

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

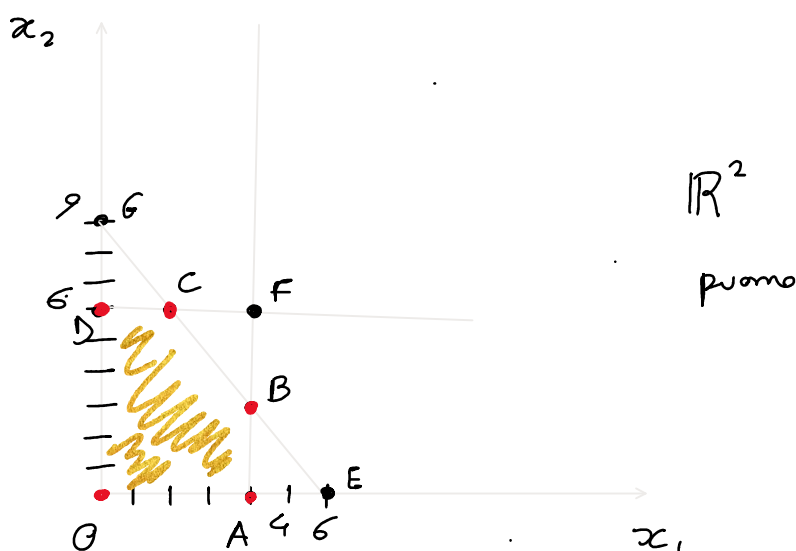
s.t.:

$$\text{stabilimento 1: } x_1 \leq 4$$

$$\text{stabilimento 2: } 2x_2 \leq 12$$

$$\text{stabilimento 3: } 3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



$$B \begin{cases} x_1 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ 3 \cdot 4 + 2x_2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ 12 + 2x_2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ 2x_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad B(4, 3)$$

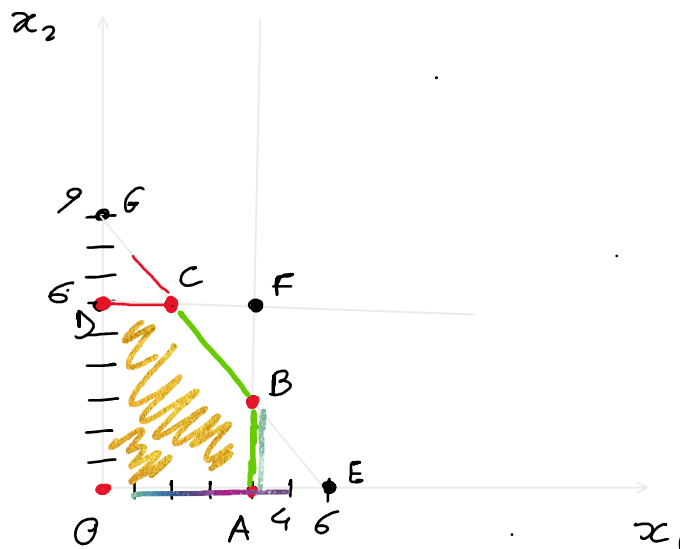
Ogni vertice si trova mettendo a sistema le equazioni di due rette che lo contengono

$\mathbb{R}^2$

Nel caso generale abbiamo n variabili $(x_1, \dots, x_n)$ e dunque la regione ammissibile è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e allora ... si trova

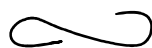
l
 sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$ e allora un vertice si trova
 intersecando n rette che lo contengono.

A e D sono vertici adiacenti (o consecutivi)
 a O.



Osserviamo che in questo esempio due vertici
 consecutivi hanno un'equazione in comune.

In generale (quindi in $\mathbb{R}^m$) due vertici si dicono
 consecutivi se hanno in comune $n-1$ equazioni
 delle n che li individuano.



$$x_1 \text{ e } x_2 \in \mathbb{R}$$

$$x = (1 - \alpha) x_1 + \alpha x_2 \quad \text{per qualche } \alpha \in [0, 1]$$

$$\text{Se } \alpha = 0 \quad x = (1-0)x_1 + 0 \cdot x_2 = x_1$$

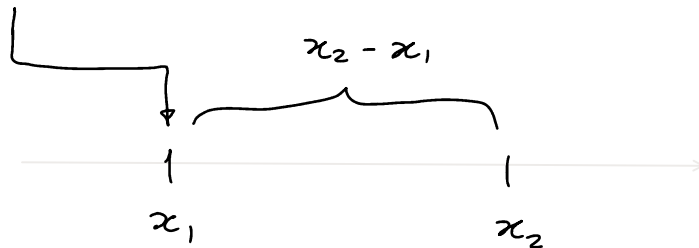
$$\text{Se } \alpha = 1 \quad x = (1-1)x_1 + 1 \cdot x_2 = x_2$$

$$\text{Se } \alpha \in (0, 1) \quad \text{e} \quad x_1 < x_2$$

$$x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 =$$

$$= x_1 - \alpha x_1 + \alpha x_2 =$$

$$= x_1 + \alpha(x_2 - x_1) > x_1$$



a x_1 si aggiunge una frazione di $x_2 - x_1$
e quindi si aggiunge una quantità positiva

Quindi $x > x_1$

$$x_1 < x_2$$

$$\alpha \in (0, 1) \quad \text{dunque anche } 1-\alpha \in (0, 1)$$

$$(1-\alpha)x_1 < (1-\alpha)x_2$$

$$\underbrace{(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2}_x < (1-\alpha)x_2 + \alpha x_2$$

$$x < x_2$$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

In definitiva l'equazione $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$ definisce tutti i punti dell'intervallo $[x_1, x_2]$ facendo variare α fra 0 e 1 compresi.

Se invece è $x_2 < x_1$:

$$x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$$

Sostituzione: $\alpha' = 1 - \alpha$

$$\alpha = 1 - \alpha'$$

$$\begin{aligned} x &= \alpha' x_1 + (1 - \alpha') x_2 = \\ &= (1 - \alpha') x_2 + \alpha' x_1 \end{aligned}$$

come prima

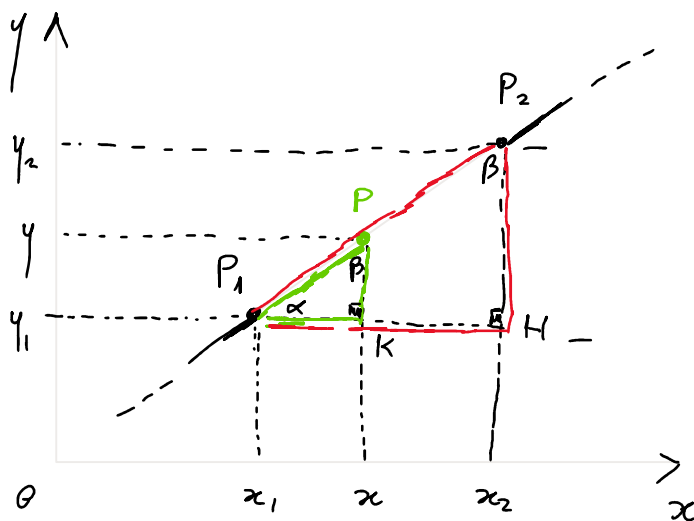
Ultimo caso: $x_1 = x_2$

$$\begin{aligned} x &= (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 = \\ &= (1-\alpha)x_1 + \alpha x_1 = x_1 - \cancel{\alpha x_1} + \cancel{\alpha x_1} = x_1 \end{aligned}$$

$$x = x_1 = x_2$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente

TEOREMA: siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, allora l'equazione
 $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$ descrive $\forall \alpha \in [0, 1]$
 tutti i punti dell'intervallo $[x_1, x_2]$ se $x_1 \leq x_2$
 o dell'intervallo $[x_2, x_1]$ se $x_2 \leq x_1$.



$P_1(x_1, y_1)$

$P_2(x_2, y_2)$

Considero un
 generico punto P
 sul segmento P_1P_2

$P(x, y)$

$\triangle P_1KP$ e $\triangle P_1HP_2$ sono simili per il 3°
 criterio di similitudine (tutti gli angoli congruenti).

Ma allora $\exists \alpha \in (0, 1)$ tale che:

$$PK = \alpha P_2H \quad \text{e} \quad P_1K = \alpha P_1H$$

$$y - y_1 = \alpha (y_2 - y_1) \quad \text{e} \quad x - x_1 = \alpha (x_2 - x_1)$$

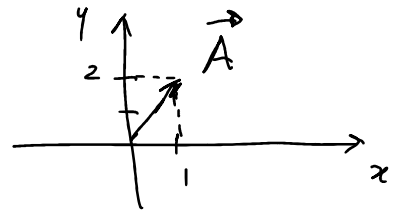
$$y = y_1 + \alpha y_2 - \alpha y_1$$

$$y = (1-\alpha)y_1 + \alpha y_2 \quad \quad x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$$

Definendo $x_1 = (x_1, y_1) = \vec{x}_1$ (,)

Definendo $\underline{x}_1 = (x_1, y_1) = \vec{x}_1$ (è P_1)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \vec{A}$$



$$\underline{x}_2 = (x_2, y_2) \quad (\text{è } P_2)$$

$$\underline{x} = (x, y) \quad (\text{è } P)$$

l'equazione $\underline{x} = (1 - \alpha) \underline{x}_1 + \alpha \underline{x}_2$

rappresenta ogni punto del segmento $P_1 P_2$ al variare di α in $[0, 1]$. La cosa vale ovviamente in $\mathbb{R}^m$.

$$y - y_1 = \alpha (y_2 - y_1) \quad \text{e} \quad x - x_1 = \alpha (x_2 - x_1)$$

Suppongo $y_1 \neq y_2$ e $x_1 \neq x_2$

$$\alpha = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

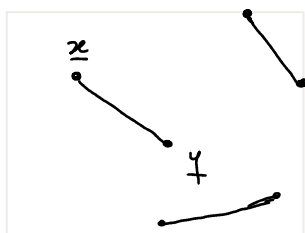
Suppongo pure $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

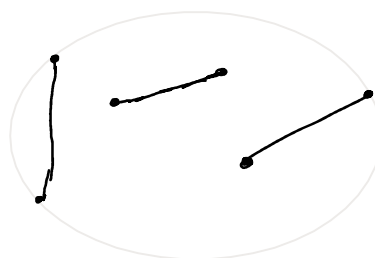
DEFINIZIONE: un insieme S si dice connesso se

presi due punti qualsiasi x e $y \in S$, il segmento avente per estremi x ed y è interamente contenuto in S , ovvero se $\forall x, y \in S$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$ vale che:

$$(1 - \alpha)x + \alpha y \in S.$$



convesso



convesso



non è convesso

TEOREMA: l'insieme delle soluzioni di un problema di programmazione lineare è un insieme convesso.

DEF: un punto x di un insieme convesso C è detto punto estremo o vertice di C se non esistono due punti in C che siano estremi di un segmento contenente x .

x_2

