proprietà:

$$E(Y)=E(a+bX)=a+bE(X)$$

$$V(Y)=V(a+bX)=b^2V(X)$$

- Ponendo $a = -E(X)/SD(X)$ e $b = 1/SD(X)$, si ottiene una variabile aleatoria Y standardizzata, ossia, con valore atteso 0 e deviazione standard 1.

$$Y=\frac{X-E(X)}{SD(X)}$$

$$E(Y)=0$$

$$V(Y)=1$$

Media e varianza di una combinazione lineare

Dimostrazione nel caso discreto:

$$E(Y) = E(a+bX) = \sum_{i=1}^{n}(a+bx_i)P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} aP(x_i) + \sum_{i=1}^{n} bx_iP(x_i) =$$
$$= a\sum_{i=1}^{n} P(x_i) + b\sum_{i=1}^{n} x_iP(x_i) = a + bE(X)$$

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - E(Y))^2 P(y_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(a + bx_i - (a + bE(X))\right)^2 P(x_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(bx_i - bE(X))^2 P(x_i) = b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 P(x_i) = b^2 V(X)$$

Modelli di v.a. discrete: v.a. di Bernoulli

- Una v.a. ***Bernoulliana***, indicata come $X \sim$ *Bernoulli*(π) assume solo due valori, 1 o 0, rispettivamente con probabilità π e 1-π.
- La funzione di probabilità di una v.a. di Bernoulli è:

$$P(X = x) = \pi^x (1-\pi)^{1-x} \quad per \quad x = 0, 1$$

- Tutte le prove che producono solo due possibili risultati generano v.c. di Bernoulli: il lancio di una moneta, il superamento o meno di un certo livello di inflazione, l'aumento o meno della quotazione di un titolo, l'acquisto o meno di un certo prodotto, la difettosità o l'integrità di un certo pezzo…

- Media e varianza di una Bernoulliana sono rispettivamente:

$$E(X) = \pi \quad e \quad V(X) = \pi(1-\pi)$$

Dimostrazione:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) = \sum_{i=1}^{2} x_i \pi^{x_i}(1-\pi)^{1-x_i} =$$
$$= 1\pi^1(1-\pi)^{1-1} + 0\pi^0(1-\pi)^{1-0} = \pi$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 P(x_i) = \sum_{i=1}^{2}(x_i - \pi)^2 \pi^{x_i}(1-\pi)^{1-x_i} =$$
$$= (1-\pi)^2\pi^1(1-\pi)^{1-1} + (0-\pi)^2\pi^0(1-\pi)^{1-0} =$$
$$= (1-\pi)^2\pi + \pi^2(1-\pi) = \pi(1-\pi)(1-\pi+\pi) = \pi(1-\pi)$$

Modelli di v.a. discrete: v.a. Binomiale

- La v.a. ***Binomiale*** è una distribuzione ***discreta*** che si utilizza quando si è in presenza di *n* prove ***indipendenti*** (es. *n* estrazioni con ripetizione o *n* estrazioni da una popolazione infinita), ciascuna prova ha solo ***due esiti possibili***, indicati come successo e insuccesso (es. difettoso/non difettoso, aumento/decremento, acquisto/mancato acquisto), e la probabilità π (es. tasso di difettosità) di osservare un successo in una singola prova rimane ***costante*** per tutte le prove.
- Una v.a. Binomiale si indica come $X \sim$ *Binomiale*(π;*n*) e la sua funzione di probabilità è:

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x},$$
$$\text{per } x = 0,1,\cdots,n \quad \text{e} \quad 0 \le \pi \le 1$$

Esempio: Estrazione di 3 pezzi da un processo produttivo.
Tasso di difettosità π. X = numero di pezzi difettosi.

Campioni	**Probabilità**
000	$(1-\pi)^3$
001	$\pi(1-\pi)^2$
010	$\pi(1-\pi)^2$
100	$\pi(1-\pi)^2$
011	$\pi^2(1-\pi)$
101	$\pi^2(1-\pi)$
110	$\pi^2(1-\pi)$
111	π^3

X	**Probabilità**
0	$(1-\pi)^3$
1	$3\pi(1-\pi)^2$
2	$3\pi^2(1-\pi)$
3	π^3

Numero di permutazioni di n oggetti di cui x uguali tra loro

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

Probabilità di osservare x successi su n prove

$$P(X=x) = \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x}$$

- Una v.a. Binomiale può essere ottenuta considerando la somma di v.c. di Bernoulli, indipendenti e identicamente distribuite:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

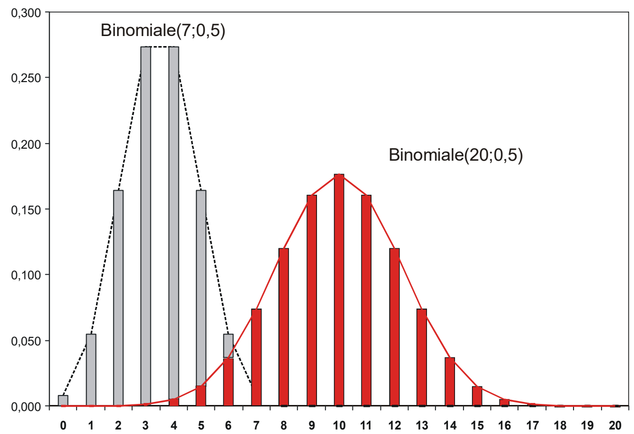
dove $X_i \sim$ *Bernoulli*(π), indipendentemente per ogni *i*.

- Media e varianza di una Binomiale sono rispettivamente:

$$E(X) = n\pi \quad e \quad V(X) = n\pi(1-\pi)$$

- Una v.a. Binomiale è caratterizzata dalle seguenti proprietà:
  - Il valore atteso e la varianza crescono al crescere di n;
  - Per π=0,5 la distribuzione è simmetrica rispetto al valor medio (n/2);
  - Per n→∞ la distribuzione tende ad essere simmetrica rispetto al valor medio.

Esempi di Binomiale



Esempio

- Un'industria che produce tappi di sughero sa che il tasso di difettosità dei macchinari a disposizione è del 5%.

Per controllare giornalmente che tale tasso rimanga invariato, il responsabile del controllo di qualità ogni giorno estrae 20 tappi a caso tra quelli prodotti e osserva quanti di essi risultano difettosi.

È più probabile che si trovi ad osservare 1 solo tappo difettoso o nessun tappo difettoso? E qual è invece la probabilità di osservarne 2?

- Indichiamo con:
  - π la probabilità di produrre un tappo difettoso;
  - n il numero di tappi estratti;
  - X il numero di tappi difettosi tra quelli estratti.

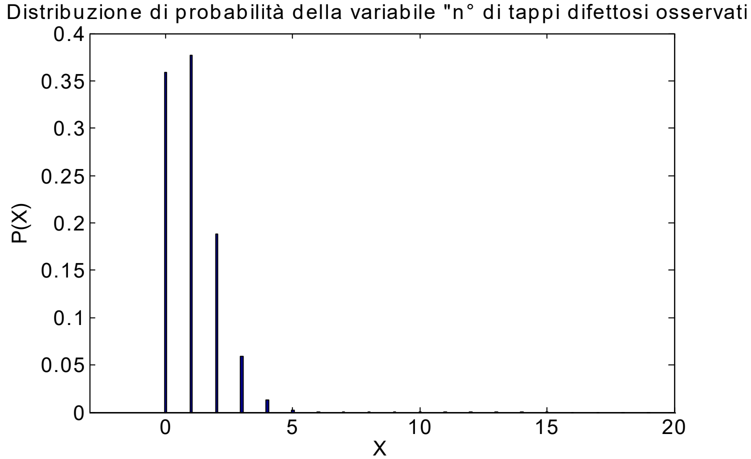
- Le informazioni a disposizione sono:
  π = 0,05; n = 20;

- Vogliamo calcolare
  P(X = 0), P(X = 1) e infine P(X = 2).

$$P(X=0)=\frac{n!}{0!(n-0)!}p^0(1-p)^{n-0}=\frac{20!}{0!(20-0)!}0,05^0(1-0,05)^{20-0}=0,3585$$

$$P(X=1)=\frac{n!}{1!(n-1)!}p^1(1-p)^{n-1}=\frac{20!}{1!(20-1)!}0,05^1(1-0,05)^{20-1}=0,3774$$

$$P(X=2)=\frac{n!}{2!(n-2)!}p^2(1-p)^{n-2}=\frac{20!}{2!(20-2)!}0,05^2(1-0,05)^{20-2}=0,1887$$



Modelli di v.a. discrete: v.a. di Poisson

- Una v.a. di ***Poisson***, indicata come $X \sim Poisson(\lambda)$ può assumere qualsiasi valore intero x ≥ 0.
- La *funzione di probabilità* di una v.a. di Poisson è:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}e^{x}}{x!}, \qquad \text{per } x=0,1,\cdots \quad \text{e} \quad 0\le\lambda\le\infty$$

- *Media* e *varianza* di una Poisson sono rispettivamente:

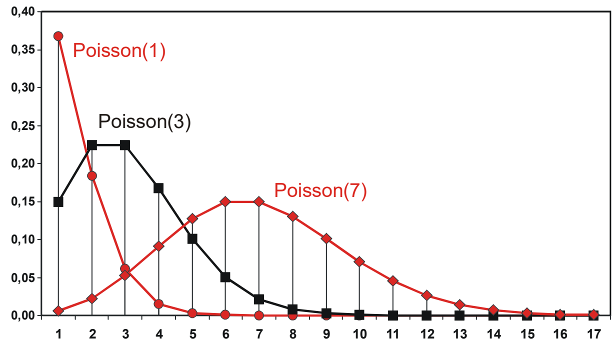
$$E(X)=\lambda \quad e \quad V(X)=\lambda$$

- La distribuzione di Poisson è adeguata per approssimare v.a. che rappresentano conteggi: il numero di persone che arrivano ad uno sportello in un certo intervallo di tempo, il numero di errori di battitura in una pagina, il numero di incidenti in un tratto stradale, il numero di rimborsi chiesti in un giorno ad una compagnia assicurativa…

- In generale, una v.a. discreta che rappresenta il numero di volte che si realizza un certo evento aleatorio in un dato intervallo (di tempo o di spazio) può essere approssimata bene da una Poisson se, suddividendo l'intervallo in tanti sottointervalli, valgono le seguenti condizioni
  - La probabilità di osservare esattamente un evento nel sottointervallo è costante
  - La probabilità di osservare più di un evento nel sottointervallo è pari a zero
  - Il verificarsi di un evento in un sottointervallo è indipendente dal verificarsi di un evento in un altro sottointervallo

- Una v.a. di Poisson è caratterizzata dalle seguenti proprietà:
  - Se $X_i \sim$ Poisson(λ_i) indipendentemente per ogni $i = 1,\ldots,n$, allora X ~ Poisson($\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$), dove $X = X_1+X_2+\ldots+X_n$.
  - La v.a. Binomiale al crescere di n e per π piccolo, tende ad una v.a. di Poisson con parametro $\lambda = n\pi$.

Esempi di v.a. di Poisson



25

Modelli di v.a. continue: v.a. Normale

- Una v.a. ***Normale*** (o Gaussiana) *X*, indicata come $X \sim N(\mu;\sigma^2)$, può assumere valori su tutto l'asse reale.
- La *funzione di densità* è

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) \qquad -\infty\le\mu\le\infty \quad \sigma^2\ge 0$$

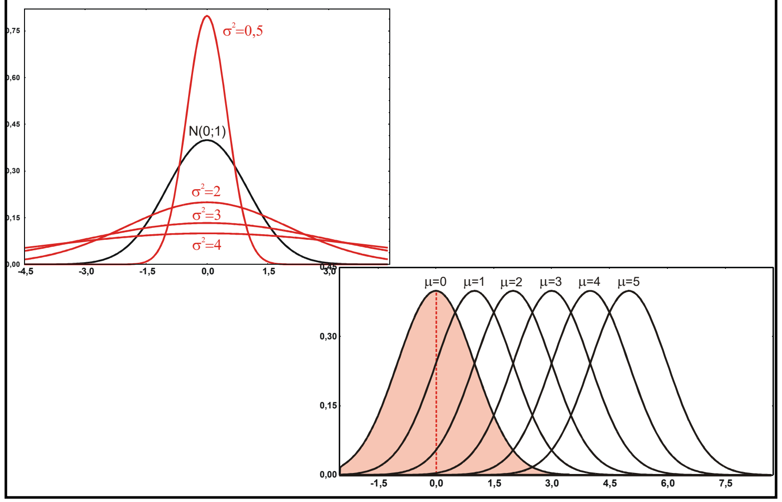
- *Media* e *varianza* di una normale sono rispettivamente:

$$E(X)=\mu \quad e \quad V(X)=\sigma^2$$

- La Normale gode delle seguenti proprietà:
  - Ogni trasformazione lineare di una v.a. Normale è ancora una v.a. Normale
  - La somma di v.c. Normali indipendenti è ancora una v.c. Normale con media e varianza pari, rispettivamente, alla somma delle medie e delle varianze delle v.c. Normali.

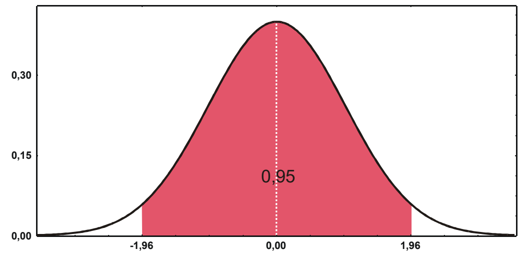
26

Esempi di v.a. Normali



- Se la v.a. *X* ha una distribuzione normale con parametri μ e σ^2, allora $Z = (X-\mu)/\sigma$ è ancora una v.a. Normale con media 0 e varianza 1. La v.a. *Z* è nota come ***Normale standardizzata*** e si indica come $Z \sim N(0;1)$.
- La *funzione di densità* della Normale standard è

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$$



28

- La *funzione di ripartizione* di una v.a. Normale standard viene in genere indicata come $\Phi(\bullet)$, ossia

$$F(z) = P(Z \le z) = \Phi(z)$$

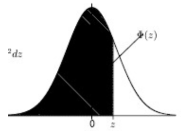
- I valori della funzione di ripartizione di una Normale standard sono tabulati e questo semplifica i calcoli delle aree sottese dalla funzione di densità.

- Esempio: Calcolo dell'area sottesa nell'intervallo [-2,2]

$$\Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - [1 - \Phi(2)] = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}977 - 1 = 0{,}954$$

Tavola 1 *(segue)*: Funzione di ripartizione della Variabile Casuale Normale Standardizzata

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998



ESEMPIO

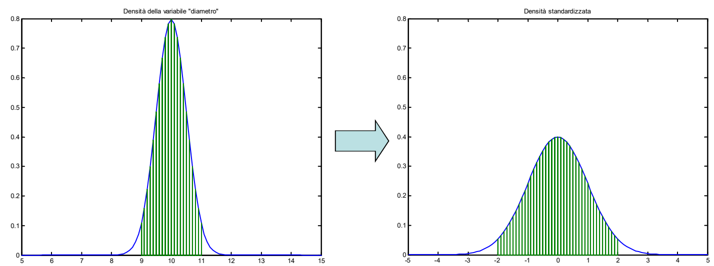
Un'industria che produce componenti sta valutando la possibilità di fornire una grossa ditta.

I macchinari sono settati per produrre componenti con un diametro di 10mm, tuttavia non tutti i pezzi prodotti hanno esattamente la stessa dimensione.

È noto invece che il diametro dei pezzi prodotti segue una distribuzione normale con media 10mm e deviazione standard 0,5mm.

La ditta che dovrebbe acquistare questi pezzi può utilizzare esclusivamente componenti con un diametro compreso tra 9 e 11 mm.

Si vuole stabilire se almeno il 90% della produzione di componenti incontri le necessità della ditta.



Indichiamo con X la variabile "diametro":

$$P(9 \le X \le 11) = P\left(\frac{9-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{11-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(\frac{9-10}{0{,}5} \le Z \le \frac{11-10}{0{,}5}\right) = P(-2 \le Z \le 2) = 0{,}9545$$

ESEMPIO

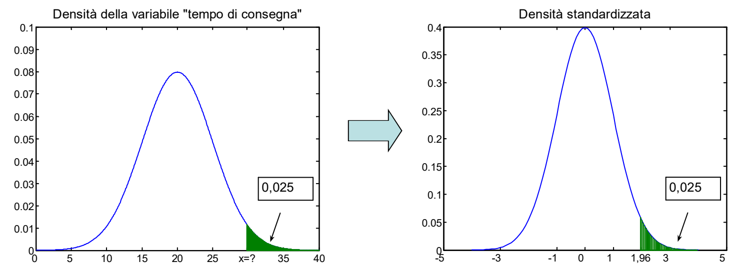
Un punto vendita di una catena di fast food ha cominciato ad offrire un servizio di consegna pasti a domicilio.

Per battere la concorrenza il proprietario ha deciso di offrire il pasto gratis ai clienti che ricevono la consegna con un ritardo eccessivo.

Dato l'attuale margine di profitto, il proprietario conclude che è possibile offrire un numero di pasti gratis pari al 2,5% delle ordinazioni.

Sapendo che il tempo di consegna si distribuisce approssimativamente in maniera normale con media pari a 20 min. e deviazione standard pari a 5 min., il proprietario vuole determinare un livello soglia per il tempo d'attesa, oltre il quale fornire il pasto gratis, in modo tale che il numero di pasti gratis offerti non superi il 2,5% delle ordinazioni.

33



Indichiamo con X la variabile "tempo di attesa" e con x la soglia da determinare:

$$0,025 = P(X \geq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

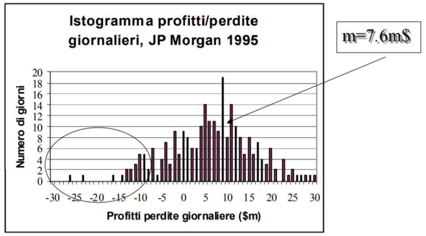
Dalle tavole della distribuzione normale otteniamo: $0,025 = P(Z \geq 1,96)$

Quindi $\frac{x-\mu}{\sigma} = 1,96$ e $x = 1,96\sigma + \mu = 1,96 \cdot 5 + 20 = 29,8$

34

ESEMPIO: Il Value at Risk

- Il VaR è una misura di rischio applicata agli investimenti finanziari.
- Risponde alla semplice domanda: «Quanto male possono andare le cose?»



- Il VaR indica la perdita potenziale di una posizione di investimento in un certo orizzonte temporale (solitamente giornaliero), con un certo livello di confidenza.
- Affermare che il VaR di un portafoglio calcolato a 1 giorno e ad un livello di confidenza del 95% è di 1 milione di euro, significa che con probabilità del 95% la perdita massima attesa a fine giornata non sarà superiore a 1 milione di euro

35

- Assumendo che i profitti e le perdite si distribuiscano normalmente con una certa media e una certa varianza si può calcolare il VaR al livello di probabilità 1-α come quel valore x tale che

$$P(X \leq x) = \alpha$$
$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \alpha$$
$$P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

- Quindi ipotizzando un profitto medio giornaliero di 1 migliaio di euro e una volatilità giornaliera di 0,8 migliaia di euro, e fissando un livello di probabilità del 95%, otteniamo

$$P\left(Z \leq \frac{x-1}{0,8}\right) = 0,05$$

- Da cui

$$\frac{x-1}{0,8} = -1,64 \rightarrow x = -1,64 \cdot 0,8 + 1 = -0,316$$

- Quindi la perdita massima giornaliera è di 0,316 migliaia di euro

36

Perché la distribuzione normale è così importante?

Banconota da 10 Marchi con l'immagine di Carl Friedrich Gauss e la funzione di densità normale.

- Molti fenomeni tendono naturalmente ad avere una distribuzione campanulare ben approssimabile con una distribuzione normale. Ossia è un modello teorico che si adatta bene a molti dati empirici.
- È facilmente trattabile da un punto di vista matematico.
- In molte applicazioni, conclusioni basate sull'assunzione di normalità dei dati non sono seriamente affette da scostamenti dalla normalità contenuti.

Ma soprattutto

- Deve la sua importanza all'esistenza del teorema del limite centrale.

37

Il teorema del limite centrale

Siano $X_1, \ldots, X_n$, n variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite (**i.i.d.**) con media $E(X_i) = \mu$ e varianza $V(X_i) = \sigma^2$ entrambe **finite**. Sia $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, la loro **somma** avente media $E(S_n) = n\mu$ e varianza $V(S_n) = n\sigma^2$. Allora per $n \to \infty$, S_n tende a distribuirsi normalmente.

Un enunciato equivalente del teorema stabilisce che, posto

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

e restando valide le condizioni enunciate sopra, si ha che la variabile

$$Z_n = \frac{(\bar{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma},$$

converge, per $n \to \infty$, ad una Normale standard.

ESEMPIO

Siano $X_1, \ldots, X_n$, n variabili bernoulliane indipendenti con identica probabilità di successo p (quindi $E(X_1) = p$ e $V(X_1) = p(1-p)$). Abbiamo visto che la loro somma $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ si distribuisce come una variabile binomiale con media $E(S_n) = np$ e varianza $V(S_n) = np(1-p)$. In virtù del teorema del limite centrale, per $n \to \infty$, S_n tende a distribuirsi normalmente.

38

Applicazioni del teorema

- *La v.c. Binomiale* può essere vista come somma di n variabili casuali Bernoulliane *iid*, quindi per n abbastanza grande la sua distribuzione è molto simile ad una $N(n\pi;\ n\pi(1-\pi))$
- Se consideriamo una successione di *Poisson* $X_1 \sim Poisson(\lambda_1)$, $X_2 \sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$, $X_3 \sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$, ... con $\lambda_i > 0$, se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda$ si ha che la distribuzione di X_n può essere approssimata, per n grande, da una $N(n\lambda;\ n\lambda)$.
- La v. c. *Chi-quadrato* X_n si può ottenere come somma di n variabili casuali Normali standardizzate indipendenti al quadrato, quindi, per n abbastanza grande, la sua distribuzione è molto simile ad una $N(n;\ 2n)$.

39

Modelli di v.a. continue: Chi-quadrato

- Una v.a. ***Chi-quadrato*** X, indicata come $X \sim \chi^2(g)$, può assumere valori nell'intervallo $[0;\infty]$.
- La *funzione di densità* è $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{g}{2}}\Gamma\left(\frac{g}{2}\right)} x^{\frac{g}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad per\ x \geq 0$
- *Media* e *varianza* di una Chi-quadrato sono rispettivamente:

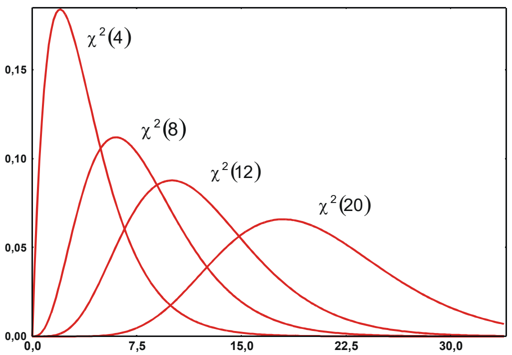
$$E(X) = g \quad e \quad V(X) = 2g$$

- Una v.a. $\chi^2(g)$ si può ottenere come somma dei quadrati di g v.a. Normali standardizzate indipendenti, ossia

$$\chi^2(g) = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_g^2$$

40

Esempi di v.a. Chi-quadrato



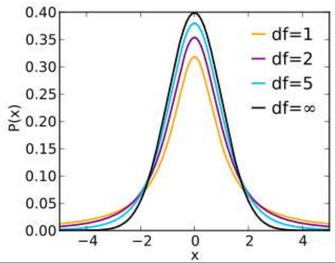
All'aumentare di g la distribuzione tende ad una N(g;2g)

Modelli di v.a. continue: *t* di Student

- Una v.a. ***t di Student*** *T*, indicata come $T \sim Student(g)$, può assumere valori nell'intervallo [- ∞;∞].
- Una v.a. $T \sim Student(g)$ si può ottenere come rapporto tra una v.a. Normale standardizzata e la radice quadrata di una v.a. Chi-quadrato divisa per i suoi gradi di libertà, ossia

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/g}}$$

dove $Z \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2(g)$.



Cenni sulle v.a. doppie

- Una ***variabile aleatoria doppia*** *(X,Y)* è una funzione definita sullo spazio campionario Ω, che associa a ogni risultato ω_i una coppia di numeri reali (*x,y*).
- Una v.a. doppia è completamente definita dalla sua **funzione di probabilità congiunta** o dalla sua ***funzione di densità congiunta***, a seconda che sia discreta o continua.
- In caso di indipendenza si deve avere:
  - Caso discreto $\quad P(x,y) = P(x)P(y)$
  - Caso continuo $\quad f(x,y) = f(x)f(y)$

Media e varianza di combinazioni lineari di v.a.

- Il valore atteso di una combinazione lineare di *p* v.a.

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_pX_p$$

è dato da

$$E(X) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_pE(X_p)$$

mentre la varianza è

$$V(X) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2\, V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i+1}^{p} a_i a_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

dove

$$Cov(X_i, X_j) = \sigma_{X_i,X_j} = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

è la covarianza tra X_i e X_j.

Dove e come studiare

- Libro di testo: S. Borra, A. Di Ciaccio (2014), Cap. 9 (escluso paragrafo 9.8.5)
- Svolgere 'Esercitazione 5'.
- Svolgere i restanti esercizi nel file 'Esercizi di probabilità.xls'.