

Esercizio 1: un problema di pianificazione

La Svivon produce batterie elettriche di tre tipi (Alfa, Beta e Gamma). Per due di esse (Beta e Gamma) utilizza del rame. Per coprire la produzione del prossimo mese, può acquistare il rame al prezzo di 5 euro/kg. Il fornitore però non può fornire più di 4000 kg di rame. Nella seguente tabella sono indicate: la quantità di rame richiesta per ciascuna batteria, i costi di manodopera (per batteria prodotta) e prezzi di vendita al pubblico (per batteria):

Batterie	Rame (kg/batteria)	Costi manodopera (€/batteria)	Prezzi di vendita (€/batteria)
Alfa	-	12	25
Beta	1	6	20
Gamma	2	4	30

I tre tipi di batteria vogliono essere prodotti in quantità tali che il numero di batterie di tipo Alfa sia almeno doppio del numero di batterie di tipo Beta e non superiore al numero di batterie Gamma. Formulare un opportuno modello di programmazione matematica per la pianificazione ottimale dell'attività di produzione della Svivon.

$$I = \{\alpha, \beta, \gamma\} \quad \text{insieme degli indici}$$

$$x_i : \text{q.ta di batterie di tipo } i \in I$$

$$\max \quad 13x_\alpha + 9x_\beta + 16x_\gamma$$

$$\text{s.t.:} \quad 0x_\alpha + x_\beta + 2x_\gamma \leq 4000$$

$$x_\alpha \geq 2x_\beta$$

$$x_\alpha \leq x_\gamma$$

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in I$$

Se produco x_α batterie di tipo α

guadagno $25x_\alpha$ € ma ne pago $12x_\alpha$

Il profitto è $(25 - 12)x_\alpha = 13x_\alpha$

$$\beta : (20 - 6 - 5)x_\beta = 9x_\beta$$

$$\gamma : (30 - 4 - 2 \cdot 5)x_\gamma = 16x_\gamma$$

2

Esercizio 2: un semplice problema di acquisti

La società EtaBeta vuole costruire un portfolio di contratti per l'approvvigionamento dei propri negozi a partire da cinque offerte commerciali. Ogni offerta richiede un costo di acquisto fisso, al quale corrisponde un ritorno economico. I nomi dei contratti, i profitti p_i ed i costi w_i in migliaia di euro sono riportati nella prossima tabella. Si formuli un opportuno modello di programmazione matematica che massimizzi il profitto totale soggetto al vincolo di budget pari a 30 K€.

Offerta commerciale	w_i	p_i
F_1	10	20
F_2	5	8
F_3	4	3
F_4	23	23
F_5	5	15

$$I = \{1, \dots, 5\}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se firmo il contratto } i \in I \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 20x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 23x_4 + 15x_5 \\ \text{s.t.} \quad & 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 23x_4 + 5x_5 \leq 30 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

Problema dello zaino (knapsack problem)

Container (zaino) di capacità W

m Oggetti (items) di volume w_i e profitto p_i

$$\begin{aligned} \max \quad & p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_mx_m \\ \text{s.t.} \quad & w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_mx_m \leq W \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I$$

oppure

$$\max \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

$$\text{s.t.} : \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W$$

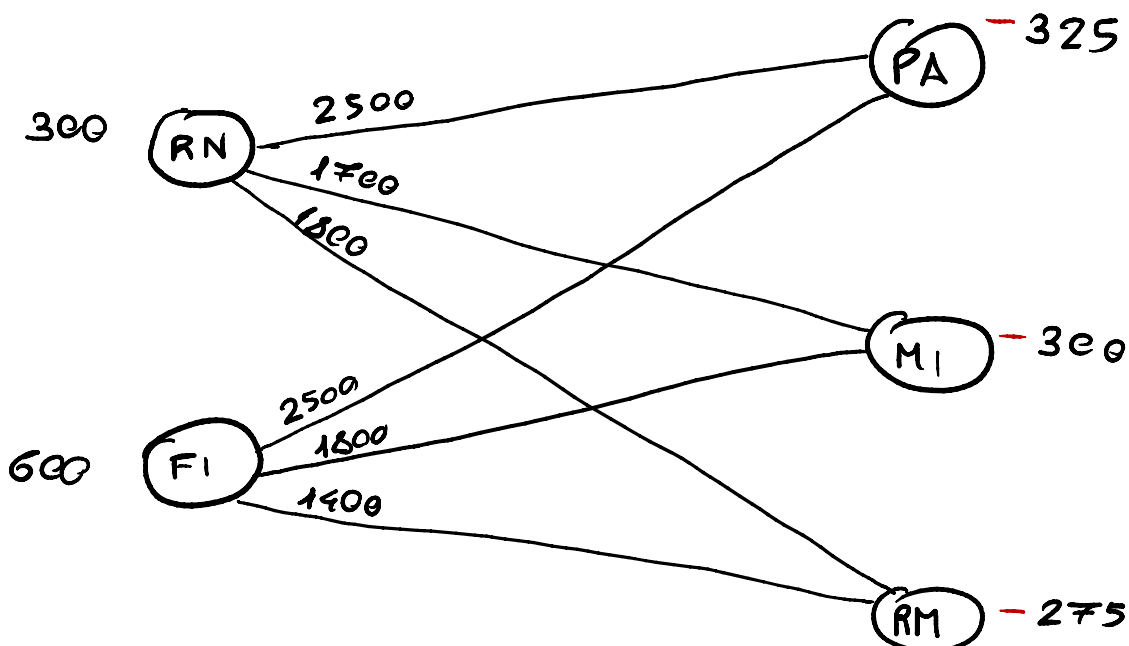
$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I$$

Esercizio 3: un problema di trasporti

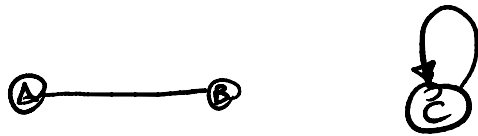
Un'industria con due impianti produttivi localizzati a Rimini e Firenze è interessata a sapere qual è l'organizzazione ottimale della propria rete distributiva, in modo da ottimizzare la consegna dei prodotti presso le tre principali città di distribuzione: Palermo, Milano e Roma. La capacità produttiva dei due impianti di produzione è la seguente: Rimini 300, Firenze 600. La domanda presso le tre città di distribuzione è la seguente: Palermo 325, Milano 300, Roma 275. I costi (in euro) associati al viaggio tra gli impianti di produzione e le città di distribuzione sono dati dalla seguente tabella:

	Palermo	Milano	Roma
Rimini	2500	1700	1800
Firenze	2500	1800	1400

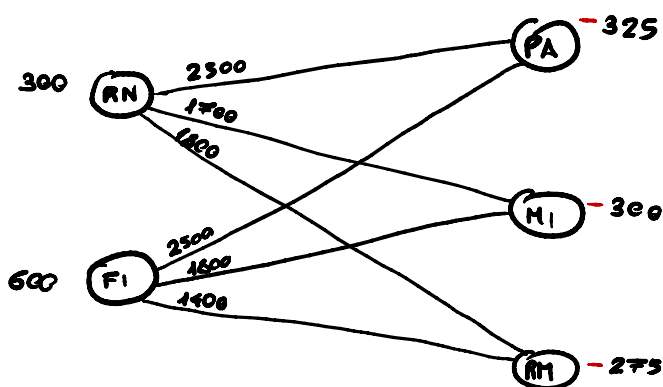
Formulare un opportuno modello di programmazione matematica che permetta di pianificare lo spostamento ottimale dei prodotti dagli impianti alle città di distribuzione in modo tale da minimizzare i costi di viaggio.



Questa struttura si chiama graf e consiste in un insieme di nodi e di archi, dove ciascun arco collega uno o due nodi.



H_p: la q.tà di prodotti disponibili nei centri di distribuzione è la stessa richiesta a destinazione.



$I = \{RN, FI\}$ insieme degli impianti

$J = \{PA, MI, RM\}$ insieme delle destinazioni

x_{ij} : q.tà di prodotto dal centro $i \in I$ alla città $j \in J$

$$\begin{aligned} \min \quad & 2500 x_{RN, PA} + 1700 x_{RN, MI} + 1800 x_{RN, RM} + \\ & + 2500 x_{FI, PA} + 1800 x_{FI, MI} + 1400 x_{FI, RM} \end{aligned}$$

$$s.t.: \quad x_{RN, PA} + x_{RN, MI} + x_{RN, RM} = 300$$

$$x_{FI, PA} + x_{FI, MI} + x_{FI, RM} = 600$$

$$x_{RN, PA} + x_{FI, PA} = 325$$

$$x_{RN, M1} + x_{F1, M1} = 300$$

$$x_{RN, RM} + x_{F1, RM} = 275$$

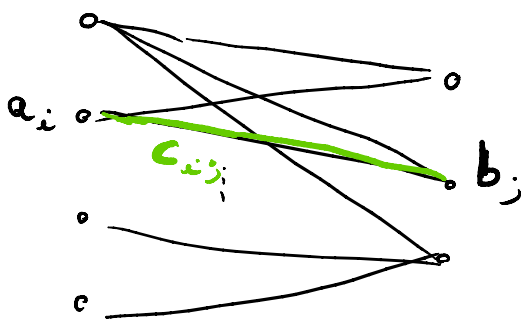
$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in I \times J$$

$$\text{oppure } \forall i \in I, \forall j \in J$$

ma si può dimostrare che se i parametri (coefficienti) sono interi, la soluzione finale sarà intera e dunque possiamo omettere in tal caso il vincolo di interezza sostituendolo con $x_{ij} \geq 0$ $\forall i \in I, \forall j \in J$.

PROBLEMA DEI TRASPORTI

I : origini J : destinazioni



a_i : disponibilità all'origine $i \in I$

b_j : richiesta di merce alla destinazione $j \in J$

NON SONO VARIABILI
bensì dei dati

c_{ij} : costo di trasporto di un'unità di prodotto dall'origine $i \in I$ alla destinazione $j \in J$

$$H_p: \sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j$$

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.: } \sum_{j \in J} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in J$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J$$

Esercizio 4: il problema della dieta

Un nutrizionista vuole preparare la dieta per un suo cliente nella quale occorrano garantire almeno 20 mg di proteine al giorno, almeno 30 mg di ferro al giorno e almeno 10 mg di calcio al giorno. Il nutrizionista è orientato verso cibi a

base di verdura (5 mg/kg di proteine, 6 mg/kg di ferro, 5 mg/kg di calcio e costo di 4€/kg), carne (15 mg/kg di proteine, 10 mg/kg di ferro, 3 mg/kg di calcio e costo di 10€/kg) e frutta (4 mg/kg di proteine, 5 mg/kg di ferro, 12 mg/kg di calcio e costo di 7€/kg). Si vuole determinare la dieta di costo minimo.

$$I = \{v, c, f\}$$

x_i : q.tà di cibo $i \in I$ (espressa in kg)

$$\min 4x_v + 10x_c + 7x_f$$

s.t.:

$$\text{proteine} \quad 5x_v + 15x_c + 4x_f \geq 20$$

$$\text{ferro} \quad 6x_v + 10x_c + 5x_f \geq 30$$

$$\text{calcio} \quad 5x_v + 3x_c + 12x_f \geq 10$$

$$x_v \geq 0, x_c \geq 0, x_f \geq 0$$

PROBLEMA DELLA DIETA

n cibi, m nutrienti

J : insieme dei cibi

x_j : q.tà di cibo $j \in J$ *solo queste sono variabili!*

c_j : costo per unità di cibo $j \in J$

I : insieme dei nutrienti

b_i : q.tà minima di nutriente $i \in I$ da soddisfare

a_{ij} : q.tà di nutriente $i \in I$ apportata da un'unità di cibo $j \in J$

$$\min \sum_{j \in J} c_j x_j \quad \left(\text{oppure } \sum_{j=1}^n c_j x_j \right)$$

$$\text{s.t.: } \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i \in I$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in J$$

Ultimazione generalizzazione:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$
$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\min \underline{c}^T \underline{x}$$

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad - \quad = \\ \text{s.t.:} \quad & \underline{A} \underline{x} \geq \underline{b} \\ & \quad \quad \quad x \geq \underline{0} \end{aligned}$$