

Formulazione del problema

- La società WYNDOR GLASS & Co. realizza prodotti in vetro di alta qualità tra cui finestre e porte in vetro. Essa possiede tre stabilimenti. Lo Stabilimento 1 produce telai in alluminio, lo Stabilimento 2 produce telai in legno, mentre lo Stabilimento 3 produce il vetro e assembla i prodotti.
- I dirigenti della società hanno deciso di rinnovare la linea di produzione con il lancio di due nuovi prodotti:
 - Prodotto 1: una porta in vetro con intelaiatura in alluminio
 - Prodotto 2: una finestra con intelaiatura in legno
- Il guadagno stimato per i due nuovi prodotti è di 3000\$ e 5000\$ rispettivamente per lotto
- Nella seguente tabella è rappresentato il tempo di produzione richiesto ed il tempo massimo disponibile per lotto nei 3 stabilimenti per i due nuovi prodotti.
- Qual è il tasso di produzione dei due prodotti che massimizza il profitto totale della società, rispettando i vincoli di produzione dei 3 stabilimenti?

Stabilimento	Tempo di produzione richiesto per il Prodotto 1	Tempo di produzione richiesto per il Prodotto 2	Tempo di produzione disponibile
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18

x_1 : quantità di prodotto 1

x_2 : quantità di prodotto 2

$$\max \quad Z = 3000 x_1 + 5000 x_2$$

s.t.:

$$\begin{array}{ll} \text{stabilimento 1:} & x_1 \leq 4 \\ \text{stabilimento 2:} & 2x_2 \leq 12 \\ \text{stabilimento 3:} & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

$$\text{oppure } x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

Riassumendo:

① cuba libre: programmazione lineare
(variabili continue)
F.O. di min

② sudoku: programmazione lineare 0/1 (binaria)
(variabili binarie)
F.O. fittizia

③ Wyndor glass: programmazione lineare intera
(variabili intere)
F.O. di max

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE
in forma standard secondo Hillier e Lieberman

$$\max \quad Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_m x_m$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.:} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m \leq b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mm} x_m \leq b_m \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

D'ora in poi, fino a nuovo ordine, trascureremo il vincolo di interezza:

$$\max \quad Z = \underbrace{C_1}_{3000} x_1 + \underbrace{C_2}_{5000} x_2 + \dots + C_m x_m$$

interessa:

$$\max Z = \overbrace{3000}^{c_1} x_1 + \overbrace{5000}^{c_2} x_2$$

s.t.:

$$\begin{aligned} \text{stabilimento 1: } & \overbrace{1}^{a_{11}} x_1 + \overbrace{0}^{a_{12}} x_2 \leq \overbrace{4}^{b_1} \\ \text{stabilimento 2: } & \overbrace{0}^{a_{21}} x_1 + \overbrace{2}^{a_{22}} x_2 \leq \overbrace{12}^{b_2} \\ \text{stabilimento 3: } & \overbrace{3}^{a_{31}} x_1 + \overbrace{2}^{a_{32}} x_2 \leq \overbrace{18}^{b_3} \end{aligned}$$

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m$$

s.t.:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m &\leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mm} x_m &\leq b_m \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

~~$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$~~
 oppure ~~$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$~~
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Attenzione a non confondere i dati (o parametri) con le variabili

$$\max Z = \overbrace{[3000 \quad 5000]}^{c^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x$$

$$\text{s.t.: } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}}_b$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forma standard secondo Hillier e Lieberman in forma matriciale

$$\max Z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$\text{s.t.: } \underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Forma standard secondo Luenberger (e altri autori):

$$\min \quad \overline{Z} = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_m x_m$$

$$\text{s.t. : } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m = b_2$$

[illegible]

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

Per convenzione, $b_1, b_2, \dots, b_m$ debbono essere non negative.

In forma matricale:

$$\min \quad z = c^T x$$

s.t.: $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Convertire in forma standard (secondo Luenberger):

$$\min \quad x + 2y + 3z$$

→ l. : $2 \leq x+y \leq 3$

$$4 \leq x + z \leq 5$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Attenzione: z è una variabile libera

$$\min \quad x + 2y + 3z$$

$$\text{s.t.: } x + y \geq 2$$

$$x + y \leq 3$$

$$\begin{array}{rcl}
 x + y & & \geq 2 \\
 x + y & & \leq 3 \\
 x & + z & \geq 4 \\
 x & + z & \leq 5 \\
 x & & \geq 0 \\
 y & & \geq 0
 \end{array}$$

$$x + y \geq 2$$

Introduco una variabile di surplus pari alla differenza (che non sarà mai negativa) tra $x+y$ e 2

Quindi la disuguaglianza $x + y \geq 2$ diventa

$$x + y - s_1 = 2$$

$$s_1 \geq 0$$

$$x + y \leq 3 \quad \text{diventa:}$$

$$x + y + w_1 = 3$$

$$w_1 \geq 0$$

variabile di slack che indica quanto manca per arrivare a 3

$$\begin{array}{ll}
 \min & x + 2y + 3z \\
 \text{s.t. :} & x + y \geq 2 \\
 & x + y \leq 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \min & x + 2y + 3z \\
 \text{s.t. :} & x + y - s_1 = 2 \\
 & x + y + w_1 = 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{s.t.:} & x + y & \geq 2 \\
 & x + y & \leq 3 \\
 & x + z & \geq 4 \\
 & x + z & \leq 5 \\
 & x & \geq 0 \\
 & y & \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{s.t.:} & x + y & -s_1 = 2 \\
 & x + y & +w_1 = 3 \\
 & x + z & -s_2 = 4 \\
 & x + z & +w_2 = 5 \\
 & x, y, s_1, s_2, w_1, w_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Gestione di z variabile libera

1° modo: ad es. ricavo z dalla 3^a eq.:

$$z = -x + s_2 + 4 \quad \text{e sostituire ove necessario}$$

ecc...

2° modo: penso a z come se fosse la differenza di due variabili non negative (che chiamo, ad es. u e v).

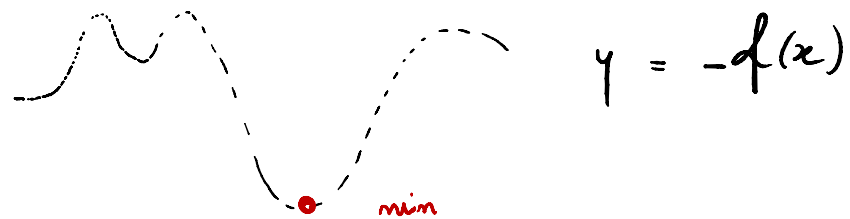
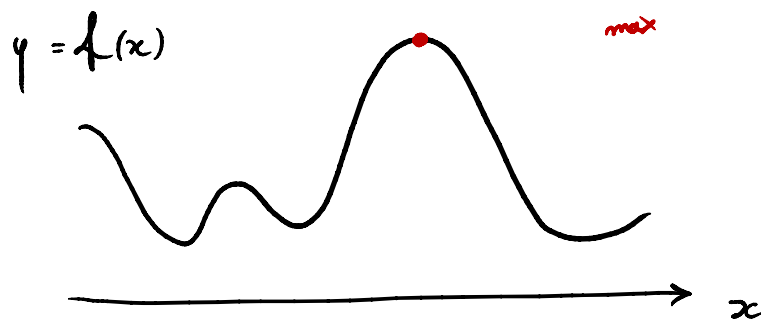
$$z \text{ libera diventa} \quad z = u - v$$

$$u \geq 0, \quad v \geq 0$$

$$\begin{array}{rcl}
 \min & x + 2y + 3z \\
 \text{s.t.:} & x + y & -s_1 = 2 \\
 & x + y & +w_1 = 3 \\
 & x + z & -s_2 = 4 \\
 & x + z & +w_2 = 5 \\
 & x, y, s_1, s_2, w_1, w_2 & \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \min & x + 2y + 3(u - v) \\
 & x + y & -s_1 = 2 \\
 & x + y & +w_1 = 3 \\
 & x + u - v & -s_2 = 4 \\
 & x + u - v & +w_2 = 5 \\
 & x, y, u, v, s_1, s_2, w_1, w_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Passaggio alla forma standard secondo Hillier e Lieberman:



$$\max f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \min -f(x)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & -x - 2y - 3(u - v) \\ & x + y \quad \quad \quad -\lambda_1 = 2 \\ & x + y \quad \quad \quad +\lambda_1 = 3 \\ & x \quad + u - v \quad \quad -\lambda_2 = 4 \\ & x \quad + u - v \quad \quad +\lambda_2 = 5 \\ & x, y, u, v, \lambda_1, \lambda_2, w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x + y \quad \quad -\lambda_1 = 2 \quad \text{diventa}$$

$$x + y \quad \quad -\lambda_1 \geq 2 \quad e$$

$$x + y \quad \quad -\lambda_1 \leq 2$$

$$\begin{aligned} \max \quad & -x - 2y - 3(u - v) & \max \quad & -x - 2y - 3(u - v) \\ & x + y \quad \quad \quad -\lambda_1 = 2 & x + y \quad \quad -\lambda_1 & \leq 2 \\ & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -x - 2y - 3(u - v) \\
 & x + y - \lambda_1 = 2 \\
 & x + y + w_1 = 3 \\
 & x + u - v - \lambda_2 = 4 \\
 & x + u - v + w_2 = 5 \\
 & x, y, u, v, \lambda_1, \lambda_2, w_1, w_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -x - 2y - 3(u - v) \\
 & x + y - \lambda_1 \leq 2 \\
 & x + y - \lambda_1 \geq 2 \\
 & x + u - v - \lambda_2 \geq 4 \\
 & x + u - v - \lambda_2 \leq 4 \\
 & x + u - v + w_2 \geq 5 \\
 & x + u - v + w_2 \leq 5 \\
 & x, y, u, v, \lambda_1, \lambda_2, w_1, w_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -x - 2y - 3(u - v) \\
 & x + y - \lambda_1 \leq 2 \\
 & -x - y + \lambda_1 \leq -2 \\
 & -x - u + v + \lambda_2 \leq -4 \\
 & x + u - v - \lambda_2 \leq 4 \\
 & -x - u + v - w_2 \leq -5 \\
 & x + u - v + w_2 \leq 5 \\
 & x, y, u, v, \lambda_1, \lambda_2, w_1, w_2 \geq 0
 \end{aligned}$$