

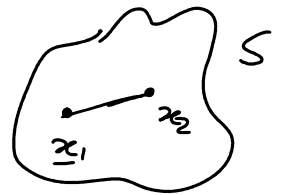
TEOREMA: l'insieme delle soluzioni di un problema programmazione lineare è un insieme convesso.

DIM: come noto, posso portare qualsiasi problema di P.L. in forma standard secondo Luenberger, ovvero:

$$\begin{aligned} \min \quad & \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} \quad & \underline{A} \underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

Sia S l'insieme delle soluzioni ammissibili e siano $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2 \in S$. Questo vuol dire che: i vincoli sono soddisfatti, ovvero:

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{x}_1 &= \underline{b} & \text{e} & & \underline{A} \underline{x}_2 &= \underline{b}, \\ \underline{x}_1 &\geq \underline{0} & & & \underline{x}_2 &\geq \underline{0} \end{aligned}$$



Considero adesso il segmento che collega $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2$
 $\forall \alpha \in [0, 1]$, consideriamo

$$\underline{x}' = (1 - \alpha) \underline{x}_1 + \alpha \underline{x}_2 \quad (*)$$

Se $\underline{x}'$ soddisfa i vincoli, abbiamo finito:

n obbene

$$\underline{A} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \quad m \text{ righe} \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right] \quad n \text{ righe} \quad \underline{\underline{x}} = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right] \quad b = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right] \quad m \text{ righe}$$

$$\underline{\underline{x}}' = \left[\begin{array}{c} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_k \\ \vdots \\ x'_m \end{array} \right] \quad \underline{\underline{x}}_1 = \left[\begin{array}{c} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ \vdots \\ x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{1,m} \end{array} \right] \quad \underline{\underline{x}}_2 = \left[\begin{array}{c} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ \vdots \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{2,m} \end{array} \right]$$

componente generica

Alla luce della (*) la k -esima componente di $\underline{\underline{x}}'$ sarà:

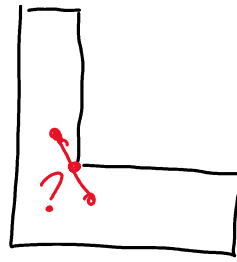
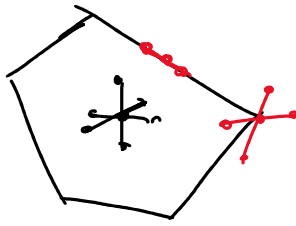
$x'_k = (1-\alpha) x_{1,k} + \alpha x_{2,k}$ quindi per quanto dimostrato in precedenza, x'_k è compreso tra $x_{1,k}$ e $x_{2,k}$ che sono entrambi ≥ 0 e dunque $x'_k \geq 0$ e quindi ancora $\underline{\underline{x}}' \geq \underline{\underline{0}}$

Dobbiamo infine verificare quanto vale $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}'$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}' &= \underline{\underline{A}} [(1-\alpha) \underline{\underline{x}}_1 + \alpha \underline{\underline{x}}_2] = \\ &= \underline{\underline{A}} (1-\alpha) \underline{\underline{x}}_1 + \underline{\underline{A}} \alpha \underline{\underline{x}}_2 = \\ &= (1-\alpha) \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}_1 + \alpha \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}_2 = \\ &= (1-\alpha) \underline{\underline{b}} + \alpha \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{b}} \end{aligned}$$



$$c^T x + \alpha \underline{b} = \underline{b}$$



TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE (HILLIER - LIEBERMANN)

- a) se esiste una soluzione ottima, allora essa deve essere un vertice^{Hp}
- Th
- b) se esistono soluzioni ottime multiple (e la regione ammissibile è limitata) allora almeno due soluzioni ottime sono vertici ammissibili adiacenti.

Dim a) Procediamo per assurdo supponendo che esista una soluzione ottima $\underline{x}^*$ e che non sia un vertice. Ma allora debbono esistere $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2 \in S$ tali che il segmento che congiunge $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2$ contiene $\underline{x}^*$, ovvero $\exists \alpha \in (0, 1)$ tale che

$$\underline{x}^* = (1 - \alpha) \underline{x}_1 + \alpha \underline{x}_2$$

Il corrispondente valore della F.O. sarà:

$$z^* = (1 - \alpha) z_1 + \alpha z_2$$

l'espressione valore medio i. v. sarà:

$$\begin{aligned}\bar{Z}^* &= \underline{C}^T \underline{x}^* = \underline{C}^T \left((1-\alpha) \underline{x}_1 + \alpha \underline{x}_2 \right) = \\ &= (1-\alpha) \underline{C}^T \underline{x}_1 + \alpha \underline{C}^T \underline{x}_2 = \\ &= (1-\alpha) \bar{Z}_1 + \alpha \bar{Z}_2\end{aligned}$$

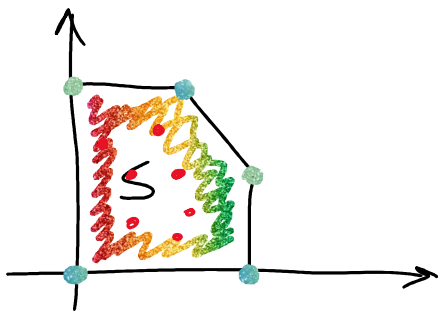
$\bar{Z}_1$: valore della f.o. valutata in $\underline{x}_1$

$$\bar{Z}^* = (1-\alpha) \bar{Z}_1 + \alpha \bar{Z}_2$$

Quindi:

- a) se $\bar{Z}_1 < \bar{Z}_2$ abbiamo che $\bar{Z}_1 < \bar{Z}^* < \bar{Z}_2$
- b) se $\bar{Z}_1 > \bar{Z}_2$ " " $\bar{Z}_2 < \bar{Z}^* < \bar{Z}_1$
- c) se $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$ " " $\bar{Z}^* = \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$

I casi a) e b) sono un assurdo perché $\bar{Z}^*$ non sarebbe ottimo. Infine anche il caso c) è un assurdo in quanto $\bar{Z}^*$ non sarebbe unico.



Il teorema appena dimostrato è fondamentale perché ci permette di passare da una ricerca "infinita" di punti a una ricerca finita, ovvero fra i vertici della regione ammissibile. ▣

METODO DI RIDUZIONE DI GAUSS

$$x = 1 \quad y = 1 \quad z = 2$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = -1 \\ x + y + z = 4 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (**)$$

$\underline{A} \quad \underline{x} \quad \underline{b}$

Il metodo di Gauss consiste nell'effettuare delle operazioni elementari in modo tale da pervenire a dei sistemi equivalenti (ovvero con lo stesso insieme delle soluzioni) via via più semplici da risolvere.

Passiamo a riscrivere la (**) in una maniera ancora più compatta:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

matrice estesa

$$[\underline{A} \mid \underline{b}]$$

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Per il momento, tralasciamo il vincolo $\underline{x} \geq \underline{0}$ e lavoriamo soltanto con i vincoli

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

In generale $\underline{A} : m \times n$, dunque m vincoli ed n variabili

Se $m > n$ in generale il sistema è impossibile

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$$

Se $m = n$ in generale il sistema ha una sola soluzione

Se $m < n$ in generale il sistema ha infinite soluzioni

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \quad m = 2, \quad n = 3$$

Assumiamo: $m < n$ e $\text{rank } \underline{A} = m$ & per evitare situazioni indesiderate come le seguenti:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & \textcircled{1} \end{bmatrix}$$

oppure

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -2 & 2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi o il sistema è impossibile oppure possiamo eliminare a priori le equazioni ridondanti e ricondurci a una matrice $\underline{A}$ a rango massimo (m).

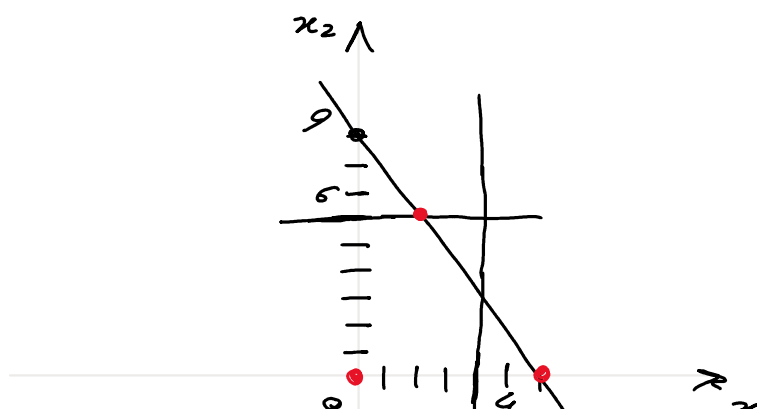
$$\max \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

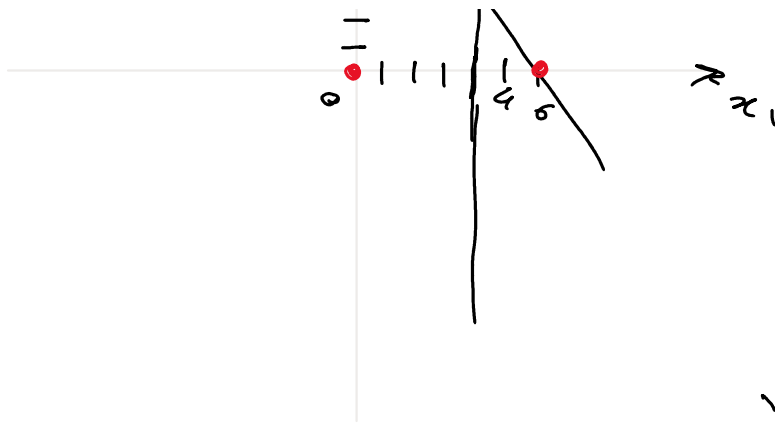
$$\text{s.t.:} \quad x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$





$$\min \quad Z = -3x_1 - 5x_2$$

x_1	$+ x_3$		$= 4$
$2x_2$	$+ x_4$		$= 12$
$3x_1 + 2x_2$	$+ x_5$		$= 18$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Consideriamo solo il sistema in verde

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$\underline{A} \quad \underline{x} \quad \underline{b}$

$$\text{Se } x_1 = x_2 = 0$$

x_1	$+ x_3$	$= 4$
$2x_2$	$+ x_4$	$= 12$
$3x_1 + 2x_2$	$+ x_5$	$= 18$

$$\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 12 \\ x_5 = 18 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 4, 12, 18)$$

In $\mathbb{R}^2$ $(x_1, x_2) = (0, 0)$ *è un vertice*

$$x_2 = 0 \text{ e } x_5 = 0$$

x_1	$+ x_3$		$= 4$
$2x_2$	$+ x_4$		$= 12$
$3x_1 +$	$2x_2$	$+ \cancel{x_5}$	$= 18$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_4 = 12 \\ 3x_1 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = 12 \\ x_1 = 6 \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^2$ $(x_1, x_2) = (6, 0)$ *è un vertice non ammissibile*

$$x_4 = x_5 = 0$$

x_1	$+ x_3$		$= 4$
$2x_2$	$+ \cancel{x_4}$		$= 12$
$3x_1 +$	$2x_2$	$+ \cancel{x_5}$	$= 18$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 = 6 \\ 3x_1 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 6 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_2 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 6 \\ 3x_1 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 6 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2) = (2, 6)$ è un vertice ammissibile