3 - Tavole di verità e condizioni di validità

Comunicazione e critical thinking a.a. 2023-2024

Michele Paolini Paoletti (Università di Macerata)
m.paolinipaoletti@unimc.it

pagina insegnamento: http://tiny.cc/criticalthinking2324

Gli argomenti di questo modulo

(a) le forme di enunciati;
(b) le tavole di verità per i connettivi logici;
(c) gli enunciati complessi;
(d) validità e invalidità delle forme argomentative.

Forme di enunciati (a)

Un **enunciato** è una frase (semplice o complessa) dotata di **valore** di **verità**. Ogni enunciato, cioè, è **vero** o **falso** - anche se in molti casi non è possibile conoscere il valore di verità.

Enunciati di contenuto diverso possono condividere la **stessa forma** logica, cioè possono essere **strutturati** nello stesso modo dal punto di vista logico e svolgere **funzioni simili** dal punto di vista logico.

Pippo è un personaggio dei fumetti e Quo è un nipote di Paperino → ha la stessa forma di: Oggi mangio la pasta e oggi mangio la carne

Forme di enunciati (b)

Connettivi logici: operatori che si applicano a enunciati per generare altri enunciati

Enunciati semplici: enunciati che non contengono connettivi logici:

Pippo è un personaggio dei fumetti.

Enunciati complessi: enunciati che contengono connettivi logici e, per la maggior parte, sono composti da altri enunciati:

Pippo è un personaggio dei fumetti **e** Quo è un nipote di Paperino.

Non è vero che Pippo è un personaggio dei fumetti.

Forme di enunciati (c)

Per rappresentare la forma logica di un enunciato, è possibile utilizzare i seguenti simboli:

P, Q, R, … sono **variabili** che hanno come loro valori degli **enunciati** semplici;

~, &, ∨, →, ↔ sono i **connettivi logici** che si possono applicare agli enunciati per generare altri enunciati;

( ) consentono di strutturare senza ambiguità enunciati complessi.

Principi della logica classica

La logica classica degli enunciati assume alcuni **principi**.

Gli enunciati devono avere almeno uno tra **due** valori di verità: **vero** e **falso** (principio di **bivalenza**).

Nessun enunciato può essere sia **vero** che **falso**: non si dà il caso che P e che non è vero che P (principio di **non-contraddizione**).

Ogni enunciato può essere **o vero**, **o falso**: P o non è vero che P (principio del **terzo escluso**).

Semantica

Rispetto alla logica degli enunciati, la **semantica** consente di:

- **interpretare** i **simboli** utilizzati (nel nostro caso, le variabili P, Q, R, …, i simboli dei connettivi logici e le parentesi);
- specificare le **condizioni** di **verità** e di **falsità** degli enunciati complessi, cioè a quali condizioni tali enunciati sono veri (o potrebbero esserlo) e a quali condizioni sono falsi (o potrebbero esserlo)

→ gli enunciati **semplici** sono veri se e solo se **“raffigurano”** stati del mondo e falsi in caso contrario → “Pippo è un personaggio dei fumetti” è vero se e solo se Pippo è un personaggio dei fumetti (schema T di Tarski)

Le tavole di verità

Per **interpretare** i connettivi logici e per specificare le condizioni di verità e di falsità degli **enunciati complessi** che li contengono, è opportuno utilizzare le **tavole** di **verità**.

La **tavola** di **verità** di un certo **connettivo** logico chiarisce il **funzionamento** di quel connettivo. Cioè: esaminando ogni **caso possibile** cui il connettivo può essere applicato, specifica il **valore di verità** che il connettivo “**restituisce**” in quel caso.

I connettivi logici sono **funzioni di verità**: dato un certo valore di verità o una certa coppia di valori di verità come **input**, essi “restituiscono” un certo valore di verità come **output**.

La negazione

P = Pippo è un personaggio dei fumetti

~P = non è vero che Pippo è un personaggio dei fumetti

Quando P è vero, è falso che ~P.

Quando ~P è vero, è falso che P.

P	~P
V	F
F	V

La congiunzione

P = Pippo è un personaggio dei fumetti

Q = Quo è un nipote di Paperino

P & Q = Pippo è un personaggio dei fumetti **e** Quo è un nipote di Paperino

P & Q è vero nel momento in cui sia P che Q sono veri.

In tutti gli altri casi, P & Q è falso.

P	Q	P & Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La disgiunzione debole

P = Pippo è un personaggio dei fumetti

Q = Quo è un nipote di Paperino

P ∨ Q = Pippo è un personaggio dei fumetti **o** Quo è un nipote di Paperino

P ∨ Q è vero nel momento in cui almeno uno tra P e Q è vero.

Se P e Q sono entrambi falsi,

P ∨ Q è falso.

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disgiunzione forte

La disgiunzione debole $\vee$ si distingue dalla **disgiunzione forte** $\underline{\vee}$, che significa: o è vero P, o è vero Q, ma non sono veri P e Q assieme.

La disgiunzione forte **non** è un **connettivo** logico primitivo, perché può essere **ridotta** alla congiunzione di una disgiunzione debole e di una congiunzione negata:

$P \underline{\vee} Q = (P \vee Q) \& \sim(P \& Q)$

Il condizionale materiale (a)

P = Pippo è un personaggio dei fumetti

Q = Quo è un nipote di Paperino

P → Q = **Se** Pippo è un personaggio dei fumetti, **allora** Quo è un nipote di Paperino

P → Q è falso nel momento in cui P è vero e Q è falso. P → Q è vero in tutti gli altri casi.

P	Q	P → Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Il condizionale materiale (b)

P $\rightarrow$ **Q**:

- P è l'**antecedente**, Q è il **conseguente**;
- **non** è necessario che P preceda Q nel **tempo**;
- **non** è necessario che P **causi** Q;
- non è necessario che P e Q abbiano qualche **legame** tra loro: "Se Pippo è un personaggio dei fumetti, allora domani piove" è un condizionale legittimo;
- è **vero** ogni volta che il **conseguente** Q è **vero**, **qualsiasi** sia il contenuto dell'**antecedente** P;
- è **vero** ogni volta che l'**antecedente** P è **falso**, **qualsiasi** sia il contenuto del **conseguente** Q.

Il bicondizionale o equivalenza logica (a)

P = Pippo è un personaggio dei fumetti

Q = Quo è un nipote di Paperino

P $\leftrightarrow$ **Q** = Pippo è un personaggio dei fumetti **se e solo se** Quo è un nipote di Paperino

P $\leftrightarrow$ Q è vero nel momento in cui P e Q sono entrambi veri o entrambi falsi.

P $\leftrightarrow$ Q è falso negli altri casi.

P	Q	P $\leftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Il bicondizionale o equivalenza logica (b)

$P \leftrightarrow Q$ può essere visto come la **congiunzione** di due **condizionali**:

$P \rightarrow Q$

e

$Q \rightarrow P$

$P \leftrightarrow Q$ = Pippo è un personaggio dei fumetti **se e solo se** Quo è un nipote di Paperino = **Se** Pippo è un personaggio dei fumetti, **allora** Quo è un nipote di Paperino **e**, **se** Quo è un nipote di Paperino, **allora** Pippo è un personaggio dei fumetti

Gli enunciati complessi (a)

Enunciati complessi: enunciati che contengono **connettivi logici** e, per la maggior parte, sono **composti** da altri enunciati (semplici o a loro volta complessi).

Consideriamo gli enunciati complessi che sono composti da altri enunciati.

Per rappresentarne la forma logica, occorre utilizzare le **parentesi**:

$(P \ \& \ Q) \rightarrow R$

è un enunciato diverso dall'enunciato

$P \ \& \ (Q \rightarrow R)$

Il primo è un **condizionale** che ha un enunciato congiuntivo nell'antecedente e un enunciato semplice nel conseguente.

Il secondo è un enunciato **congiuntivo** composto da un enunciato semplice e da un enunciato condizionale.

Gli enunciati complessi (b)

In un enunciato complesso, il **connettivo principale** è quello che stabilisce il valore di verità dell'**intero** enunciato. Si tratta dell'unico connettivo **fuori** dalle parentesi.

$(P \& Q) \rightarrow R$

il connettivo principale è: $\rightarrow$

$P \& (Q \rightarrow R)$

il connettivo principale è: $\&$

Gli enunciati complessi (c)

Per specificare le **condizioni di verità** di un enunciato **complesso** in tutti i casi possibili, è necessario:

(1) specificare il valore di verità degli **enunciati semplici** che lo compongono in tutti i casi possibili;
(2) specificare il valore di verità degli enunciati nelle **negazioni** più **interne** (cioè le negazioni che si applicano direttamente agli enunciati semplici, se ve ne sono) in tutti i casi possibili;
(3) specificare il valore di verità degli enunciati nelle **parentesi più interne** sulla base dei loro connettivi logici in tutti i casi possibili;
(4) applicare lo stesso procedimento a tutti i **livelli** di **parentesi**;
(5) specificare il valore di verità dell’enunciato con il **connettivo principale** (cioè dell’enunciato complesso stesso) in tutti i casi possibili.

A questo scopo, come vedremo, è possibile usare le **tavole di verità**.

Gli enunciati complessi (d)

Se un enunciato complesso è **vero** in **tutti** i casi possibili, è una **tautologia**.

Se un enunciato complesso è **falso** in **tutti** i casi possibili, è una **contraddizione**.

Se un enunciato complesso è **vero** in almeno **un** caso possibile e **falso** in almeno **un** caso possibile, è un enunciato **contingente**.

Le **tavole di verità** consentono dunque di stabilire se un certo enunciato complesso sia una tautologia, una contraddizione o un enunciato contingente.

Esempio 1

P **&** (Q → ~P) **Enunciato contingente**

P	Q	P	&	(Q	→	~	P)
V	V	V	**F**	V	F	F	V
V	F	V	**V**	F	V	F	V
F	V	F	**F**	V	V	V	F
F	F	F	**F**	F	V	V	F

Esempio 2

$(P \to Q) \to (\sim Q \to \sim P)$ **Tautologia**

P	Q	(P	$\to$	Q)	$\to$	(~	Q	$\to$	~	P)
V	V	V	V	V	**V**	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	**V**	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	**V**	F	V	V	V	F
F	F	F	V	F	**V**	V	F	V	V	F

Esempio 3

$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\sim Q \& P)$ **Enunciato contingente**

P	Q	(P	↔	Q)	→	(~	Q	&	P)
V	V	V	V	V	**F**	F	V	F	V
V	F	V	F	F	**V**	V	F	V	V
F	V	F	F	V	**V**	F	V	F	F
F	F	F	V	F	**F**	V	F	F	F

Esempio 4

$P \rightarrow (Q \vee \sim R)$ **Enunciato contingente**

P	Q	R	P	→	(Q	V	~	R)
V	V	V	V	**V**	V	V	F	V
V	V	F	V	**V**	V	V	V	F
V	F	V	V	**F**	F	F	F	V
V	F	F	V	**V**	F	V	V	F
F	V	V	F	**V**	V	V	F	V
F	V	F	F	**V**	V	V	V	F
F	F	V	F	**V**	F	F	F	V
F	F	F	F	**V**	F	V	V	F

Esempio 5

(P ∨ (Q → R)) **&** (~P & ~(~Q ∨ R)) **Contraddizione**

P	Q	R	(P	∨	(Q	→	R))	&	(~	P	&	~	(~	Q	∨	R))
V	V	V	V	V	V	V	V	**F**	F	V	F	F	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F	**F**	F	V	F	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V	**F**	F	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F	**F**	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	**F**	V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	**F**	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	V	**F**	V	F	F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	**F**	V	F	F	F	V	F	V	F

Argomenti e forme argomentative

Anche gli argomenti (**deduttivi**) possono essere rappresentati in **forma simbolica**.

Quando ciò accade, si individua la **forma argomentativa** di un argomento.

(1) Le premesse e la conclusione sono rappresentate dalle rispettive **formule**;
(2) le premesse sono separate da una **virgola**;
(3) la conclusione è separata dalle premesse dal segno $\vdash$.

Se Pippo è un personaggio dei fumetti, allora Quo è un nipote di Paperino. Pippo è un personaggio dei fumetti. Dunque, Quo è un nipote di Paperino

$P \rightarrow Q, P \vdash Q$

Forme argomentative: validità e invalidità (a)

Le **tavole di verità** possono essere usate per testare la **validità** o l'invalidità di una forma argomentativa (deduttiva).

Un **argomento** (deduttivo) è **valido** nel momento in cui, se **tutte** le **premesse** sono/fossero **vere**, allora necessariamente anche la **conclusione** è/sarebbe **vera**.

Una **forma argomentativa** è **valida** nel momento cui **non** ci sono **casi** possibili in cui **tutte** le **premesse** sono **vere** e la **conclusione** è **falsa**.

Una forma argomentativa è **invalida** nel momento in cui c'è **almeno un caso** possibile in cui **tutte** le **premesse** sono **vere** e la **conclusione** è **falsa**.

Forme argomentative: validità e invalidità (b)

(1) Nella tavola di verità vengono rappresentate tutte le **premesse** e la **conclusione** in tutti i **casi possibili**, secondo il procedimento già esaminato.

(2) Si verifica se c'è **almeno una riga** in cui **tutte** le **premesse** sono **vere** e la **conclusione** è **falsa**.

(3) Se **non** c'è una riga in cui tutte le premesse sono vere e la conclusione è falsa, la forma argomentativa è **valida**. **Viceversa**, è **invalida**.

Esempio 1 (Varzi et al.)

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$ **Valida**

P	**Q**	**R**	**P**	**→**	**Q,**	**Q**	**→**	**R ⊢**	**P**	**→**	**R**
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**	V	V	**V**	V
V	V	F	V	**V**	V	V	**F**	F	V	**F**	F
V	F	V	V	**F**	F	F	**V**	V	V	**V**	V
V	F	F	V	**F**	F	F	**V**	F	V	**F**	F
F	V	V	F	**V**	V	V	**V**	V	F	**V**	V
F	V	F	F	**V**	V	V	**F**	F	F	**V**	F
F	F	V	F	**V**	F	F	**V**	V	F	**V**	V
F	F	F	F	**V**	F	F	**V**	F	F	**V**	F

Esempio 2 (Varzi et al.)

$P \to Q, Q \vdash P$

Invalida

P	Q	P	$\to$	Q,	Q $\vdash$	P
V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
V	F	V	**F**	F	**F**	**V**
F	V	F	**V**	V	**V**	**F**
F	F	F	**V**	F	**F**	**F**

Esempio 3 (Varzi et al.)

P → Q, P → ~Q ⊢ ~P **Valida**

P	Q	P	→	Q,	P	→	~	Q ⊢	~	P
V	V	V	**V**	V	V	**F**	F	V	**F**	V
V	F	V	**F**	F	V	**V**	V	F	**F**	V
F	V	F	**V**	V	F	**V**	F	V	**V**	F
F	F	F	**V**	F	F	**V**	V	F	**V**	F

Esempio 4 (Varzi et al.)

P ∨ Q, Q ∨ R ⊢ P ∨ R **Invalida**

P	Q	R	P	∨	Q,	Q	∨	R ⊢	P	∨	R
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**	V	V	**V**	V
V	V	F	V	**V**	V	V	**V**	F	V	**V**	F
V	F	V	V	**V**	F	F	**V**	V	V	**V**	V
V	F	F	V	**V**	F	F	**F**	F	V	**V**	F
F	V	V	F	**V**	V	V	**V**	V	F	**V**	V
F	V	F	F	**V**	V	V	**V**	F	F	**F**	F
F	F	V	F	**F**	F	F	**V**	V	F	**V**	V
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**	F	F	**F**	F

Esempio 5 (Varzi et al.)

R ⊢ P ↔ (P ∨ (P & Q)) **Valida**

P	Q	R	R ⊢	P	↔	(P	∨	(P	&	Q))
V	V	V	**V**	V	**V**	V	V	V	V	V
V	V	F	**F**	V	**V**	V	V	V	V	V
V	F	V	**V**	V	**V**	V	V	V	F	F
V	F	F	**F**	V	**V**	V	V	V	F	F
F	V	V	**V**	F	**V**	F	F	F	F	V
F	V	F	**F**	F	**V**	F	F	F	F	V
F	F	V	**V**	F	**V**	F	F	F	F	F
F	F	F	**F**	F	**V**	F	F	F	F	F