

MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE E NON LINEARE

A cura di Mauro M. Baldi (mauromaria.baldi@unimc.it)

Esercizio 1: un problema di pianificazione

La Svicon produce batterie elettriche di tre tipi (Alfa, Beta e Gamma). Per due di esse (Beta e Gamma) utilizza del rame. Per coprire la produzione del prossimo mese, può acquistare il rame al prezzo di 5 euro/kg. Il fornitore però non può fornire più di 4000 kg di rame. Nella seguente tabella sono indicate: la quantità di rame richiesta per ciascuna batteria, i costi di manodopera (per batteria prodotta) e prezzi di vendita al pubblico (per batteria):

Batterie	Rame (kg/batteria)	Costi manodopera (€/batteria)	Prezzi di vendita (€/batteria)
Alfa	-	12	25
Beta	1	6	20
Gamma	2	4	30

I tre tipi di batteria vogliono essere prodotti in quantità tali che il numero di batterie di tipo Alfa sia almeno doppio del numero di batterie di tipo Beta e non superiore al numero di batterie Gamma. Formulare un opportuno modello di programmazione matematica per la pianificazione ottimale dell'attività di produzione della Svicon.

Esercizio 2: un semplice problema di acquisti

La società EtaBeta vuole costruire un portfolio di contratti per l'approvvigionamento dei propri negozi a partire da cinque offerte commerciali. Ogni offerta richiede un costo di acquisto fisso, al quale corrisponde un ritorno economico. I nomi dei contratti, i profitti p_i ed i costi w_i in migliaia di euro sono riportati nella prossima tabella. Si formuli un opportuno modello di programmazione matematica che massimizzi il profitto totale soggetto al vincolo di budget pari a 30 K €.

Offerta commerciale	w_i	p_i
F_1	10	20
F_2	5	8
F_3	4	3
F_4	23	23
F_5	5	15

Esercizio 3: un problema di trasporti

Un'industria con due impianti produttivi localizzati a Rimini e Firenze è interessata a sapere qual è l'organizzazione ottimale della propria rete distributiva, in modo da ottimizzare la consegna dei prodotti presso le tre principali città di distribuzione: Palermo, Milano e Roma. La capacità produttiva dei due impianti di produzione è la seguente: Rimini 300, Firenze 600. La domanda presso le tre città di distribuzione è la seguente: Palermo 325, Milano 300, Roma 275. I costi (in euro) associati al viaggio tra gli impianti di produzione e le città di distribuzione sono dati dalla seguente tabella:

	Palermo	Milano	Roma
Rimini	2500	1700	1800
Firenze	2500	1800	1400

Formulare un opportuno modello di programmazione matematica che permetta di pianificare lo spostamento ottimale dei prodotti dagli impianti alle città di distribuzione in modo tale da minimizzare i costi di viaggio.

Esercizio 4: il problema della dieta

Un nutrizionista vuole preparare la dieta per un suo cliente nella quale occorrono garantire almeno 20 mg di proteine al giorno, almeno 30 mg di ferro al giorno e almeno 10 mg di calcio al giorno. Il nutrizionista è orientato verso cibi a

base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/kg di ferro, 5 mg/kg di calcio e costo di 4€/kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/kg di ferro, 3 mg/kg di calcio e costo di 10€/kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/kg di ferro, 12 mg/kg di calcio e costo di 7€/kg). Si vuole determinare la dieta di costo minimo.

Esercizio 5: un'industria dolciaria

Un'industria dolciaria vende pacchetti di cioccolatini, caramelle e biscotti. Ogni pacchetto deve pesare almeno 2 kg e deve contenere tutti e tre i componenti. I componenti vengono forniti in lotti da 200 kg ciascuno e costano rispettivamente 1000, 300 e 500 euro. Le confezioni hanno i seguenti vincoli: il peso di cioccolatini più biscotti deve essere almeno la metà del peso totale; il peso di cioccolatini più caramelle non deve superare 1.5 kg ed il peso di ogni componente non può essere inferiore al 10% del peso totale. Obiettivo dell'industria dolciaria è quello di trovare la composizione del pacchetto di minimo costo che permetta di produrre 10000 pacchetti.

Esercizio 6: una società di consulenza

Una società di consulenza vuole pianificare le assunzioni del personale con le qualifiche di consulente junior e consulente senior. Basandosi sulle previsioni delle commesse dei prossimi tre anni, l'azienda avrà bisogno almeno delle seguenti professionalità:

- ❖ anno 1: 60 consulenti junior, 40 consulenti senior;
- ❖ anno 2: 45 consulenti junior, 35 consulenti senior;
- ❖ anno 3: 90 consulenti junior, 55 consulenti senior.

Attualmente la società dispone 35 consulenti junior e 30 consulenti senior. Per l'assunzione di un nuovo impiegato, l'azienda ha due costi: un primo costo annuo pari allo stipendio percepito dall'impiegato ed un secondo costo, da considerarsi solo in fase di assunzione e da sommarsi allo stipendio dell'impiegato per il primo anno di lavoro, inerente alle spese per il dipartimento che si occupa della selezione e dell'eventuale formazione iniziale (vedi la tabella sottostante – costi in K€).

	Stipendio	Assunzione
Junior	36	10
Senior	45	12

Gli stipendi riportati vanno considerati validi anche per il personale già disponibile all'inizio dell'anno 1. Un dipendente, una volta assunto, non può essere licenziato fino al 31 Dicembre dell'anno 3. Formulare il modello di programmazione lineare che permetta all'azienda di ridurre al minimo i costi di gestione del personale.

Esercizio 7: un'azienda alimentare

Un'azienda alimentare vuole pianificare la produzione di un prodotto per i prossimi 4 mesi. Non ci sono giacenze in magazzino all'inizio del periodo e non ce ne debbono essere alla fine dei 4 mesi. La domanda mensile prevista è di 120 ton., 160 ton., 300 ton. e 200 ton. rispettivamente. La capacità produttiva massima mensile è 140 ton., 150 ton., 140 ton. e 160 ton. rispettivamente ad un costo di 5 €/ton. In caso di necessità è possibile produrre in straordinario, producendo esattamente 50 ton., 75 ton., 70 ton. e 80 ton. rispettivamente (in straordinario la quantità prodotta è fissa). La produzione straordinaria ha un costo di 6 €/ton. Inoltre, per garantire una produzione omogenea si vuole che la produzione ordinaria di ciascun mese sia superiore al 10% della produzione totale. Le eventuali giacenze costano 2 €/ton. ogni mese. L'obiettivo è quello di pianificare la produzione di costo minimo.

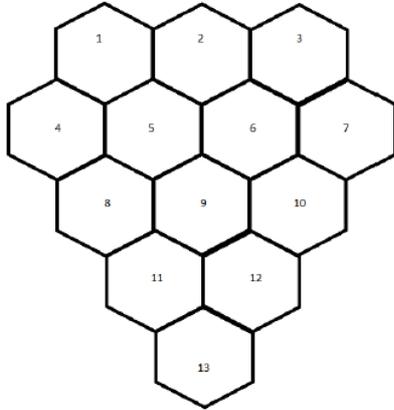
Esercizio 8: al supermercato

Un supermercato aperto 24 ore su 24 ha i seguenti fabbisogni minimi di cassiere:

Turno	1	2	3	4	5	6
Orario	3-7	7-11	11-15	15-19	19-23	23-3
Numero minimo	7	20	14	20	10	5

Il turno 1 segue immediatamente il turno 6. Una cassiera lavora otto ore consecutive, cominciando all'inizio di uno dei sei turni. Si formuli un modello in programmazione lineare che permetta di determinare il numero minimo di cassiere per soddisfare il fabbisogno giornaliero del supermercato.

Esercizio 9: in farmacia

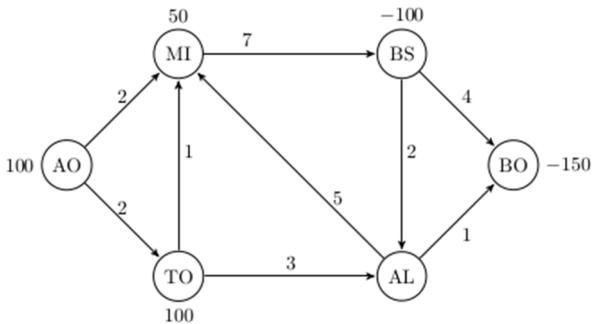


L'amministrazione di una città ha bisogno di decidere la localizzazione delle farmacie. La città è formata da 13 quartieri, come illustrato nella seguente figura. Una farmacia può essere costruita in qualsiasi quartiere ed è in grado di servire il quartiere dove viene realizzata ed i quartieri adiacenti. Formulare un modello di programmazione lineare che permetta di determinare il numero minimo di farmacie al fine di servire tutti i quartieri della città.

Esercizio 10: caserme dei pompieri

L'amministrazione della stessa città è alle prese con un problema simile. Ha infatti bisogno di decidere la localizzazione delle caserme dei pompieri. Una caserma può essere costruita in qualsiasi quartiere ed è in grado di servire il quartiere dove viene realizzata ed i quartieri adiacenti. Tuttavia, non sono ammesse situazioni di quartieri serviti da più di una caserma dei pompieri. Formulare un modello di programmazione lineare che permetta di determinare il numero minimo di caserme dei pompieri al fine di servire tutti i quartieri della città.

Esercizio 11: un altro problema di trasporti



L'azienda CarTina produce automobili nelle città di Aosta, Milano e Torino. Da questi stabilimenti le automobili sono trasportate tramite camion o treno presso i centri di distribuzione ubicati nelle città di Brescia e Bologna. Come mostrato in figura, lo stabilimento di Aosta produce 100 automobili, quello di Milano 50 e quello di Torino 100. Il centro di distribuzione di Brescia richiede 100 vetture per la distribuzione, mentre quello di Bologna ne richiede 150. La figura mostra anche l'intera rete interurbana, con i costi di

trasporto per ogni vettura fra le varie città. Formulare un modello di programmazione lineare che permetta alla CarTina di minimizzare i costi di trasporto al fine di trasportare le automobili dagli stabilimenti di produzione ai centri di distribuzione.

Esercizio 12: Atomi

Nell'intorno di un atomo l'energia di interazione tra l'atomo stesso e un altro atomo sonda che gli viene avvicinato, è data dalla formula

$$E = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

dove A e B sono parametri caratteristici dell'atomo mentre r rappresenta la distanza Euclidea tra l'atomo e la sonda. È data una configurazione tridimensionale di alcuni atomi, supposti puntiformi e si vuole trovare il punto di minima energia a cui la sonda (anch'essa considerata puntiforme) tende a stabilizzarsi per effetto delle interazioni con gli

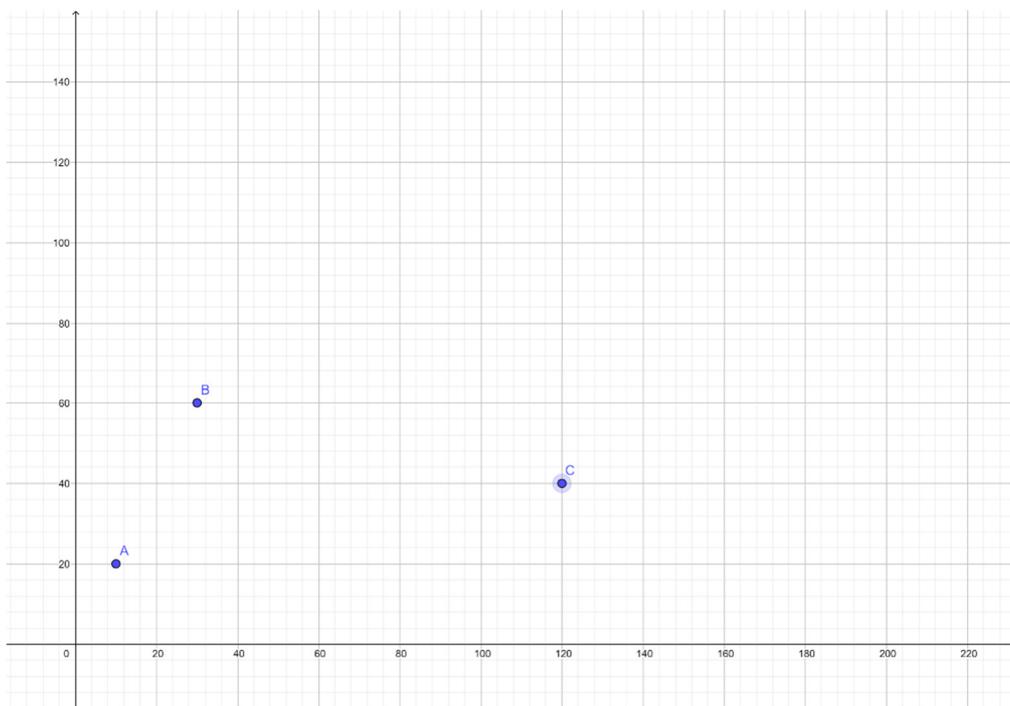
atomi stessi. Sono dati 5 atomi, posizionati come in Tabella e con i relativi valori di A e B. Si vuole determinare la posizione ottimale dell'atomo sonda al fine di minimizzare l'energia complessiva.

Atomo	x	y	z	A	B
1	3.2	2.5	4.8	1.0	200
2	6.6	1.2	4.5	3.0	250
3	8.5	7.8	1.5	1.5	100
4	0.8	5.1	5.6	0.5	400
5	4.1	9.3	0.9	1.7	500

Si descriva il modello matematico per esprimere la ricerca della soluzione di tale problema.

Esercizio 13: Localizzazione di una raffineria

Una società petrolifera opera in Sicilia. Essa riceve greggio da 3 piattaforme, rispettivamente nei punti A, B, C in figura che segue (le coordinate sono espresse in km).



La società deve decidere dove localizzare una raffineria in modo da minimizzare i costi di costruzione degli oleodotti.

I costi vengono supposti proporzionali al quadrato delle distanze che devono essere percorse. Inoltre, per questioni geo-politiche la raffineria deve essere costruita:

- non più di 5 km a Nord del punto B.
- non più di 4 km ad Est del punto C.

Si descriva il modello matematico per esprimere la ricerca della localizzazione migliore per la raffineria

Esercizio 14: una ditta di abbigliamento

Una ditta di abbigliamento produce magliette e pantaloni utilizzando 3 diverse macchine, le cui produzioni orarie sono le seguenti: macchina A: 3 magliette e 1 pantalone; macchina B: 2 magliette e 2 pantaloni; macchina C: 2 magliette ed 1 pantalone. Il mercato richiede almeno 60 magliette e 40 pantaloni al giorno. I costi orari delle macchine sono: 90 euro per la A, 80 euro per B e 60 euro per C. Scrivere un modello di programmazione lineare per determinare la produzione giornaliera di costo minimo.

Esercizio 15: una produzione di hamburger

La Valceci ha a disposizione i seguenti ingredienti per preparare degli hamburger vegani:

Ingrediente	Costo (€/kg)	Disponibilità (kg)
Ceci	5	40
Spinaci	3	30
Melanzane	2	15
Pangrattato	1	10

La Valceci produce due tipologie di hamburger di 50 g ciascuno (0.05 kg): classici (con almeno il 40% di ceci) e proteici (con almeno il 60% di ceci). La percentuale di pangrattato in ciascun hamburger non può superare il 10%. La Valceci vuole soddisfare una domanda di 500 hamburger classici e 200 hamburger proteici. Formulare un modello di programmazione lineare che permetta alla Valceci di determinare la composizione ottimale di ciascun hamburger nonché di minimizzare i costi di produzione.

Esercizio 16: il sudoku

Si risolva tramite la programmazione lineare il seguente sudoku (livello esperto), preso da: <https://sudoku.com/it/esperto/>

		5		2				
				4			1	
		6	3					
	9						3	2
		2				7	4	
3		7						
				2		5		1
	8		7					9
	6			1				8