PROGRAMMAZIONE LINEARE

METODO DEL SIMPLESSO: ESERCIZI

Testo del primo esercizio

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Osservazioni

- La regione ammissibile X è limitata (e chiusa) → il problema ammette una soluzione ottima (limitata)
- Il problema ha 3 variabili e 3 vincoli (funzionali)
- Il problema ha i vincoli della forma $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$

Forma standard/aumentata

- Per risolvere il problema tramite il Simplesso bisogna portare il problema in **forma standard**, introducendo le **variabili di slack**

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_1 = 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_3 = 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{cases}$$

- In forma matriciale abbiamo

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \Rightarrow [\boldsymbol{A} |\ \boldsymbol{I}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_s} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 80 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}^t = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3]$$

- Il numero massimo di soluzione ammissibili è $\binom{6}{3} = 20$

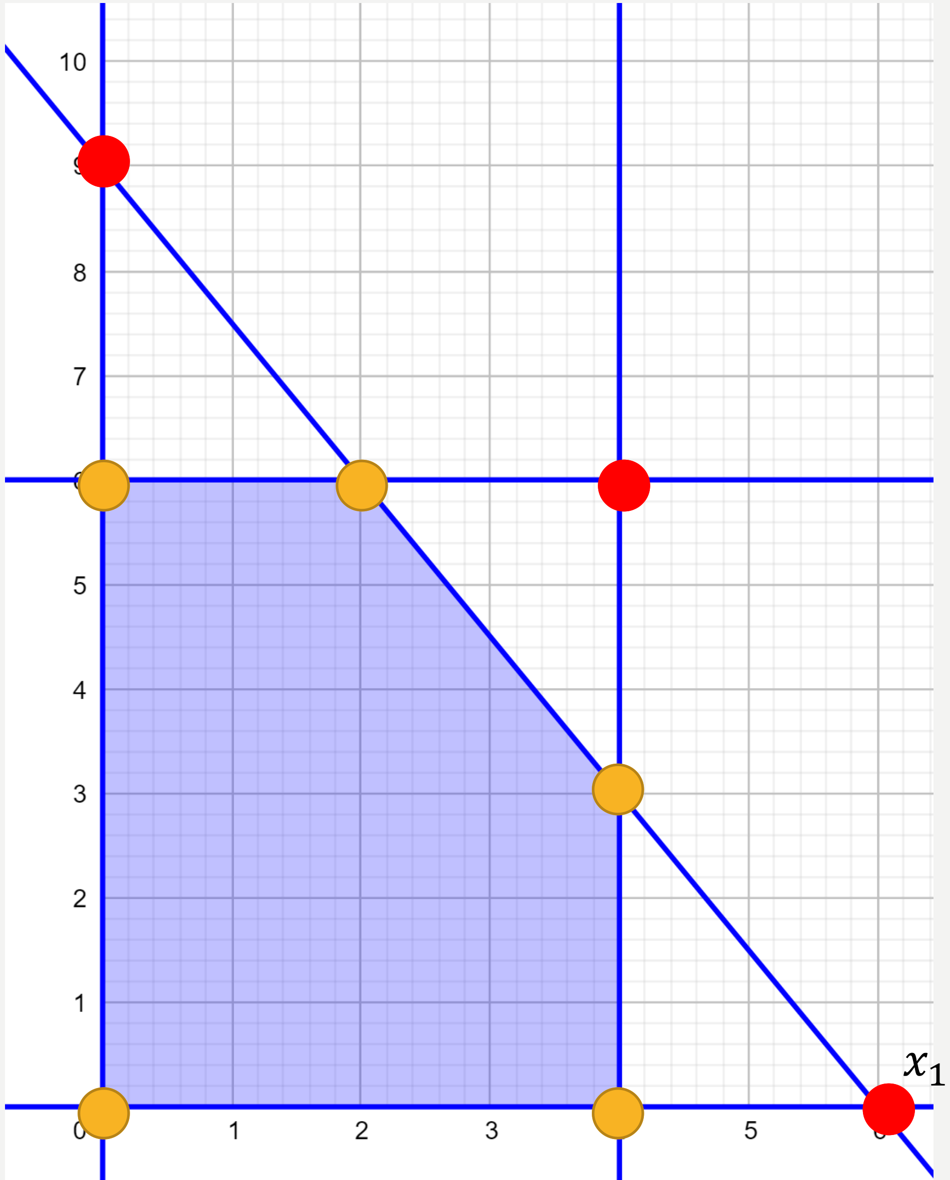
Soluzioni ammissibili

- Riprendiamo il modello matematico relativo alla società WYNDOR GLASS & Co.

$$\max_{x_1,x_2} z = (3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $x_1 \leq 4$
- $2 \cdot x_2 \leq 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$
- $x_1 , x_2 \ \geq 0$



- In questo caso, il numero massimo di soluzione ammissibili è $\binom{5}{3} = 10$.

Soluzione iniziale

- Ho bisogno ora di una opportuna soluzione iniziale

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_1 = 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_3 = 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{cases}$$

- Una soluzione iniziale (molto comoda) è data dal punto di origine (vale sempre per tutti i vincoli della forma $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 60 \\ 40 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$$

$$s_1 = 60, s_2 = 40, s_3 = 80$$

- $x_1,\ x_2,\ x_3$ sono le **variabili fuori base**, mentre s_1, s_2, s_3 sono **variabili in base**

Test di ottimalità

- Verifichiamo se la soluzione iniziale è o meno ottima

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_1 = 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_3 = 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{cases}$$

- $x_1,\ x_2,\ x_3$ sono le **variabili fuori base**
- $s_1,\ s_2,\ s_3$ sono le **variabili in base**

1. La funzione obiettivo deve essere espressa in funzione delle variabili fuori base
2. Devo leggere i tassi di miglioramento

$z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$ ⇒ I tassi di miglioramento sono $2, 4$ e 3

- La soluzione iniziale non è ottima e quindi devo eseguire un'**iterazione** del metodo del simplesso (☹)

Scelta della variabile da far entrare in base

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_1 = 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_3 = 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{cases}$$

variabili in base: s_1, s_2, s_3

variabili fuori base: $x_1,\ x_2,\ x_3$

Osservazioni

Facendo un iterazione del metodo del simplesso:

- devo trovare una soluzione adiacente alla soluzione ottima attuale $(0,0,0,60,40,80)$
- devo far entrare in base una delle variabili fuori base attuali
- sicuramente otterrò una soluzione ottimale migliore (la nuova z deve quindi essere > 0)

Quale variabile faccio entrare in base?

$z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$ ➡ x_2 entra in base (quella con il tasso di crescita maggiore)

Scelta della variabile da far uscire di base

Quale variabile faccio uscire di base?

variabili in base: s_1, s_2, s_3

variabili fuori base (ancora): $x_1,\ x_3$

Devo far uscire di base una tra s_1, s_2, s_3 per far entrare x_2

Consideriamo il problema di prima scritto in forma algebrica mettendo in evidenza le posizioni delle variabili e la z

$$
\begin{aligned}
z - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 0 \\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_1 &= 60 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 &= 40 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \quad + s_3 &= 80
\end{aligned}
$$

valore della funzione obiettivo per la soluzione iniziale

Essendo x_1, x_3 fuori base le poniamo entrambe uguali a 0 per ricavare di quanto possiamo aumentare il valore di x_2

Scelta della variabile da far uscire di base

Annullo sia x_1 che x_3

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_1 = 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_3 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 + s_1 = 60 \\ x_2 + s_2 = 40 \\ 3x_2 + s_3 = 80 \end{cases}$$

Nel sistema sono rimaste le variabili in base (s_1, s_2, s_3) e la variabile che voglio far entrare in base (x_2)

1. Cosa succede se s_1 esce di base?

   $s_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 15 \Rightarrow s_2 = 25$ e $s_3 = 35 \Rightarrow$ Soluzione ammissibile $(0,15,0,0,25,35)$

2. Cosa succede se s_2 esce di base?

   $s_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 40 \Rightarrow s_1 = -20$ e $s_3 = 20 \Rightarrow$ Soluzione non ammissibile $(0,40,0,-20,0,20)$

3. Cosa succede se s_3 esce di base?

   $s_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{80}{3} \Rightarrow s_1 = 60 - \frac{320}{3}$ e $s_2 = 40 - 80/3 \Rightarrow$ Soluzione non ammissibile $(0,15,0,-140/3,-40/3,0)$

Scelta della variabile da far uscire di base

La variabile da far uscire di base è s_1 che da come nuova soluzione ammissibile $(0{,}15{,}0{,}0{,}25{,}35)$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_1 \quad &= 60 \\
2x_1 + \ x_2 + 2x_3 \quad + \ s_2 \quad &= 40 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \quad +s_3 \ &= 80
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
4x_2 + s_1 &= 60 \\
x_2 + s_2 &= 40 \\
3x_2 + s_3 &= 80
\end{aligned}
$$

variabili in base: x_2, s_2, s_3

variabili fuori base:$s_1,\ x_2,\ x_3$

Un altro modo di vedere la ricerca delle variabile di base da far uscire è considerare

$$
\begin{aligned}
4x_2 + s_1 &= 60 \\
x_2 + s_2 &= 40 \\
3x_2 + s_3 &= 80
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
s_1 &= 60 - 4x_2 \\
s_2 &= 40 - x_2 \\
s_3 &= 80 - 3x_2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
60 - 4x_2 &\geq 0 \\
40 - x_2 &\geq 0 \\
80 - 3x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

devo rispettare i vincoli di non-negativa per s_1, s_2 e s_3

da cui ottengo

$$
\begin{aligned}
60 - 4x_2 &\geq 0 \\
40 - x_2 &\geq 0 \\
80 - 3x_2 &\geq 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_2 &\leq 15 \\
x_2 &\leq 40 \\
x_2 &\leq 80/3
\end{aligned}
\qquad
x_2 \leq 15
$$

Posso aumentare x_2 fino a 15, facendo uscire di base s_1

Ricaviamo i nuovi tassi di miglioramento

$$z - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \quad R_0$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_1 = 60 \quad R_1$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 40 \quad R_2$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \quad + s_3 = 80 \quad R_3$$

variabili in base: x_2, s_2, s_3

variabili fuori base: $s_1,\ x_2,\ x_3$

Dividiamo la seconda equazione per 4

$$z - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \quad R_0$$
$$\boxed{\frac{3}{4}x_1 + 1x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1 = 15} \quad \tilde{R}_1 = R_1/4$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 40 \quad R_2$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \quad + s_3 = 80 \quad R_3$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ [\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}] = & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perché?

- Vogliamo che nel sistema x_2 risulti variabile di base
- Nella funzione obiettivo vogliamo I tassi di miglioramento in funzione delle variabili fuori base

Ricaviamo i nuovi tassi di miglioramento

$$
\begin{aligned}
&z - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 &&= 0 \quad R_0\\
&\frac{3}{4}x_1 + 1x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1 &&= 15 \quad \tilde{R}_1\\
&2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 &&= 40 \quad R_2\\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \quad + s_3 &&= 80 \quad R_3
\end{aligned}
$$

variabili in base: x_2, s_2, s_3

variabili fuori base: $s_1,\ x_2,\ x_3$

Manipoliamo algebricamente le righe del sistema per far scompare x_2 nelle altre equazioni

$$
\begin{aligned}
&z - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 &&= 0\\
&\frac{3}{4}x_1 + 1x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1 &&= 15\\
&2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_2 &&= 40\\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \quad + s_3 &&= 80
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{R}_0 = R_0 + 4\tilde{R}_1\\
&\tilde{R}_1\\
&\tilde{R}_2 = R_2 - 1\tilde{R}_1\\
&\tilde{R}_3 = R_3 - 3\tilde{R}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z + x_1 - x_3 + s_1 &&= 60\\
&\frac{3}{4}x_1 + 1x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1 &&= 15\\
&\frac{5}{4}x_1 + \quad + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{4}s_1 + s_2 &&= 25\\
&-\frac{5}{4}x_1 + \quad + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}s_1 + s_3 &&= 35
\end{aligned}
$$

Nella prima riga leggiamo il nuovo valore della funzione obiettivo ed i nuovi tassi di miglioramento

Test di ottimalità

- Verifichiamo se la soluzione attuale è o meno ottimale

$$\max z = -x_1 + x_3 - s_1 + 60$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1 = 15 \\ \frac{5}{4}x_1 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{4}s_1 + s_2 = 25 \\ -\frac{5}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}s_1 + s_3 = 35 \end{cases}$$

1. La funzione obiettivo è espressa in funzione delle variabili fuori base
2. Devo leggere i nuovi tassi di miglioramento

$z = -x_1 + x_3 - s_1 + 60$ ⇒ I tassi di miglioramento sono $-1, 1$ e -1

- La soluzione attuale non è ottima e quindi devo eseguire una nuova iterazione del metodo del simplesso (☹)

Scelta della variabile da far entrare in base

$$\max z = -x_1 + x_3 - s_1 + 60$$

soggetto ai seguenti vincoli:

variabili in base: x_2, s_2, s_3

variabili fuori base: $s_1,\ x_2,\ x_3$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1 = 15 \\ \frac{5}{4}x_1 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{4}s_1 + s_2 = 25 \\ -\frac{5}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}s_1 + s_3 = 35 \end{cases}$$

Facendo una nuova iterazione del metodo del simplesso:

- devo trovare una soluzione adiacente alla soluzione ottima attuale $(0,15,0,0,25,35)$
- devo far entrare in base una delle variabili fuori base attuali
- sicuramente otterrò una soluzione ottimale migliore (la nuova z deve quindi essere > 60)

Quale variabile faccio entrare in base?

$z = -x_1 + 1x_3 - s_1 + 60$ ⇒ x_3 entra in base (quella con il tasso di crescita positivo)

Scelta della variabile da far uscire di base

Quale variabile faccio uscire di base?

variabili in base: x_2, s_2, s_3

variabili fuori base (ancora): $s_1,\ x_1$

$\Rightarrow$ Devo far uscire di base una tra x_2, s_2, s_3 per far entrare x_3

Consideriamo il problema di prima scritto in forma algebrica mettendo in evidenza le posizioni delle variabili

$$
\begin{cases}
\frac{3}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1 = 15 \\
\frac{5}{4}x_1 + \quad + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{4}s_1 + s_2 = 25 \\
-\frac{5}{4}x_1 + \quad + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}s_1 + s_3 = 35
\end{cases}
$$

Essendo s_1, x_1 fuori base le poniamo entrambe uguali a 0 per ricavare di quanto possiamo aumentare il valore di x_3

Scelta della variabile da far uscire di base

Annullo sia s_1 che x_1

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1 = 15 \\ \frac{5}{4}x_1 + \quad + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{4}s_1 + s_2 = 25 \\ -\frac{5}{4}x_1 + \quad + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}s_1 + s_3 = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 15 \\ \frac{3}{2}x_3 + s_2 = 25 \\ \frac{1}{2}x_3 + s_3 = 35 \end{array}$$

Nel sistema sono rimaste le variabili in base (x_2, s_2, s_3) e la variabile che voglio far entrare in base (x_3)

$$\begin{array}{l} x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 15 \\ \frac{3}{2}x_3 + s_2 = 25 \\ \frac{1}{2}x_3 + s_3 = 35 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 15 - \frac{1}{2}x_3 \\ s_2 = 25 - \frac{3}{2}x_2 \\ s_3 = 35 - \frac{1}{2}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 - \frac{1}{2}x_3 \geq 0 \\ 25 - \frac{3}{2}x_2 \geq 0 \\ 35 - \frac{1}{2}x_3 \geq 0 \end{cases}$$

devo rispettare i vincoli di non-negativa per x_2, s_2 e s_3

da cui ottengo

$$\begin{array}{l} x_2 \leq 30 \\ x_2 \leq 50/3 \\ x_2 \leq 70 \end{array} \Rightarrow x_2 \leq \frac{50}{3}$$

Posso aumentare x_2 fino a 50/3, facendo uscire di base s_2

Scelta della variabile da far uscire di base

La variabile da far uscire di base è s_2 che da come nuova soluzione ammissibile $\left(0, \frac{20}{3}, \frac{50}{3}, 0,0, \frac{80}{3}\right)$

$$\begin{cases} x_2 \quad + \frac{1}{2} x_3 = 15 \\ \frac{3}{2} x_3 + s_2 = 25 \\ \frac{1}{2} x_3 + s_3 = 35 \end{cases} \qquad x_3 = \frac{50}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = \frac{20}{3} \\ s_2 = 0 \\ s_3 = \frac{80}{3} \end{array}$$

Ricaviamo i nuovi tassi di miglioramento

$$z + x_1 \quad - x_3 + s_1 = 60 \qquad \boldsymbol{R_0}$$

$$\frac{3}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1 = 15 \qquad \boldsymbol{R_1}$$

$$\frac{5}{4}x_1 + \quad + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{4}s_1 + s_2 = 25 \qquad \boldsymbol{R_2}$$

$$-\frac{5}{4}x_1 + \quad + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}s_1 \quad + s_3 = 35 \qquad \boldsymbol{R_3}$$

variabili in base: x_2, x_3, s_3

variabili fuori base: $s_1,\ s_2,\ x_3$

Dividiamo la terza equazione per $2/3$

$$z + x_1 \quad - x_3 + s_1 = 60 \qquad \boldsymbol{R_0}$$

$$\frac{3}{4}x_1 + \quad + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1 = 15 \qquad \boldsymbol{\tilde{R}_1 = \frac{3}{2}R_1}$$

$$\frac{5}{6}x_1 + \quad + 1x_3 - \frac{1}{6}s_1 + \frac{2}{3}s_2 = \frac{50}{3} \qquad \boldsymbol{R_2}$$

$$-\frac{5}{4}x_1 + \quad + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}s_1 \quad + s_3 = 35 \qquad \boldsymbol{R_3}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array}$$

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Perché?

- Vogliamo che nel sistema x_3 risulti variabile di base
- Nella funzione obiettivo vogliamo I tassi di miglioramento in funzione delle variabili fuori base

Ricaviamo i nuovi tassi di miglioramento

$$z + x_1 \quad - x_3 + s_1 \quad = 60 \qquad \boldsymbol{R_0}$$

$$\frac{3}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1 = 15 \qquad \boldsymbol{\tilde{R}_1}$$

$$\frac{5}{6}x_1 + \quad + 1x_3 - \frac{1}{6}s_1 + \frac{2}{3}s_2 = \frac{50}{3} \qquad \boldsymbol{R_2}$$

$$-\frac{5}{4}x_1 + \quad + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}s_1 \quad + s_3 = 35 \qquad \boldsymbol{R_3}$$

variabili in base: x_2, x_3, s_3

variabili fuori base: $s_1,\ s_2,\ x_3$

Manipoliamo algebricamente le righe del sistema per far scompare x_3 nelle altre equazioni

$$z + x_1 \quad - 1x_3 + s_1 \quad = 60$$

$$\frac{3}{4}x_1 + x_2 \quad + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}s_1$$
$$= 15$$

$$\frac{5}{6}x_1 + \quad + 1x_3 - \frac{1}{6}s_1 + \frac{2}{3}s_2 = \frac{50}{3}$$

$$-\frac{5}{4}x_1 + \quad + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}s_1 \quad + s_3 = 35$$

$$\tilde{R}_0 = R_0 + 1\tilde{R}_2$$

$$\tilde{R}_1 = \tilde{R}_1 - \frac{1}{2}\tilde{R}_2$$

$$\tilde{R}_2$$

$$\tilde{R}_3 = R_3 - \frac{1}{2}\tilde{R}_2$$

$$z + \frac{11}{6}x_1 \quad + \frac{5}{6}s_1 + \frac{2}{3}s_2 = \frac{230}{3}$$

$$\frac{1}{3}x_1 + x_2 \quad + \frac{1}{3}s_1 = \frac{20}{3}$$

$$\frac{5}{6}x_1 + \quad + x_3 - \frac{1}{6}s_1 + \frac{2}{3}s_2 = \frac{50}{3}$$

$$-\frac{5}{3}x_1 + \quad - \frac{2}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + s_3 = \frac{80}{3}$$

Nella prima riga leggiamo il nuovo valore della funzione obiettivo ed i nuovi tassi di miglioramento

Test di ottimalità

- Verifichiamo se la soluzione attuale è o meno ottimale

$$\max z = -\frac{11}{6}x_1 - \frac{5}{6}s_1 - \frac{2}{3}s_2 + \frac{230}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}s_1 = \frac{20}{3} \\ \frac{5}{6}x_1 + x_3 - \frac{1}{6}s_1 + \frac{2}{3}s_2 = \frac{50}{3} \\ -\frac{5}{3}x_1 - \frac{2}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + s_3 = \frac{80}{3} \end{cases}$$

1. La funzione obiettivo è espressa in funzione delle variabili fuori base
2. Devo leggere i nuovi tassi di miglioramento

$$z = -\frac{11}{6}x_1 - \frac{5}{6}s_1 - \frac{2}{3}s_2 + \frac{230}{3} \Rightarrow$$

I tassi di miglioramento sono $-\frac{11}{6}$, $-\frac{5}{6}$ e $-\frac{2}{3}$

- La soluzione attuale è ottima quindi posso fermarmi (☺)

Riassumendo

Iterazione 0

- sol. ammissibile iniziale $(0,0,0,60,40,80)$
- valore della f. obiettivo $z = 0$
- Variabili in base: s_1, s_2, s_3 Variabili non in base: x_1, x_2, x_3
- Tassi di miglioramento: $2,4,3$

Iterazione 1

- sol. ammissibile nuova $(0,15,0,0,25,35)$
- valore della f. obiettivo $z = 60$
- Variabili in base: x_2, s_2, s_3 Variabili non in base: s_1, x_2, x_3
- Tassi di miglioramento: $-1,1,-1$

Iterazione 2

- sol. ammissibile nuova $\left(0,\frac{20}{3},\frac{50}{3},0,0,\frac{80}{3}\right)$
- valore della f. obiettivo $z = \frac{230}{3}$
- Variabili in base: x_2, x_3, s_3 Variabili non in base: s_1, s_2, x_3
- Tassi di miglioramento: $-11/6, -5/6, -2/3$

max $z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Testo del primo esercizio

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Osservazioni

- Una forma più compatta, pratica e veloce per applicare il metodo del Simplesso consiste nell’utilizzo della **forma tabellare**

Forma tabellare

- La forma tabellare del metodo del simplesso rappresenta la forma più conveniente per poter svolgere i calcoli
- La forma tabellare (o **tableau**) memorizza solo le informazioni necessarie, ovvero:
  - I coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo ($\boldsymbol{c}$) **cambiati di segno**
  - I termini noti delle equazioni ($\boldsymbol{b}$)
  - I coefficienti della variabili nei vincoli ($\boldsymbol{A}$)
  - Il valore della funzione obiettivo $\boldsymbol{Z}$

Coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo $\boldsymbol{c}^t$

Valore della funzione obiettivo Z per la soluzione ammissibile

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
0	-2	-4	-3	0	0	0
60	3	4	2	1	0	0
40	2	1	2	0	1	0
80	1	3	2	0	0	1

Termini noti $\boldsymbol{b}$

Matrice A delle variabili originali

Test di ottimalità

- Poniamo come variabili di base le variabili di slack ($s_1 = 60, s_2 = 40, s_3 = 80$) e come variabili non in base le variabili del problema originale ($x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$).
- Sulla riga 0 leggiamo i tassi di miglioramento relative alle tre variabili non in base (tutti negativi)
- I tassi di miglioramento cambiati di segno sono tutti negativi → **la soluzione non è ottimale**

Tassi di miglioramento

Coefficenti delle variabili di slack

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
0	-2	-4	-3	0	0	0
60	3	4	2	1	0	0
40	2	1	2	0	1	0
80	1	3	2	0	0	1

Individuazione della variabile entrante

- Nella prima iterazione del metodo del simplesso individuiamo la variabile da far entrare in base (x_2) (quella con il tasso di miglioramento più alto) a cui è associata la **colonna di Pivot**

Tasso di miglioramento migliore

Variabile entrante

Colonna di pivot

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
0	-2	-4	-3	0	0	0
60	3	4	2	1	0	0
40	2	1	2	0	1	0
80	1	3	2	0	0	1

Individuazione della variabile uscente

- Individuiamo la variabile uscente tramite il **test del minimo rapporto**:
  1. Individuiamo nella colonna di pivot ogni coefficiente strettamente positivo
  2. Calcoliamo il rapporto tra i termini noti a sinistra e questi coefficienti positivi
  3. Individuiamo la riga (**riga di pivot**) con il più piccolo di questi rapporti detto **elemento di pivot**

Elemento di pivot

Riga di pivot

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
0	-2	-4	-3	0	0	0
60	3	4	2	1	0	0
40	2	1	2	0	1	0
80	1	3	2	0	0	1

test del minimo rapporto: $\min\left[\frac{60}{4}, \frac{40}{1}, \frac{800}{3}\right] = \frac{60}{4}$

Individuazione della nuova soluzione di base

- **Dividiamo** la riga di pivot per l'elemento di pivot

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
0	-2	-4	-3	0	0	0
15	3/4	1	1/2	1/4	0	0
40	2	1	2	0	1	0
80	1	3	2	0	0	1

1° /4

- **Voglio manipolare le righe del Tableau per ottenere nella colonna relativa a** x_2 tutti 0 tranne 1 nella riga di pivot (deve entrare in base)

0
1
0
0

0°+ 4 *1°

2°- 1 *1°

3°-3 *1°

Individuazione della nuova soluzione di base

- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente negativo** nella colonna di pivot, **aggiungiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente in valore assoluto e la nuova riga di pivot
- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente positivo** nella colonna di pivot, **sottraiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente e la nuova riga di pivot

		x1	x2	x3	s1	s2	s3
0° + 4 *1°	60	1	0	-1	1	0	0
	15	3/4	1	1/2	1/4	0	0
2° - 1*1°	25	5/4	0	3/2	-1/4	1	0
3° - 3 *1°	35	-5/4	0	1/2	-3/4	0	1

nuovi valori delle variabili in base

Individuazione dei nuovi tassi di miglioramento

- Sulla nuova riga zero leggiamo il nuovo valore della funzione obiettivo ed il nuovo valore dei tassi di miglioramento delle variabili fuori base

Nuovi tassi di miglioramento cambiati di segno

Nuovo valore della funzione obiettivo

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
60	1	0	-1	1	0	0
15	3/4	1	1/2	1/4	0	0
25	5/4	0	3/2	-1/4	1	0
35	-5/4	0	1/2	-3/4	0	1

Test di ottimalità

- Leggendo la nuova riga dei coefficienti abbiamo che il coefficiente di x_3 è negativo → la soluzione non è ottimale

Il tasso di miglioramento cambiato di segno è negativo

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
60	1	0	$\boxed{-1}$	1	0	0
15	3/4	1	1/2	1/4	0	0
25	5/4	0	3/2	-1/4	1	0
35	-5/4	0	1/2	-3/4	0	1

Individuazione della variabile entrante ed uscente

- Nella seconda iterazione del metodo del simplesso individuiamo la variabile da far entrare in base (x_3), la riga di pivot (la 1°) tramite il test del minimo rapporto e l'elemento di pivot (3)

Variabile entrante

Elemento di pivot

Colonna di pivot

Riga di pivot

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
60	1	0	-1	1	0	0
15	3/4	1	1/2	1/4	0	0
25	5/4	0	3/2	-1/4	1	0
35	-5/4	0	1/2	-3/4	0	1

test del minimo rapporto: $\min\left[\frac{15}{1/2},\frac{25}{3/2},\frac{35}{1/2}\right]=\min\left[30,\frac{50}{3},70\right]$

Individuazione della nuova soluzione di base

- Dividiamo la riga di pivot per l'elemento di pivot

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
60	1	0	-1	1	0	0
15	3/4	1	1/2	1/4	0	0
50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
35	-5/4	0	1/2	-3/4	0	1

2° *2/3

- **Voglio manipolare le righe del Tableau per ottenere nella colonna relativa a** x_2 tutti 0 tranne 1 nella riga di pivot (deve entrare in base)

0

0

1

0

0°+ 1*2°

1°- 1/2 *2°

3°-1/2 *2°

Individuazione della nuova soluzione di base

- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente negativo** nella colonna di pivot, **aggiungiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente in valore assoluto e la nuova riga di pivot
- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente positivo** nella colonna di pivot, **sottraiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente e la nuova riga di pivot

		x1	x2	x3	s1	s2	s3
0° +1*2°	230/3	11/6	0	0	5/6	2/3	0
1° -1/2*2°	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
3° -1/2*2°	80/3	-2/3	0	0	-2/3	-1/3	1

nuovi valori delle variabili in base

Individuazione dei nuovi tassi di miglioramento

- Sulla nuova riga zero leggiamo il nuovo valore della funzione obiettivo ed il nuovo valore dei tassi di miglioramento delle variabili fuori base

Nuovi tassi di miglioramento cambiati di segno

Nuovo valore della funzione obiettivo

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
230/3	11/6	0	0	5/6	2/3	0
20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
80/3	-2/3	0	0	-2/3	-1/3	1

Test di ottimalità

- Leggendo la nuova riga 0 abbiamo che i coefficienti sono positivi → la soluzione è ottimale
- I tassi di miglioramento cambiati di segno sono positivi

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
230/3	11/6	0	0	5/6	2/3	0
20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
80/3	-2/3	0	0	-2/3	-1/3	1

- Il punto di ottimo (massimo) è dato da $\left(0, \frac{20}{3}, \frac{50}{3}, 0, 0, \frac{80}{3}\right)$
- Il massimo è 250/3

Tabella all'inizio ed alla fine

Tableau iniziale

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
0	-2	-4	-3	0	0	0
60	3	4	2	1	0	0
40	2	1	2	0	1	0
80	1	3	2	0	0	1

Tableau finale

	x1	x2	x3	s1	s2	s3
230/3	11/6	0	0	5/6	2/3	0
20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
80/3	-2/3	0	0	-2/3	-1/3	1

Valori delle variabili in base

Valore della funzione obiettivo

Tassi di miglioramento

Colonne variabili in base

Testo del secondo esercizio

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Osservazioni

- La regione ammissibile X è limitata (e chiusa) → il problema ammette una soluzione (limitata)
- Il problema ha 3 variabili e 2 vincoli (funzionali)
- Il problema ha i vincoli della forma $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$

Forma standard/aumentata

- Per risolvere il problema tramite il Simplesso bisogna portare il problema in forma standard, introducendo le variabili di slack

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 40 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- In forma matriciale abbiamo

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \Rightarrow [\boldsymbol{A}|\ \boldsymbol{I}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_s} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}^t = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad s_1 \quad s_2]$$

- Il numero massimo di soluzione ammissibili è $\binom{5}{2} = 10$

Soluzione iniziale

- Ho bisogno ora di una opportuna soluzione iniziale

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 40 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- Una soluzione iniziale (molto comoda) è data dal punto di origine

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \\ \\ s_1 = 30, s_2 = 40 \end{array}$$

- $x_1,\ x_2,\ x_3$ sono le **variabili fuori base**, mentre s_1, s_2 sono **variabili in base**

Test di ottimalità

- Verifichiamo se la soluzione iniziale è o meno ottimale

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 40 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1. La funzione obiettivo deve essere espressa in funzione delle variabili fuori base
2. Devo leggere i tassi di miglioramento

$z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$ ⇒ I tassi di miglioramento sono $4, 3$ e 6

- La soluzione iniziale non è ottima e quindi devo eseguire una iterazione del metodo del simplesso (☹)

Scelta della variabile da far entrare in base

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 40 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

variabili in base: s_1, s_2

variabili fuori base: $x_1,\ x_2,\ x_3$

Osservazioni

Facendo un iterazione del metodo del simplesso:

- devo trovare una soluzione adiacente alla soluzione ottima attuale $(0,0,0,30,40)$
- devo far entrare in base una delle variabili fuori base attuali
- sicuramente otterrò una soluzione ottimale migliore (la nuova z deve quindi essere > 0)

Quale variabile faccio entrare in base?

$z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$ ⇒ x_3 entra in base (quella con il tasso di crescita maggiore)

Scelta della variabile da far uscire di base

Quale variabile faccio uscire di base?

variabili in base: s_1, s_2

variabili fuori base (ancora): $x_1,\ x_2$

Devo far uscire di base una tra s_1, s_2 per far entrare x_3

Consideriamo il problema di prima scritto in forma algebrica mettendo in evidenza le posizioni delle variabili

$$
\begin{aligned}
z - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 \qquad\qquad &= 0 \\
3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 \qquad &= 30 \\
2x_1 + \ 2x_2 + 3x_3 \qquad + \ s_2 \quad &= 40
\end{aligned}
$$

valore della funzione obiettivo per la soluzione iniziale

Essendo x_1, x_2 fuori base le poniamo entrambe uguali a 0 per ricavare di quanto possiamo aumentare il valore di x_2

Scelta della variabile da far uscire di base

Annullo sia x_1 che x_2

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 \qquad &= 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + s_2 &= 40 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3x_3 + s_1 &= 30 \\ 3x_3 + s_2 &= 40 \end{aligned}$$

Nel sistema sono rimaste le variabili in base (s_1, s_2) e la variabili che voglio far entrare in base (x_3)

1. Cosa succede se s_1 esce di base?

   $s_1 = 0 \Rightarrow x_3 = 10 \Rightarrow s_2 = 10 \Rightarrow$ Soluzione ammissibile $(0,0,10,0,10)$

2. Cosa succede se s_2 esce di base?

   $s_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 40/3 \Rightarrow s_1 = -10 \Rightarrow$ Soluzione non ammissibile $(0,0,40/3,-10,0)$

Scelta della variabile da far uscire di base

La variabile da far uscire di base è s_1 che da come nuova soluzione ammissibile$(0,0,10,0,10)$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 \quad &= 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad + s_2 &= 40 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3x_3 + s_1 &= 30 \\ 3x_3 + s_2 &= 40 \end{aligned}$$

variabili in base: s_2, x_3

variabili fuori base:$s_1,\ x_1,\ x_2$

Un altro modo di vedere la ricerca delle variabile di base da far uscire è considerare

$$\begin{aligned} 3x_3 + s_1 &= 30 \\ 3x_3 + s_2 &= 40 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} s_1 &= 30 - 3x_3 \\ s_2 &= 40 - 3x_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 30 - 3x_3 &\geq 0 \\ 40 - 3x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

devo rispettare i vincoli di non-negativa per s_1, s_2

da cui ottengo

$$\begin{aligned} 30 - 3x_3 &\geq 0 \\ 40 - 3x_3 &\geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &\leq 10 \\ x_3 &\leq \frac{40}{3} \end{aligned} \Rightarrow x_3 \leq 10$$

Posso aumentare x_3 fino a 10, facendo uscire di base s_1

Ricaviamo i nuovi tassi di miglioramento

$$
\begin{aligned}
&z - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 && = 0 && R_0 \\
&3x_1 + x_2 + 3x_3 \quad + s_1 && = 30 && R_1 \\
&2x_1 + \ 2x_2 + 3x_3 \qquad + \ s_2 && = 40 && R_2
\end{aligned}
$$

variabili in base: x_3, s_2

variabili fuori base: $s_1,\ x_1,\ x_2$

Dividiamo la seconda equazione per 3

$$
\begin{aligned}
&z - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 && = 0 && R_0 \\
&x_1 \ + \frac{1}{3}x_2 + {\color{red}1}x_3 + \frac{1}{3}s_1 && = 10 && \tilde{R}_1 = R_1/3 \\
&2x_1 + \ x_2 + \ \ 2x_3 \qquad + \ s_2 && = 40 && R_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & {\color{red}x_3} & s_1 & {\color{red}s_2} \end{array} \\
[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}] = & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}
$$

Perché?

- Vogliamo che nel sistema x_3 risulti variabile di base
- Nella funzione obiettivo vogliamo I tassi di miglioramento in funzione delle variabili fuori base

Ricaviamo i nuovi tassi di miglioramento

$$
\begin{array}{lll}
z - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0 & & R_0 \\
x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 1x_3 + \frac{1}{3}s_1 = 15 & & \tilde{R}_1 = R_1/3 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 40 & & R_2
\end{array}
$$

variabili in base: x_3, s_2

variabili fuori base: $s_1,\ x_1,\ x_2$

Manipoliamo algebricamente le righe del sistema per far scompare x_2 nelle altre equazioni

$$
\begin{array}{l}
z - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0 \\
x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 1x_3 + \frac{1}{3}s_1 = 15 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 40
\end{array}
\quad
\boxed{\begin{array}{l}
\tilde{R}_0 = R_0 + 6\tilde{R}_1 \\
\tilde{R}_1 \\
\tilde{R}_2 = R_2 - 2\tilde{R}_1
\end{array}}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{l}
z + 2x_1 - x_2 + 2s_1 = 60 \\
x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 1x_3 + \frac{1}{3}s_1 = 10 \\
-x_1 + x_2 - s_1 + s_2 = 10
\end{array}
$$

Nella prima riga leggiamo il nuovo valore della funzione obiettivo ed i nuovi tassi di miglioramento

Test di ottimalità

- Verifichiamo se la soluzione attuale è o meno ottimale

$$\max z = -2\,x_1 + x_2 - 2s_1 + 60$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 + \frac{1}{3}s_1 = 10 \\ -x_1 + x_2 - s_1 + s_2 = 10 \end{cases}$$

1. La funzione obiettivo è espressa in funzione delle variabili fuori base
2. Devo leggere i nuovi tassi di miglioramento

$z = -2\,x_1 + x_2 - 2s_1 + 60$ ⇨ I tassi di miglioramento sono $-2, 1$ e -2

- La soluzione attuale non è ottima e quindi devo eseguire una nuova iterazione del metodo del simplesso (☹)

Scelta della variabile da far entrare in base

$$\max z = -2\,x_1 + x_2 - 2s_1 + 60$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 + \frac{1}{3}s_1 = 10 \\ -\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 - s_1 + s_2 = 10 \end{cases}$$

variabili in base: x_3, s_2

variabili fuori base: $s_1,\ x_1,\ x_2$

Facendo una nuova iterazione del metodo del simplesso:

- devo trovare una soluzione adiacente alla soluzione ottima attuale $(0{,}0{,}10{,}0{,}10)$
- devo far entrare in base una delle variabili fuori base attuali
- sicuramente otterrò una soluzione ottimale migliore (la nuova z deve quindi essere > 60)

Quale variabile faccio entrare in base?

$z = -2\,x_1 + 1x_2 - 2s_1 + 60 \Rightarrow$ x_2 entra in base (quella con il tasso di crescita positivo)

Scelta della variabile da far uscire di base

Quale variabile faccio uscire di base?

variabili in base: x_3, s_2

variabili fuori base (ancora): $s_1,\ x_1$

Devo far uscire di base una tra x_3, s_2 per far entrare x_2

Consideriamo il problema di prima scritto in forma algebrica mettendo in evidenza le posizioni delle variabili

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 + x_3 + \dfrac{1}{3}s_1 = 10 \\ -x_1 + x_2 - s_1 + s_2 = 10 \end{cases}$$

Essendo s_1, x_1 fuori base le poniamo entrambe uguali a 0 per ricavare di quanto possiamo aumentare il valore di x_3

Scelta della variabile da far uscire di base

Annullo sia s_1 che x_1

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 + \frac{1}{3}s_1 = 10 \\ -x_1 + x_2 - s_1 + s_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 + s_2 = 10 \end{cases}$$

Nel sistema sono rimaste le variabili in base (s_2, x_3) e la variabile che voglio far entrare in base (x_2)

$$\begin{matrix} \frac{1}{3}x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 + s_2 = 10 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 10 - \frac{1}{3}x_2 \\ s_2 = 10 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 - \frac{1}{3}x_2 \geq 0 \\ 10 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

devo rispettare i vincoli di non-negativa per x_3, s_2

da cui ottengo

$$\begin{matrix} x_2 \leq 30 \\ x_2 \leq 10 \end{matrix} \Rightarrow x_2 \leq 10$$

Posso aumentare x_2 fino a 10, facendo uscire di base s_2

Scelta della variabile da far uscire di base

La variabile da far uscire di base è s_2 che da come nuova soluzione ammissibile $\left(0,10,\frac{20}{3},0,10\right)$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 + s_2 = 10 \end{cases} \xrightarrow{x_2 = 10} \quad x_3 = \frac{20}{3}, \quad s_2 = 10$$

Ricaviamo i nuovi tassi di miglioramento

$$
\begin{aligned}
&z + 2\,x_1 - x_2 \qquad\qquad + 2s_1 \qquad = 60 && \boldsymbol{R_0}\\
&\qquad x_1 \;\; + \frac{1}{3}x_2 + x_3 + \frac{1}{3}s_1 \qquad = 10 && \boldsymbol{R_1}\\
&\quad -\mathrm{x}_1 \; + \quad \mathrm{x}_2 \qquad\quad -s_1 + \; s_2 = 10 && \boldsymbol{R_2}
\end{aligned}
$$

variabili in base: x_2, x_3

variabili fuori base: $s_1, \; s_2, x_1$

Dividiamo la terza equazione per 1 (ovvero non dividiamo)

$$
\begin{aligned}
&z + 2\,x_1 - x_2 \qquad\qquad + 2s_1 \qquad = 60 && \boldsymbol{R_0}\\
&\qquad x_1 \;\; + \frac{1}{3}x_2 + x_3 + \frac{1}{3}s_1 \qquad = 10 && \boldsymbol{R_1}\\
&\quad -\mathrm{x}_1 \; + 1\mathrm{x}_2 \qquad\quad -s_1 + \; s_2 = 10 && \boldsymbol{\widetilde{R}_2} = \boldsymbol{R_2}
\end{aligned}
$$

Perché?

- Vogliamo che nel sistema x_2 risulti variabile di base
- Nella funzione obiettivo vogliamo I tassi di miglioramento in funzione delle variabili fuori base

Ricaviamo i nuovi tassi di miglioramento

$$z + 2\,x_1 - x_2 \qquad + 2s_1 \qquad = 60 \quad \boldsymbol{R_0}$$

$$x_1 \quad + \frac{1}{3}x_2 + x_3 + \frac{1}{3}s_1 \qquad = 10 \quad \boldsymbol{R_1}$$

$$-\mathrm{x}_1 \; + {\color{red}1}\mathrm{x}_2 \qquad -s_1 + \; s_2 = 10 \quad \boldsymbol{\widetilde{R}_2} = \boldsymbol{R_2}$$

variabili in base: x_2, x_3

variabili fuori base: $s_1,\ s_2, x_1$

Manipoliamo algebricamente le righe del sistema per far scompare x_2 nelle altre equazioni

$$z + 2\,x_1 \quad - x_2 \qquad + 2s_1 \qquad = 60$$

$$x_1 \quad + \frac{1}{3}x_2 + x_3 + \frac{1}{3}s_1 \qquad = 10$$

$$-\mathrm{x}_1 \; + {\color{red}1}\mathrm{x}_2 \qquad -s_1 + \; s_2 = 10$$

$$\tilde{R}_0 = R_0 + {\color{red}1}\tilde{R}_2$$

$$\tilde{R}_1 = \tilde{R}_1 - {\color{red}\frac{1}{3}}\tilde{R}_2$$

$$\boldsymbol{\tilde{R}_2}$$

$$z + \quad x_1 \qquad + x_3 + \quad s_1 \qquad = 70$$

$$\frac{4}{3}x_1 \qquad + x_3 + \frac{2}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 = \frac{20}{3}$$

$$-\mathrm{x}_1 \; + {\color{red}1}\mathrm{x}_2 \qquad +s_1 + \; s_2 \qquad = 10$$

Nella prima riga leggiamo il nuovo valore della funzione obiettivo ed i nuovi tassi di miglioramento

Test di ottimalità

- Verifichiamo se la soluzione attuale è o meno ottimale

$$\max z = -x_1 - x_3 - s_1 + 70$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x_1 + x_3 + \frac{2}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 = \frac{20}{3} \\ -x_1 + 1x_2 + s_1 + s_2 = 10 \end{cases}$$

1. La funzione obiettivo è espressa in funzione delle variabili fuori base
2. Devo leggere i nuovi tassi di miglioramento

$z = -x_1 - x_3 - s_1 + 70$ ⇒ I tassi di miglioramento sono $-1, -1$ e -1

- La soluzione attuale è ottima quindi posso fermarmi (☺)

Riassumendo

Iterazione 0

- sol. ammissibile iniziale $(0,0,30,40)$
- valore della f. obiettivo $z = 0$
- Variabili in base: s_1, s_2 Variabili non in base: x_1, x_2, x_3
- Tassi di miglioramento: $4,3,6$

Iterazione 1

- sol. ammissibile $(0,10,0,10)$
- valore della f. obiettivo $z = 60$
- Variabili in base: x_2, s_2, s_3 Variabili non in base: s_1, x_2, x_3
- Tassi di miglioramento: $-2,1,-2$

Iterazione 2

- sol. ammissibile$\left(0,10,\frac{20}{3},0,10\right)$
- valore della f. obiettivo $z = 70$
- Variabili in base: x_2, x_3, s_3 Variabili non in base: s_1, s_2, x_3
- Tassi di miglioramento: $-1,-1,-1$

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Forma tabellare

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- Eseguiamo nuovamento l'algoritmo del simplesso utilizzando la forma tabellare

Valore della funzione obiettivo Z per la soluzione ammissibile

Coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo $\boldsymbol{c}^t$

Termini noti $\boldsymbol{b}$

	x1	x2	x3	s1	s2
0	-4	-3	-6	0	0
30	3	1	3	1	0
40	2	2	3	0	1

Matrice A delle variabili originali

Test di ottimalità

- Poniamo come variabili di base le variabili di slack ($s_1 = 30, s_2 = 40$) e come variabili non in base le variabili del problema originale ($x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$).
- Sulla riga 0 leggiamo i tassi di miglioramento relative alle tre variabili non in base (tutti negativi)
- I tassi di miglioramento cambiati di segno sono tutti negativi → la soluzione non è ottimale

Tassi di miglioramento

	x1	x2	x3	s1	s2
0	-4	-3	-6	0	0
30	3	1	3	1	0
40	2	2	3	0	1

Coefficenti delle variabili di slack

Individuazione della variabile entrante

- Nella prima iterazione del metodo del simplesso individuiamo la variabile da far entrare in base (x_3) (quella con il tasso di miglioramento più alto) a cui è associata la **colonna di Pivot**

Tasso di miglioramento migliore

Variabile entrante

	x1	x2	x3	s1	s2
0	-4	-3	-6	0	0
30	3	1	3	1	0
40	2	2	3	0	1

Colonna di pivot

Individuazione della variabile uscente

- Individuiamo la variabile uscente tramite il **test del minimo rapporto**:
  1. Individuiamo nella colonna di pivot ogni coefficiente strettamente positivo
  2. Calcoliamo il rapporto tra i termini noti a sinistra e questi coefficienti positivi
  3. Individuiamo la riga (**riga di pivot**) con il più piccolo di questi rapporti detto **elemento di pivot**

	x1	x2	x3	s1	s2
0	-4	-3	-6	0	0
30	3	1	3	1	0
40	2	2	3	0	1

Riga di pivot

Elemento di pivot

test del minimo rapporto: $\min\left[\frac{30}{3}, \frac{40}{3}\right]$

Individuazione della nuova soluzione di base

- **Dividiamo** la riga 1 di pivot per l'elemento di pivot

	x1	x2	x3	s1	s2
0	-4	-3	-6	0	0
10	1	1/3	1	1/3	0
40	2	2	3	0	1

1° /3

- **Voglio manipolare le righe del Tableau per ottenere nella colonna relativa a x_2** tutti 0 tranne 1 nella riga di pivot (deve entrare in base)

0

1

0

0°+ 6 *1°

2°- 3 *1°

Individuazione della nuova soluzione di base

- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente negativo** nella colonna di pivot, **aggiungiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente in valore assoluto e la nuova riga di pivot
- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente positivo** nella colonna di pivot, **sottraiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente e la nuova riga di pivot

		x1	x2	x3	s1	s2
0°+ 6 *1°	60	2	-1	0	2	0
	10	1	1/3	1	1/3	0
2°- 3 *1°	10	-1	1	0	-1	1

nuovi valori delle variabili in base

Individuazione dei nuovi tassi di miglioramento

- Sulla nuova riga zero leggiamo il nuovo valore della funzione obiettivo ed il nuovo valore dei tassi di miglioramento delle variabili fuori base

Nuovi tassi di miglioramento cambiati di segno

Nuovo valore della funzione obiettivo

	x1	x2	x3	s1	s2
60	2	-1	0	2	0
10	1	1/3	1	1/3	0
10	-1	1	0	-1	1

Test di ottimalità

- Leggendo la nuova riga dei coefficienti abbiamo che il coefficiente di x_2 è negativo → la soluzione non è ottimale!!! (☹)

Il tasso di miglioramento cambiato di segno è negativo

	x1	x2	x3	s1	s2
60	2	-1	0	2	0
10	1	1/3	1	1/3	0
10	-1	1	0	-1	1

Individuazione della variabile entrante ed uscente

- Nella seconda iterazione del metodo del simplesso individuiamo la variabile da far entrare in base (x_2), la riga di pivot (la 1°) tramite il test del minimo rapporto e l'elemento di pivot (1)

Elemento di pivot

Variabile entrante

Colonna di pivot

Riga di pivot

	x1	x2	x3	s1	s2
60	2	-1	0	2	0
10	1	1/3	1	1/3	0
10	-1	1	0	-1	1

test del minimo rapporto: $\min\left[\frac{10}{1/3}, \frac{10}{1}\right] = \min[30, 10]$

Individuazione della nuova soluzione di base

- Dividiamo la riga di pivot per l'elemento di pivot (in questo caso è 1!)

	x1	x2	x3	s1	s2
60	2	-1	0	2	0
10	1	1/3	1	1/3	0
10	-1	1	0	-1	1

2° *1

- **Voglio manipolare le righe del Tableau per ottenere nella colonna relativa a x_2** tutti 0 tranne 1 nella riga di pivot (deve entrare in base)

0
0
1

0°+ 1*2°

2°-1/3 *2°

Individuazione della nuova soluzione di base

- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente negativo** nella colonna di pivot, **aggiungiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente in valore assoluto e la nuova riga di pivot
- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente positivo** nella colonna di pivot, **sottraiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente e la nuova riga di pivot

		x1	x2	x3	s1	s2
0°+ 1*2° →	70	1	0	0	1	1
2°-1/3 *2° →	20/3	4/3	0	1	2/3	-1/3
	10	-1	1	0	-1	1

nuovi valori delle variabili in base

Individuazione dei nuovi tassi di miglioramento

- Sulla nuova riga zero leggiamo il nuovo valore della funzione obiettivo ed il nuovo valore dei tassi di miglioramento delle variabili fuori base

Nuovi tassi di miglioramento cambiati di segno

Nuovo valore della funzione obiettivo

	x1	x2	x3	s1	s2
70	1	0	0	1	1
20/3	4/3	0	1	2/3	-1/3
10	-1	1	0	-1	1

Test di ottimalità

- Leggendo la nuova riga 0 abbiamo che i coefficienti sono positivi → la soluzione è ottimale

I tassi di miglioramento cambiati di segno sono positivi

	x1	x2	x3	s1	s2
70	1	0	0	1	1
20/3	4/3	0	1	2/3	-1/3
10	-1	1	0	-1	1

- Il punto di ottimo (massimo) è dato da $\left(0{,}10, \frac{20}{3}, 0{,}0\right)$
- Il massimo è 70

Testo del terzo esercizio

$$\max z = 4500x_1 + 4500x_2$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ 5000x_1 + 4000x_2 \leq 6000 \\ 400x_1 + 500x_2 \leq 600 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Osservazioni

- La regione ammissibile X è limitata (e chiusa) → il problema ammette una soluzione (limitata)
- Il problema ha 2 variabili e 4 vincoli (funzionali)
- Il problema ha i vincoli della forma $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$

Osservazioni importanti

- Prima di risolvere il simplesso in modo algebrico e/o tabellare, essendo solo in 2 variabili, può essere semplificare il problema

$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ 5000x_1 + 4000x_2 \leq 6000 \\ 400x_1 + 500x_2 \leq 600 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- Inoltre max $z = 4500x_1 + 4500x_2$ è equivalente a massimizzare $4500 \cdot$ max $z = (x_1 + x_2)$

- Quindi possiamo passare al seguente problema

$$\max z = (4500x_1 + 4500x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ 5000x_1 + 40000x_2 \leq 6000 \\ 400x_1 + 500x_2 \leq 600 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$

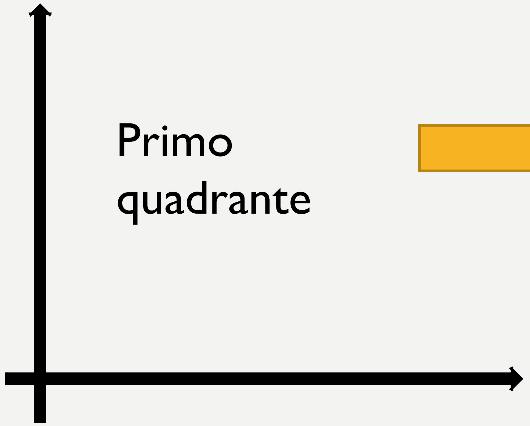
$$\max z = (x_1 + x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

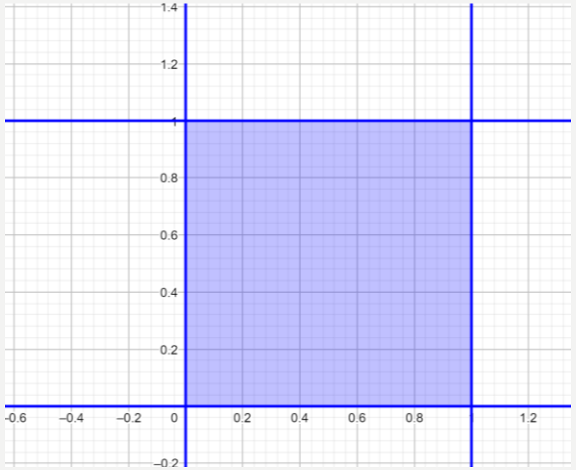
Osservazioni importanti

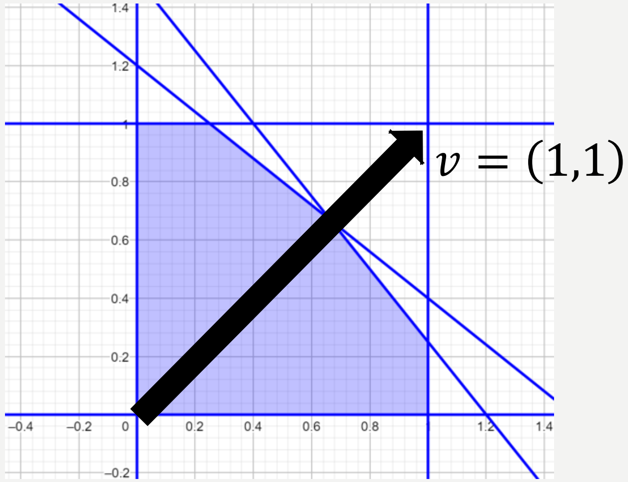
- Prima di risolvere il simplesso in modo algebrico e/o tabellare, essendo solo in 2 variabili, può essere conveniente graficare la regione ammissibile

$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ + $x_1 \leq 1, x_2 \leq 1$ + $5x_1 + 4x_2 \leq 6, 4x_1 + 5x_2 \leq 6$



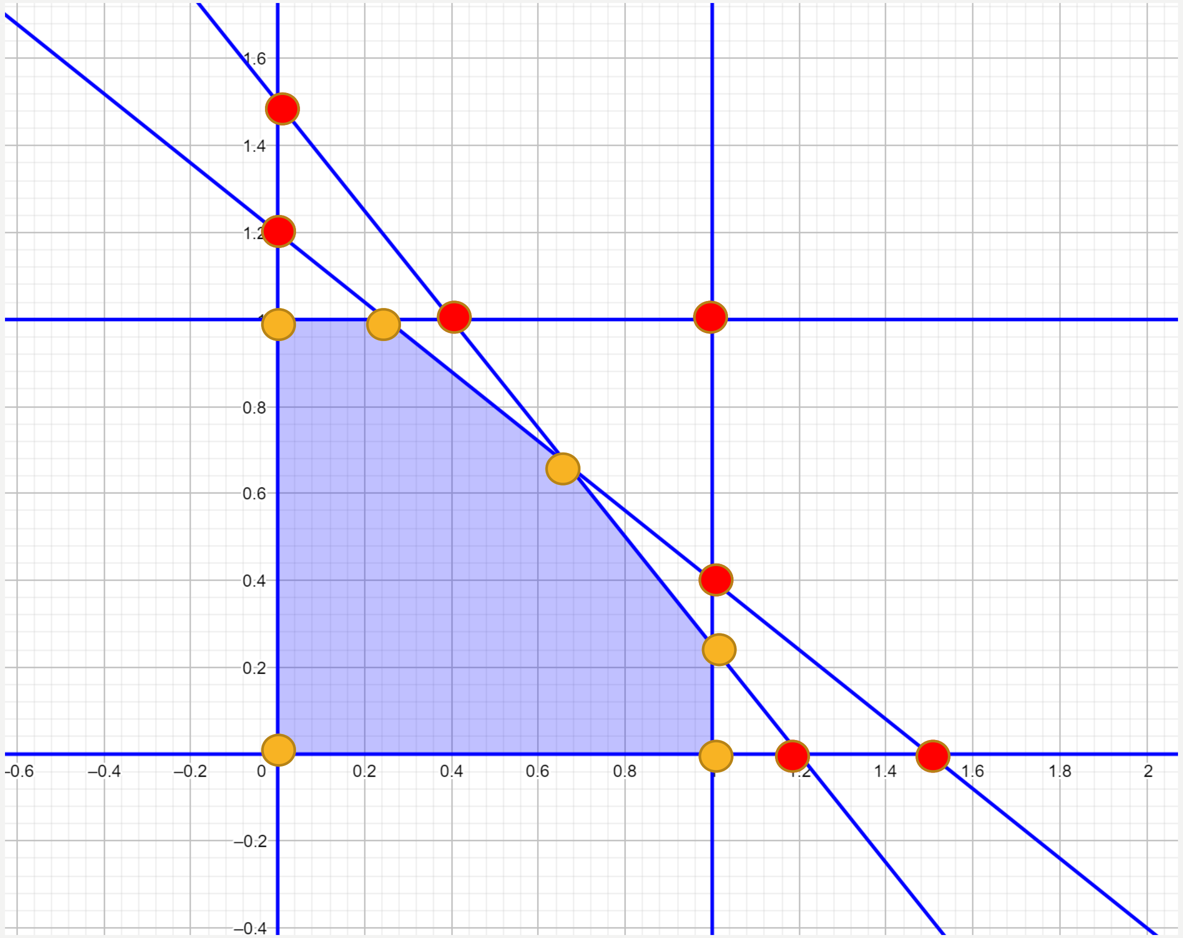




- La direzione di crescita della funzione obiettivo è data da $v = (1,1)$

Osservazioni importanti

- Abbiamo 6 vertici ammissibili e 7 non ammissibili



- Notare che qui abbiamo 13 possibili vertici, ma il numero massimo è 15=$\binom{6}{4}$

Simplesso geometrico

Abbiamo due possibili percorsi (essendo i tassi di crescita di x_1 e x_2 uguali)

Prima strada

$$O = (0,0) \qquad z = 0$$

$$A = (0,1) \qquad z = 1$$

$$B = \left(\frac{1}{4}, 1\right) \qquad z = \frac{5}{4}$$

$$C = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad z = \frac{4}{3}$$

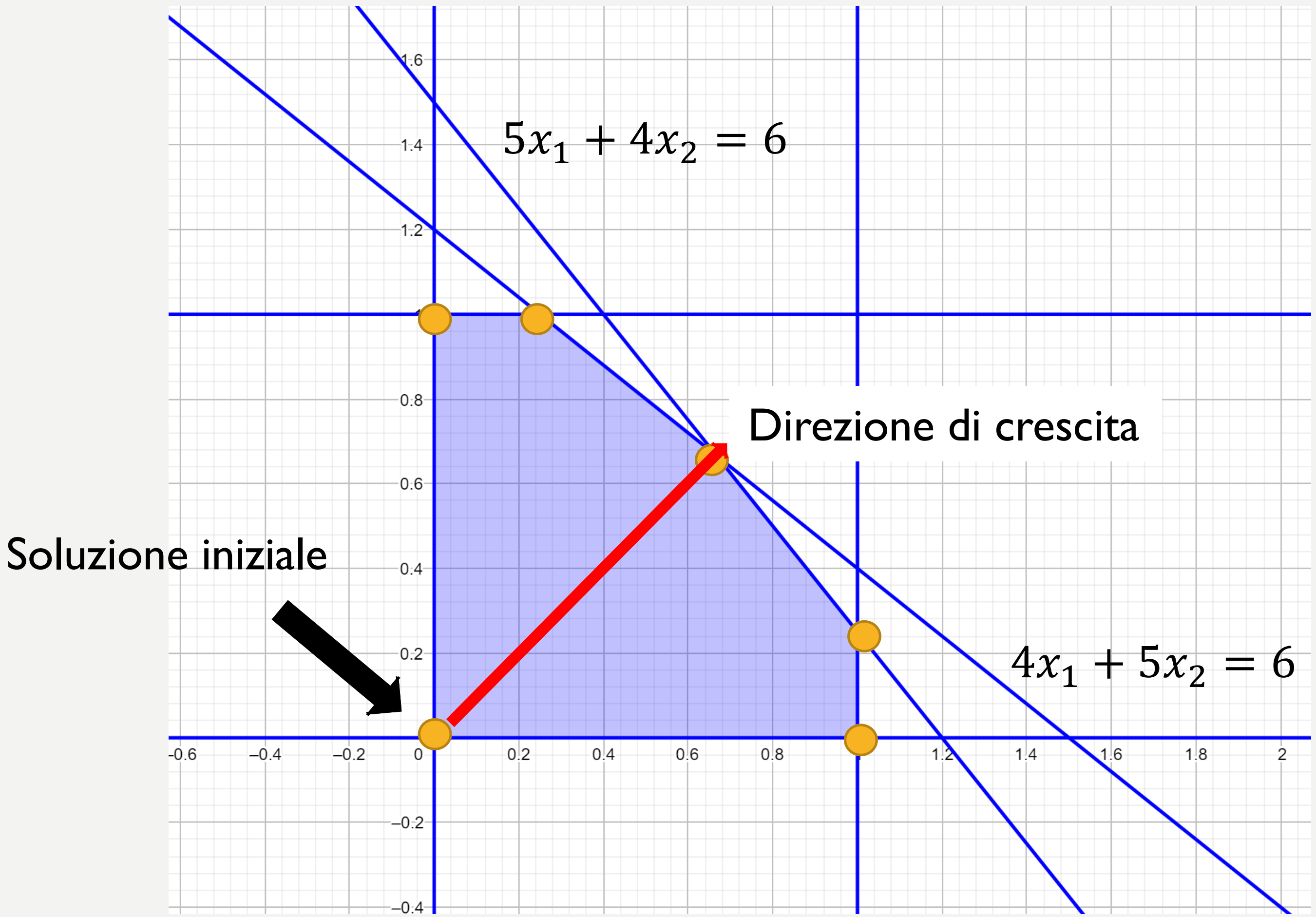
Seconda strada

$$O = (0,0) \qquad z = 0$$

$$A = (1,0) \qquad z = 1$$

$$B = \left(1, \frac{1}{4}\right) \qquad z = \frac{5}{4}$$

$$C = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad z = \frac{4}{3}$$



- Il punto di ottimo è il vertice $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e la soluzione ottima del problema originale è 6000

Simplesso algebrico/tabellare

Provate ad eseguire a questo punto il metodo del simplesso per questo problema tenendo conto che:

- L'origine è un vertice ammissibile del problema
- Il numero di iterazioni del simplesso saranno 3 sia che scegliate un percorso che l'altro