Esercitazione 4b: Metodo del Simplesso (argomenti avanzati)

Esercizio 1

Si risolva in forma grafica e tramite algoritmo del simplesso tabellare il seguente modello di programmazione lineare:

$$\begin{gathered}\max z = 3x_1 + 6x_2 \\ \text{s. t.: } x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.\end{gathered}$$

Esercizio 2

Ripetere l'esercizio precedente con l'aggiunta del vincolo $x_1 + x_2 \geq 4$.

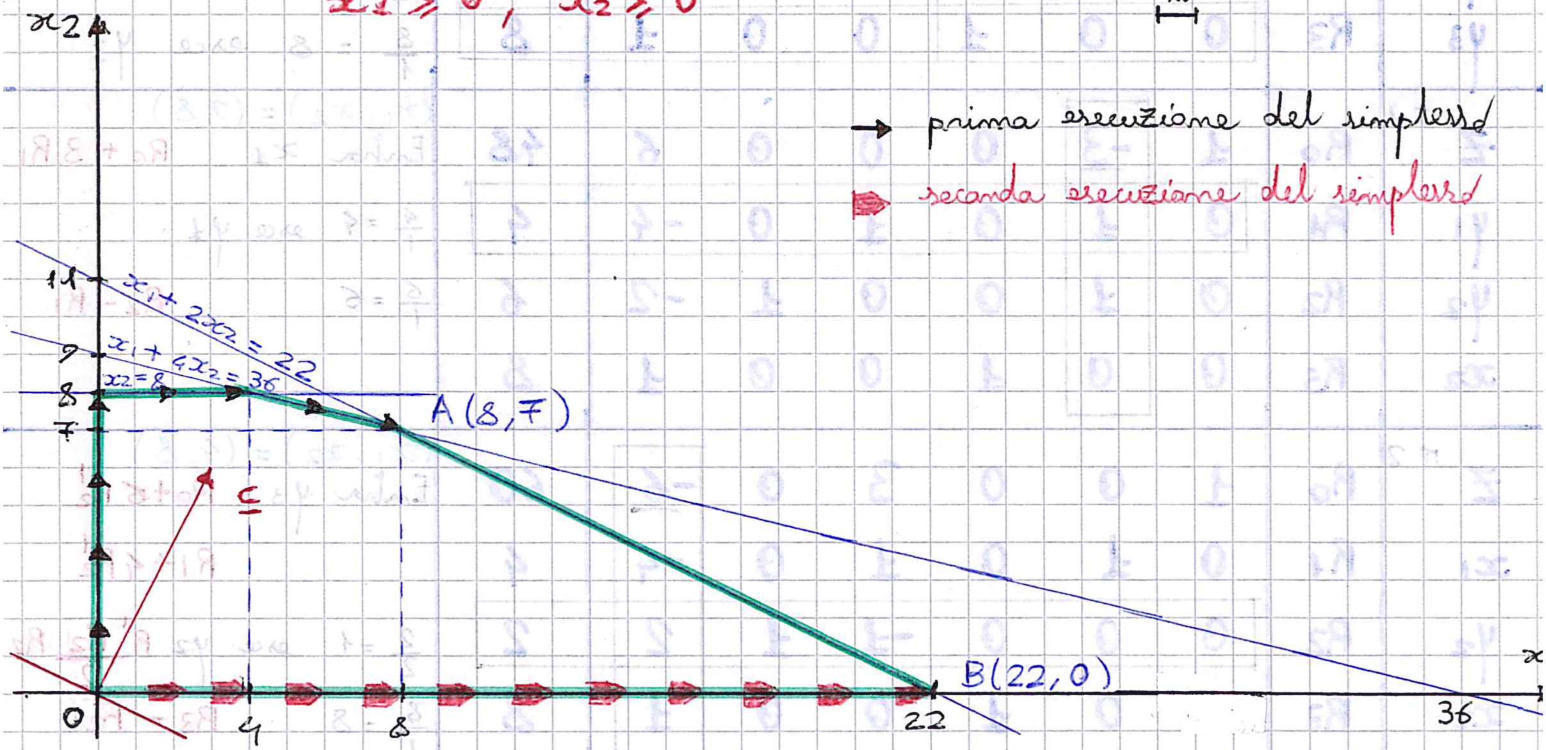
Esercizio 3

Risolvere graficamente e tramite algoritmo del simplesso il seguente modello di programmazione linare:

$$\begin{gathered}\max z = x_1 + x_2 \\ \text{s. t.: } -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.\end{gathered}$$

$$\max \quad 3x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.:} \quad x_1 + 4x_2 &\le 36 \\ x_1 + 2x_2 &\le 22 \\ x_2 &\le 8 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



Dalla rappresentazione grafica osserviamo che la retta isoprofitto corrispondente al più grande valore di z ammissibile contiene tutto il segmento AB. Pertanto tutti i punti di tale segmento sono soluzioni ottime.

$$\begin{aligned} z - 3x_1 - 6x_2 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + y_1 &= 36 \\ x_1 + 2x_2 + y_2 &= 22 \\ x_2 + y_3 &= 8 \end{aligned}$$

La forma standard qua sopra riportata è il punto di partenza per l'algoritmo del simplesso.

BASE	RIGA	Z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	NOTI	NOTE
IT 0									
Z	R_0	1	-3	$\boxed{-6}$	0	0	0	0	$(x_1,x_2)=(0,0)$ R_0+6R_3 Entra in base x_2 (COSTO PIÙ NEGATIVO)
y_1	R_1	0	1	4	1	0	0	36	$\frac{36}{4}=9$ R_1-4R_3
y_2	R_2	0	1	2	0	1	0	22	$\frac{22}{2}=11$ R_2-2R_3
y_3	R_3	0	0	1	0	0	1	8	$\frac{8}{1}=8$ esce y_3
IT 1									
Z	R_0	1	$\boxed{-3}$	0	0	0	6	48	$(x_1,x_2)=(0,8)$ Entra x_1 R_0+3R_1
y_1	R_1	0	1	0	1	0	-4	4	$\frac{4}{1}=4$ esce y_1
y_2	R_2	0	1	0	0	1	-2	6	$\frac{6}{1}=6$ R_2-R_1
x_2	R_3	0	0	1	0	0	1	8	
IT 2									
Z	R_0	1	0	0	3	0	$\boxed{-6}$	60	$(x_1,x_2)=(4,8)$ Entra y_3 R_0+6R_2'
x_1	R_1	0	1	0	1	0	-4	4	R_1+4R_2'
y_2	R_2	0	0	0	-1	1	2	2	$\frac{2}{2}=1$ esce y_2 $R_2':=\frac{1}{2}R_2$
x_2	R_3	0	0	1	0	0	1	8	$\frac{8}{1}=8$ R_3-R_2'
IT 3									
Z	R_0	1	0	0	0	3	0	66	$(x_1,x_2)=(8,7)$
x_1	R_1	0	1	0	-1	2	0	8	
y_3	R_2	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	
x_2	R_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	7	

Otteniamo la soluzione di base ottima $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*)^T = (8, 7, 0, 0, 1)^T$, cui corrisponde il vertice $A(8,7)$. Il massimo vale 66.

BASE	RIGA	Z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	NOTI	NOTE
IT 0									
Z	R_0	1	-3	-6	0	0	0	0	$(x_1, x_2) = (0,0)$ Entra x_1 $R_0 + 3R_2$
y_1	R_1	0	1	4	1	0	0	36	$\frac{36}{1} = 36$ $R_1 - R_2$
y_2	R_2	0	1	2	0	1	0	22	$\frac{22}{1} = 22$ esce y_2
y_3	R_3	0	0	1	0	0	1	8	
IT 1									
Z	R_0	1	0	0	0	3	0	66	$(x_1, x_2) = (22,0)$
y_1	R_1	0	0	2	1	-1	0	14	
x_1	R_2	0	1	2	0	1	0	22	
y_3	R_3	0	0	1	0	0	1	8	

Otteniamo la soluzione di base ottima $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*)^T = (22, 0, 102, 0, 8)^T$, cui corrisponde il vertice $B(22, 0)$

OSSERVAZIONE I

Nella prima esecuzione abbiamo adottato la logica di far entrare in base la variabile più promettente, ossia quella col tasso di miglioramento più alto (vale a dire x_2 nel primo tableau con tasso di miglioramento pari a 6, ove il segno meno nel tableau è dovuto il fatto di scrivere la funzione obiettivo di partenza $Z = 3x_1 + 6x_2$ come $Z - 3x_1 - 6x_2 = 0$). Con questa logica abbiamo trovato una soluzione ottima in tre iterazioni.

Viceversa con la seconda logica scegliendo di far entrare in base la variabile meno promettente, ossia quella col tasso di miglioramento più basso, otteniamo una soluzione ottima in una sola iterazione!

Il motivo di questa apparente contraddizione si spiega

nel fatto che i coefficienti nella riga R_0 del tableau indicano dei miglioramenti relativi e non assoluti. Si parla infatti di tassi di miglioramento.
Detto r_i il coefficiente negativo nella riga R_0 del tableau associato ad una variabile fuori base x_i, se x_i passa da 0 (poiché è fuori base) ad un valore $\varepsilon > 0$, allora la funzione obiettivo aumenta di $|r_i|\varepsilon$ e non soltanto di $|r_i|$.
Nell'esecuzione 1 del simplesso, scegliendo di far entrare in base la variabile x_2 (poiché ha un tasso di miglioramento pari a 6, maggiore di quello relativo a x_1), vediamo che per la regola del minimo rapporto può aumentare da 0 fino al più 8 (valore che fa uscire y_3 dalla base). Pertanto la funzione obiettivo passa da 0 a $0 + 6 \cdot 8 = 48$, come confermato dal tableau relativo alla prima iterazione dell'esecuzione 1.
Viceversa nell'esecuzione 2 del simplesso, scegliendo di far entrare in base la variabile x_1, pur avendo questa il tasso di miglioramento più basso, per la regola del minimo rapporto può cambiare da 0 fino a 22 (valore che fa uscire y_2 dalla base), con un incremento della funzione obiettivo da 0 a
$0 + 3 \cdot 22 = 66 > 48$.
Pertanto possiamo affermare che

> La scelta di far entrare in base la variabile con il tasso di miglioramento più alto NON assicura un numero ridotto di iterazioni dell'algoritmo.

OSSERVAZIONE II

Notiamo che i due tableau finali sono diversi. Questo è dovuto al fatto che abbiamo un'infinità di soluzioni ottime in quanto la linea isoprofitto della funzione obiettivo corrispondente al massimo contiene tutto il segmento AB.

Mostriamo innanzitutto che tutti i punti del segmento AB danno lo stesso valore in funzione obiettivo.

La retta contenente il segmento AB ha equazione $x_1 + 2x_2 = 22$, che si può scrivere come $x_1 = 22 - 2x_2$. In forma parametrica diventa

$$\begin{cases} x_1 = 22 - 2t \\ x_2 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

mentre il segmento AB si può scrivere come

$$\begin{cases} x_1 = 22 - 2t \\ x_2 = t \end{cases}, \quad t \in [0, 7]$$

Passando alla funzione obiettivo, abbiamo che per ogni punto del vertice AB, essa vale

$$z = 3x_1 + 6x_2 = 3(22 - 2t) + 6t =$$
$$= 66 - 6t + 6t = 66,$$

come del resto trovato nei due tableau finali.

Mostriamo anche come dal tablea finale dell'esecuzione 1, cui corrisponde il vertice $(8, 7)$, sia possibile pervenire al tableau finale dell'esecuzione 2, cui corrisponde il vertice $(22, 0)$.

Riportiamo, per comodità, il tableau finale dell'esecuzione 1.

BASE	RIGA	Z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	NOTI	NOTE
IT3									$(x_1, x_2) = (8, 7)$
Z	R_0	1	0	0	0	3	0	66	
x_1	R_1	0	1	0	-1	2	0	8	
y_3	R_2	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	
x_2	R_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	7	

Non ci sono variabili fuori base con tassi di miglioramento propizi. In particolare le variabili fuori base sono y_1 con tasso di miglioramento 0 e y_2 con tasso di miglioramento -3. Si ricordi che la funzione obiettivo appare nel tableau scritta come $Z + 3y_2 = 66$, ossia $Z = 66 - 3y_2$, pertanto l'ingresso in base di y_2 con un valore $\varepsilon > 0$, comporta un peggioramento della funzione obiettivo pari a -3ε, passando quindi dal valore ottimale $Z^* = 66$ al valore non ottimale $Z = 66 - 3\varepsilon$. Questa scelta, peraltro, significherebbe ritornare al vertice $A(4, 8)$ (iterazione 2 dell'esecuzione 1). Si osservi che la funzione obiettivo si può pure scrivere come $Z = 0y_1 - 3y_2$, ove è stato esplicitato anche il contributo dell'altra variabile fuori base, y_1. Il contributo di y_1 è 0. Questo vuol dire che facendo entrare y_1 in base, la funzione obiettivo non cambierà, pervenendo ad un'altra soluzione ottima.

È intuitivo pensare che questa soluzione corrisponderà proprio al vertice $B(22, 0)$.

Vediamo allora cosa succede se dall'ultimo tableau dell'esecuzione 1 facciamo entrare in base la variabile y_1.

IN BASE	RIGA	Z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	TERMINI NOTI	NOTE
IT 3									
Z	R_0	1	0	0	0	3	0	66	$(x_1, x_2) = (8, 7)$
x_1	R_1	0	1	0	-1	2	0	8	$R_1 := R_1 + R_3'$
y_3	R_2	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$R_2 := R_2 + \frac{1}{2} R_3'$
x_2	R_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	7	$\frac{7}{\frac{1}{2}} = 14$ esce x_2 $R_3' := 2R_3$
IT 4									
Z	R_0	1	0	0	0	3	0	66	$(x_1, x_2) = (22, 0)$
x_1	R_1	0	1	2	0	1	0	22	
y_3	R_2	0	0	1	0	0	1	8	
y_1	R_3	0	0	2	1	-1	0	14	

Che, a parte l'ordine delle righe, è il tableau finale dell'esecuzione 2 del simplesso!
Ovviamente è possibile dal tableau finale dell'esecuzione 2 del simplesso pervenire al tableau finale dell'esecuzione 1 nel seguente modo:

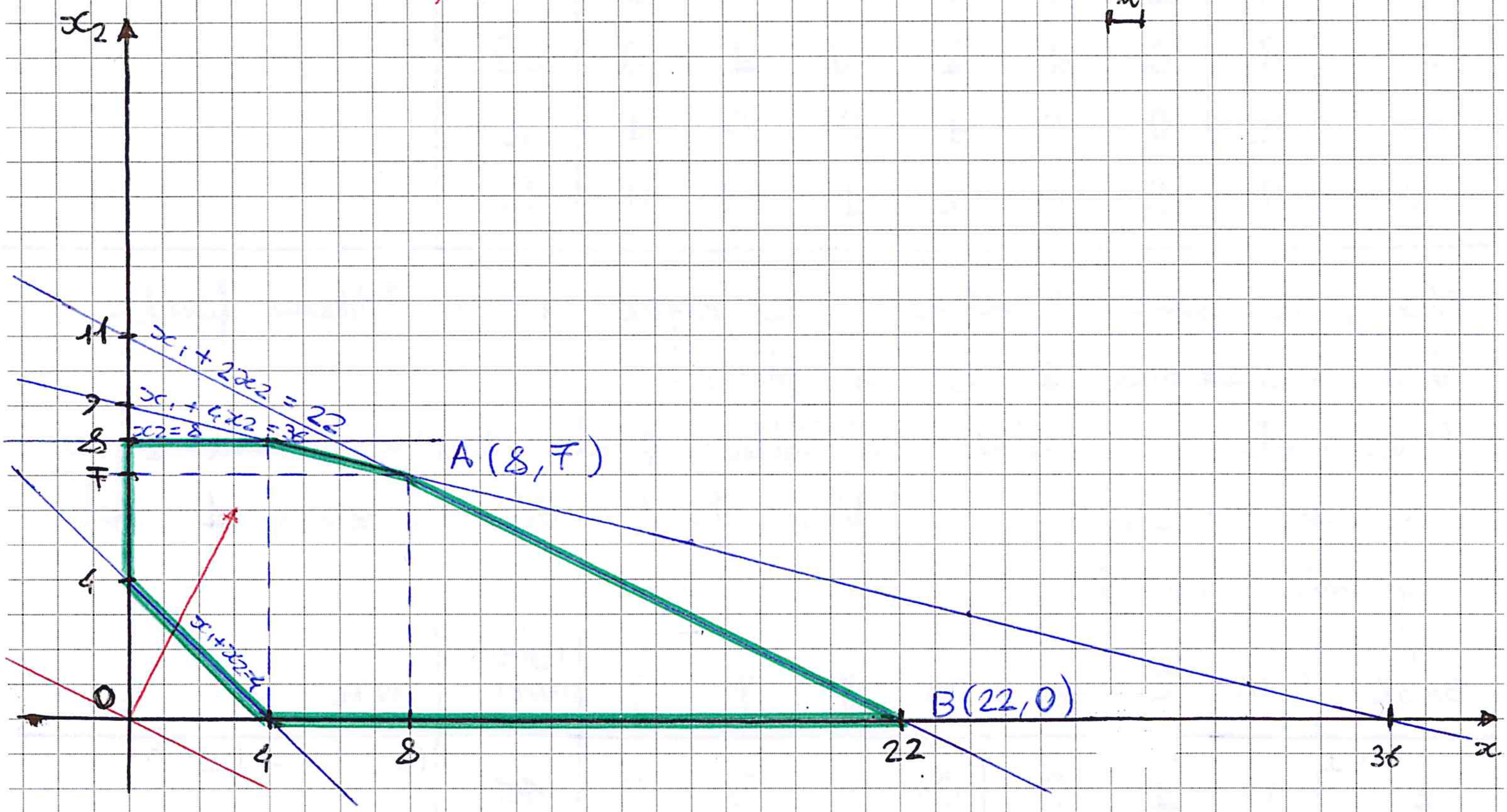
IN BASE	RIGA	Z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	TERMINI NOTI	NOTE
IT 1									
Z	R_0	1	0	0	0	3	0	66	$(x_1, x_2) = (22, 0)$
y_1	R_1	0	0	2	1	-1	0	14	$\frac{14}{2} = 7$ esce y_1 $R_1' := \frac{1}{2} R_1$
x_1	R_2	0	1	2	0	1	0	22	$\frac{22}{2} = 11$ $R_2 := R_2 - 2R_1'$
y_3	R_3	0	0	1	0	0	1	8	$\frac{8}{1} = 8$ $R_3 := R_3 - R_1'$
Z	R_0	1	0	0	0	3	0	66	$(x_1, x_2) = (8, 7)$
x_2	R_1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	7	
x_1	R_2	0	1	0	-1	2	0	8	
y_3	R_3	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	

che, a parte l'ordine delle righe, coincide col tableau finale dell'esecuzione 2.
Vediamo ora cosa succede aggiungendo al modello il vincolo

$x_1 + x_2 \geq 4$. Esso diventa:

$$\max \quad 3x_1 + 6x_2$$

$$\text{s.t.:} \quad \begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 36 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 22 \\ x_2 &\leq 8 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Anche in questo caso la rappresentazione grafica mostra che tutti i punti del lato AB del politopo della regione ammissibile sono soluzioni ottime in quanto la retta isoprofitto associata al più grande valore ammissibile di funzione obiettivo z contiene il lato AB.

Passiamo alla forma standard del simplesso.

Mentre i vincoli di $\leq$ richiedono l'impiego di variabili di slack, quello di $\geq$ richiede l'impiego di una variabile di surplus.

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max & 3x_1 & + 6x_2 & & & & & & \\
s.t.: & x_1 & + 4x_2 & + y_1 & & & & = & 36 \\
 & x_1 & + 2x_2 & & + y_2 & & & = & 22 \\
 & & x_2 & & & + y_3 & & = & 8 \\
 & x_1 & + x_2 & & & & - s & = & 4 \\
 & \multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, s \geq 0}
\end{array}
$$

Osserviamo che non si hanno abbastanza variabili di slack per formare la matrice identità e far partire il simplesso con una soluzione di base ammissibile. Per risolvere questo problema abbiamo a disposizione due strade, proposte qui di seguito.

METODO I : BIG M

Si completa la matrice identità introducendo opportune variabili aggiuntive con coefficiente $-M$ in funzione obiettivo, con M sufficientemente grande.

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max & 3x_1 & + 6x_2 & & & & - My_4 & & & \\
s.t.: & x_1 & + 4x_2 & + y_1 & & & & & = & 36 \\
 & x_1 & + 2x_2 & & + y_2 & & & & = & 22 \\
 & & x_2 & & & + y_3 & & & = & 8 \\
 & x_1 & + x_2 & & & & + y_4 & - s & = & 4 \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, s \geq 0}
\end{array}
$$

Osserviamo che la variabile y_4 NON È in base in quanto il suo coefficiente in funzione obiettivo non è nullo. Occorre quindi rimpiazzare la riga R_0 associata alla funzione obiettivo con $R_0 + MR_4$, ove R_4 è la riga ove è stata aggiunta la variabile y_4. Questa operazione viene svolta all'inizio del simplesso in forma tabellare riportato nelle prossime pagine.

IN BASE	RIGA	z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	s	TERMINI NOTI	NOTE
INIZIO	R_0	1	-3	-6	0	0	0	M	0	0	$R_0 - M \cdot R_4$
	R_1	0	1	4	1	0	0	0	0	36	
	R_2	0	1	2	0	1	0	0	0	22	
	R_3	0	0	1	0	0	1	0	0	8	
	R_4	0	1	1	0	0	0	1	-1	4	
$\pi 0$ z	R_0	1	$\boxed{-3-M}$	$-6-M$	0	0	0	0	M	$-4M$	$R_0 + (3+M) R_4$
y_1	R_1	0	1	4	1	0	0	0	0	36	$\frac{36}{1} = 36$ $R_1 - R_4$
y_2	R_2	0	1	2	0	1	0	0	0	22	$\frac{22}{1} = 22$ $R_2 - R_4$
y_3	R_3	0	0	1	0	0	1	0	0	8	
y_4	R_4	0	1	1	0	0	0	1	-1	4	$\frac{4}{1} = 4$ esce y_4
$\pi 1$ z	R_0	1	0	$\boxed{-3}$	0	0	0	$3+M$	-3	12	$(x_1, x_2) = (4, 0)$ $R_0 + 3 R_4$
y_1	R_1	0	0	3	1	0	0	-1	1	32	$\frac{32}{3}$ $R_1 - 3 R_4$
y_2	R_2	0	0	1	0	1	0	-1	1	18	$\frac{18}{1} = 18$ $R_2 - R_4$
y_3	R_3	0	0	1	0	0	1	0	0	8	$\frac{8}{1} = 8$ $R_3 - R_4$
x_1	R_4	0	1	1	0	0	0	1	-1	4	$\frac{4}{1} = 4$ esce x_1

IN BASE	RIGA	z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	s	TERMINI NOTI	NOTE
IT 2											
z	R_0	1	3	0	0	0	0	6+M	-6	24	$(x_1, x_2) = (0, 4)$ $R_0 + 6R_3$
y_1	R_1	0	-3	0	1	0	0	-4	4	20	$\frac{20}{4} = 5$ $R_1 - 4R_3$
y_2	R_2	0	-1	0	0	1	0	-2	2	14	$\frac{14}{2} = 7$ $R_2 - 2R_3$
y_3	R_3	0	-1	0	0	0	1	-1	1	4	$\frac{4}{1} = 4$ esce y_3
x_2	R_4	0	1	1	0	0	0	1	-1	4	$R_4 + R_3$
IT 3											
z	R_0	1	-3	0	0	0	6	M	0	48	$(x_1, x_2) = (0, 8)$ $R_0 + 3R_1$
y_1	R_1	0	1	0	1	0	-4	0	0	4	$\frac{4}{1} = 4$ esce y_1
y_2	R_2	0	1	0	0	1	-2	0	0	6	$\frac{6}{1} = 6$ $R_2 - R_1$
s	R_3	0	-1	0	0	0	1	-1	1	4	$R_3 + R_1$
x_2	R_4	0	0	1	0	0	1	0	0	8	
IT 4											
z	R_0	1	0	0	3	0	-6	M	0	60	$(x_1, x_2) = (4, 8)$ $R_0 := R_0 + 6R_2'$
x_1	R_1	0	1	0	1	0	-4	0	0	4	$R_1 := R_1 + 4R_2'$
y_2	R_2	0	0	0	-1	1	2	0	0	2	$\frac{2}{2} = 1$ esce y_2 $R_2' := R_2/2$
s	R_3	0	0	0	1	0	-3	-1	1	8	$R_3 := R_3 + 3R_2'$
x_2	R_4	0	0	1	0	0	1	0	0	8	$\frac{8}{1} = 8$ $R_4 := R_4 - R_2'$

IN BASE	RIGA	z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	s	TERMINI NOTI	NOTE
IT 5											$(x_1, x_2) = (8, 7)$
z	R_0	1	0	0	0	3	0	M	0	66	
x_1	R_1	0	1	0	-1	2	0	0	0	8	$R_1 := R_1 + R_4'$
y_3	R_2	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1	$R_2 := R_2 + \frac{1}{2} R_4'$
s	R_3	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	-1	1	11	$R_3 := R_3 + \frac{1}{2} R_4'$
x_2	R_4	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	7	$\frac{7}{\frac{1}{2}} = 14$ esce x_2 $R_4' := 2 R_4$

La soluzione trovata è ottima e corrisponde al vertice A(8, 7). Anche in questo caso si può fare entrare y_1 in base e pervenire all'altro vertice ottimo: B(22, 0)

IN BASE	RIGA	z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	s	TERMINI NOTI	NOTE
IT 6											$(x_1, x_2) = (22, 0)$
z	R_0	1	0	0	0	3	0	M	0	66	
x_1	R_1	0	1	2	0	1	0	0	0	22	
y_3	R_2	0	0	1	0	0	1	0	0	8	
s	R_3	0	0	1	0	1	0	-1	1	18	
y_1	R_4	0	0	2	1	-1	0	0	0	14	

METODO II: FASE I / FASE II

Si completa la matrice identità introducendo opportune variabili aggiuntive con coefficiente 1 in una nuova funzione obiettivo da minimizzare. Tutti i coefficienti delle altre variabili in funzione obiettivo vengono posti a zero.

min y_4

s.t.: $x_1 + 4x_2 + y_1 = 36$

$x_1 + 2x_2 + y_2 = 22$

$x_2 + y_3 = 8$

$x_1 + x_2 + y_4 - s = 4$

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, s \geq 0$

La risoluzione di questo modello (fase I) dà una soluzione di base ammissibile per la partenza del simplesso (fase II).

min y_4 $\longrightarrow$ max $Z = -y_4$. Si parte quindi con un tableau avente in R_0 dei coefficienti relativi a $Z + y_4 = 0$

FASE I

In base	Riga	z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	s	Termini noti	Note
INIZIO											
	R_0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	$R_0 - R_4$
	R_1	0	1	4	1	0	0	0	0	36	
	R_2	0	1	2	0	1	0	0	0	22	
	R_3	0	0	1	0	0	1	0	0	8	
	R_4	0	1	1	0	0	0	1	−1	4	
IT 0											
z	R_0	1	−1	−1	0	0	0	0	1	−4	$R_0 + R_4$
y_1	R_1	0	1	4	1	0	0	0	0	36	$\frac{36}{1} = 36$ $R_1 - R_4$
y_2	R_2	0	1	2	0	1	0	0	0	22	$\frac{22}{1} = 22$ $R_2 - R_4$
y_3	R_3	0	0	1	0	0	1	0	0	8	
y_4	R_4	0	1	1	0	0	0	1	−1	4	$\frac{4}{1} = 4$ esce y_4
IT 1											$(x_1, x_2) = (4, 0)$
z	R_0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
y_1	R_1	0	0	3	1	0	0	−1	1	32	
y_2	R_2	0	0	1	0	1	0	−1	1	18	
y_3	R_3	0	0	1	0	0	1	0	0	8	
x_1	R_4	0	1	1	0	0	0	1	−1	4	

A questo punto si può eliminare la variabile y_4, ripristinare la funzione obiettivo originale ed inserire nel nuovo tableau la soluzione fornita dall'ultimo tableau della fase I.
La funzione obiettivo originale è $\max 3x_1 + 6x_2$, che nel nuovo tableau comparirà coi coefficienti relativi all'equazione $z - 3x_1 - 6x_2 = 0$.

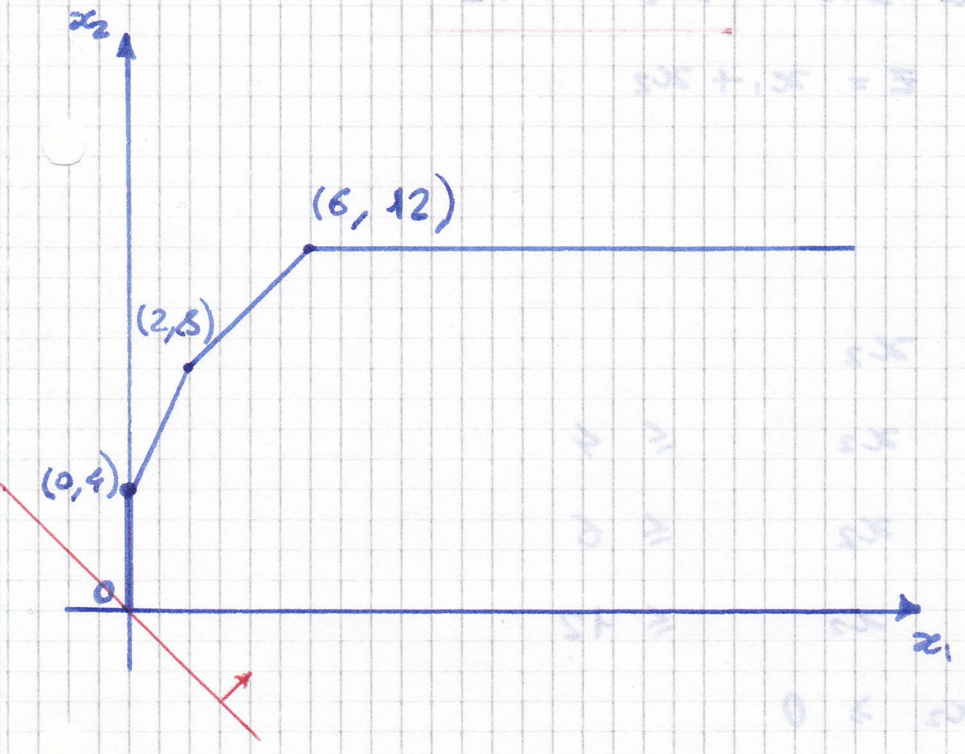
FASE II

IN BASE / RIGA		z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	s	TERMINI NOTI	NOTE	
	R_0	1	-3	-6	0	0	0	0	0		$R_0 + 3R_4$
	R_1	0	0	3	1	0	0	1	32		
	R_2	0	0	1	0	1	0	1	18		
	R_3	0	0	1	0	0	1	0	8		
	R_4	0	1	1	0	0	0	-1	4		
	IT 0									$(x_1, x_2) = (4, 0)$	
z	R_0	1	0	-3	0	0	0	-3	12		$R_0 + 3R_2$
y_1	R_1	0	0	3	1	0	0	1	32	$\frac{32}{1} = 32$	$R_1 - R_2$
y_2	R_2	0	0	1	0	1	0	1	18	$\frac{18}{1} = 18$	esce y_2
y_3	R_3	0	0	1	0	0	1	0	8		
x_1	R_4	0	1	1	0	0	0	-1	4		$R_4 + R_2$
	IT 1									$(x_1, x_2) = (22, 0)$	
z	R_0	1	0	0	0	3	0	0	66		
y_1	R_1	0	0	2	1	-1	0	0	14	$\frac{14}{2} = 7$	esce y_1; $R_1' := \frac{1}{2} R_1$
s	R_2	0	0	1	0	1	0	1	18	$\frac{18}{1} = 18$	$R_2 := R_2 - R_1'$
y_3	R_3	0	0	1	0	0	1	0	8	$\frac{8}{1} = 8$	$R_3 := R_3 - R_1'$
x_1	R_4	0	1	2	0	1	0	0	22	$\frac{22}{2} = 11$	$R_4 := R_4 - 2R_1'$

Anche in questo caso facendo entrare in base x_2 passiamo dal vertice ottimo $B(22, 0)$ al vertice ottimo $A(8, 7)$.

IN BASE / RIGA		z	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	s	TERMINI NOTI	NOTE
	IT 2									$(x_1, x_2) = (8, 7)$
z	R_0	1	0	0	0	3	0	0	66	
x_2	R_1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	7	
s	R_2	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	11	
y_3	R_3	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1	
x_1	R_4	0	1	0	-1	2	0	0	8	

Si osservi infine che, a parte la colonna relativa alla variabile y_4 non presente nei tableau del simplesso con tecnica fase I/fase II, i tableau delle soluzioni ottime forniti dai due metodi coincidono.



Equazione retta per $(0, 4)$ e $(2, 8)$:

$$\frac{y-4}{8-4} = \frac{x-0}{2-0}$$

$$\frac{y-4}{4} = \frac{x}{2}$$

$$y - 4 = 2x$$

$$y = 2x + 4$$

Il vincolo associato è: $2x_1 - x_2 \geq -4$

ossia $\boxed{-2x_1 + x_2 \leq 4}$

Equazione retta per $(2, 8)$ e $(6, 12)$:

$$\frac{y-8}{12-8} = \frac{x-2}{6-2}$$

$$\frac{y-8}{4} = \frac{x-2}{4}$$

$$y - 8 = x - 2$$

$$y = x + 6$$

Il vincolo associato è: $x_1 - x_2 \geq -6$

ossia $\boxed{-x_1 + x_2 \leq 6}$

Gli altri vincoli funzionali sono: $\boxed{x_2 \leq 12}$

Funzione obiettivo: $\max z = x_1 + x_2$

$$x_2 = -x_1 + z$$
$$y = -x + z$$

$$\begin{array}{llcccl}
\max & z = & x_1 & + & x_2 & \\
\text{s.t.} & & -2x_1 & + & x_2 & \leq 4 \\
& & -x_1 & + & x_2 & \leq 6 \\
& & & & x_2 & \leq 12 \\
& & & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|cccccccc}
 & z & - \underline{x_1} & - & x_2 & & & & = 0 \\
y_1 & & -2x_1 & + & x_2 & + y_1 & & & = 4 \\
y_2 & & -x_1 & + & x_2 & & + y_2 & & = 6 \\
y_3 & & & & x_2 & & & + y_3 & = 12
\end{array}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Base: (y_1, y_2, y_3)

Sol: $(0, 0, 4, 6, 12)$

Entra in base: x_1

Se $x_1 = \theta \geq 0$:

$$\begin{cases} y_1 = 4 + 2\theta \geq 0 \\ y_2 = 6 + \theta \geq 0 \\ y_3 = 12 \end{cases}$$

$\theta \geq 0$ indefinitivamente; problema illimitato