

➤ Un barman vuole preparare almeno 10 litri di Cuba Libre (rum chiaro, Cola e limone) **nel rispetto della legge**.

➤ La disponibilità ed il costo dei tre diversi ingredienti è indicata in tabella

Ingredienti	Disponibilità massima	Costo x litro
Rum chiaro	2 l	15 €
Cola	15 l	2 €
Limone	3 l	1.5 €

➤ Le dosi ideali sono: almeno il 25% di rum chiaro e il 50% di Cola e non più del 10% di limone



VARIABILI

x_R : quantità di rum (in litri)

x_C : quantità di cola (in litri)

x_L : quantità di limone (in litri)

Vincolo implicito di non negatività delle variabili

$$x_R \geq 0$$

$$x_C \geq 0$$

$$x_L \geq 0$$

Almeno 10 l di cuba libre:

$$x_R + x_C + x_L \geq 10 \text{ (litri)}$$

Almeno il 25% di rum chiaro:

$$\frac{x_R}{x_R + x_C + x_L}$$

percentuale di rum

$$\frac{x_R}{x_R + x_C + x_L} \geq 25\%$$

$$\frac{x_R}{x_R + x_C + x_L} \geq 0.25$$

rum

$$\frac{x_C}{x_R + x_C + x_L} \geq 0.5$$

cosa gla:

$$\frac{x_L}{x_R + x_C + x_L} \leq 0.1$$

lineare

Modello finale:

$$\min Z = 15x_R + 2x_C + 1.5x_L$$

✓

LEGENDA

✓ lineare

✗ non lineare

s.t.:
(subject to)

$$\frac{x_R}{x_R + x_C + x_L} \geq 0.25$$

✗

$$\frac{x_C}{x_R + x_C + x_L} \geq 0.5$$

✗

$$\frac{x_L}{x_R + x_C + x_L} \leq 0.1$$

✗

$$x_R + x_C + x_L \geq 10$$

✓

$$x_R \leq 2$$

✓

$$x_C \leq 15$$

✓

$$x_L \leq 3$$

✓

$$x_R \geq 0, \quad x_C \geq 0, \quad x_L \geq 0$$

✓

✓

✓

problema di ottimizzazione

$$Z = f(x)$$

min / max

$$\text{s.t.: } q_i(\underline{x}) \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \end{pmatrix} 0 \quad \forall i \in I$$

oppure =
oppure $\leq$

Se la funzione obiettivo (f.o.) ed i vincoli sono lineari, si parla di problema di programmazione lineare

$\min / \max$

$$z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$\text{s.t.: } \underline{a}_i^T \underline{x} - b_i \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \end{pmatrix} 0 \quad \forall i \in I$$

$$\cancel{5} \cdot \frac{x - 2}{\cancel{5}} = 1 \cdot 5$$

$$3 > 2$$

$$2 \cdot 3 > 2 \cdot 2$$

$$-2 \cdot 3 > -2 \cdot 2$$

$$6 > 4 \quad \checkmark$$

$$-6 > -4 \quad \text{NO}$$

$$\frac{x_c}{x_R + x_c + x_L} \geq 0.5$$

Posso moltiplicare membro a membro per

$x_R + x_C + x_L$ a patto che:

1) $x_R + x_C + x_L \neq 0$

sì perché $x_R + x_C + x_L \geq 10$

deve essere

2) $x_R + x_C + x_L > 0$ per conservare il verso della disuguaglianza

sì perché è $x_R + x_C + x_L \geq 10$

$$\frac{x_C}{x_R + x_C + x_L} \geq 0.5$$

lo trasformo in:

$$x_C \geq 0.5 (x_R + x_C + x_L) \quad \checkmark$$

$$\min Z = 15x_R + 2x_C + 1.5x_L \quad \checkmark$$

$$x_R \geq 0.25 (x_R + x_C + x_L) \quad \checkmark$$

$$x_C \geq 0.5 (x_R + x_C + x_L) \quad \checkmark$$

$$x_L \leq 0.1 (x_R + x_C + x_L) \quad \checkmark$$

$$x_R + x_C + x_L \geq 10 \quad \checkmark$$

$$x_R \leq 2 \quad \checkmark$$

$$x_c \leq 15 \quad \checkmark$$

$$x_L \leq 3 \quad \checkmark$$

$$x_R \geq 0, \quad x_c \geq 0, \quad x_L \geq 0 \quad \checkmark$$

8	.	.		.	.	.		.	.	.
.	.	3		6	.	.		.	.	.
.	7	.		.	9	.		2	.	.
-----+-----+-----										
.	5	.		.	.	7		.	.	.
.	.	.		.	4	5		7	.	.
.	.	.		1	.	.		.	3	.
-----+-----+-----										
.	.	1		.	.	.		.	6	8
.	.	8		5	.	.		.	1	.
.	9	.		.	.	.		4	.	.

	1	2	3		9
1	8				
2					
3					
⋮					
9					

i : indice delle righe

$$i \in \{1, \dots, 9\}$$

j : indice delle colonne

$$j \in \{1, \dots, 9\}$$

$$x_{k,i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se nella cella } (i,j) \text{ c'è la cifra } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$k \in \{1, \dots, 9\}$$

Valori binari
o booleane

Abbiamo $9 \times 9 \times 9 = 9^3$ variabili
 $k \quad i \quad j$

$$x_{8,1,1} = 1$$

$$x_{3,2,2} = 1$$

$$x_{3,2,3} = \underline{1}$$

eccetera per tutte le celle che contengono già dei numeri

Ad es. il 7 deve comparire una volta lungo la prima riga

$$x_{7,1,1} + x_{7,1,2} + x_{7,1,3} + \dots + x_{7,1,9} = 1$$

$$\sum_{j=1}^9 x_{k,i,j} = 1$$

$$\forall k \in \{1, \dots, 9\},$$

$$\forall i \in \{1, \dots, 9\}$$

$$\sum_{i=1}^9 x_{k,i,j} = 1$$

$$\forall k \in \{1, \dots, 9\},$$

$$\forall j \in \{1, \dots, 9\}$$

Q_1	Q_2	Q_3

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$

Q_1

$$Q_1 = \{(1,1), (1,2), \dots, (3,3)\}$$

$Q_h = \{(i, j) : \text{la cella in posizione } (i, j) \text{ è nel suddetto quadrato}\}$
 $h \in \{1, \dots, p\}$

(1,1)	(1,2)	(1,3)
(2,1)	(2,2)	(2,3)
(3,1)	(3,2)	(3,3)

Q_1

La cifra $\neq$ deve comparire una sola volta in Q_1

$$\begin{aligned}
 &x_{\neq, 1, 1} + x_{\neq, 1, 2} + x_{\neq, 1, 3} + x_{\neq, 2, 1} + x_{\neq, 2, 2} + x_{\neq, 2, 3} + \\
 &+ x_{\neq, 3, 1} + x_{\neq, 3, 2} + x_{\neq, 3, 3} = 1
 \end{aligned}$$

$$\sum_{(i, j) \in Q_h} x_{k, i, j} = 1$$

$$\begin{aligned}
 &\forall h \in \{1, \dots, p\}, \\
 &\forall k \in \{1, \dots, p\}
 \end{aligned}$$

$$\max \quad 1$$

s. t.: