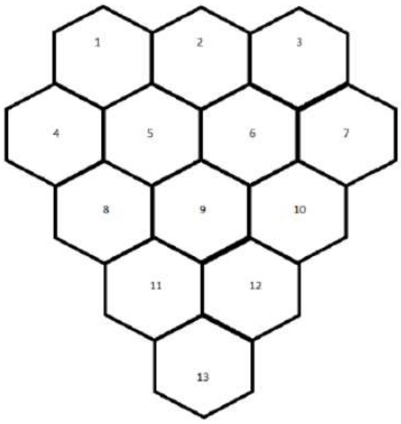
mercoledì 13 marzo 2024 09:02

## Esercizio 9: in farmacia




L'amministrazione di una città ha bisogno di decidere la localizzazione delle farmacie. La città è formata da 13 quartieri, come illustrato nella seguente figura. Una farmacia può essere costruita in qualsiasi quartiere ed è in grado di servire il quartiere dove viene realizzata ed i quartieri adiacenti. Formulare un modello di programmazione lineare che permetta di determinare il numero minimo di farmacie al fine di servire tutti i quartieri della città.

$I = \{1, \dots, 13\}$ insieme dei quartieri

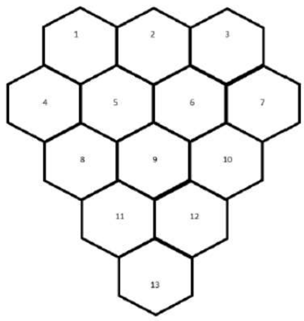
$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se si costruisce } \cancel{\text{la}} \text{ una farmacia nel quartiere } i \in I \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min \sum_{i=1}^{13} x_i \qquad \left(\text{oppure } \sum_{i \in I} x_i\right)$$

s.t.: $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \geq 1$ quartiere 1

$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 1$ " 2

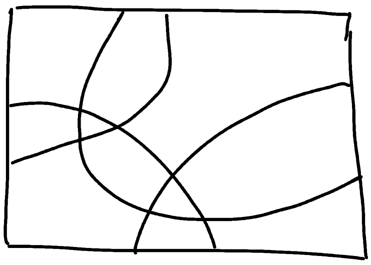
$x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 1$ " 3



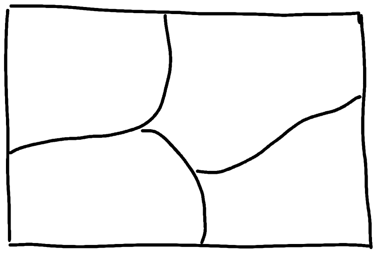

eccetera

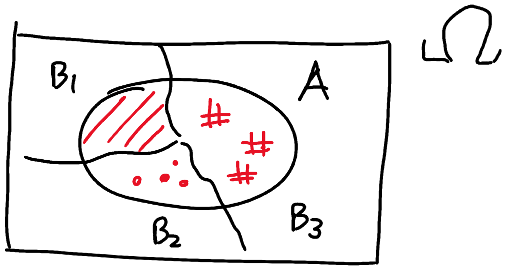
$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \in I$ set covering

Se invece ogni quartiere dovesse essere servito unicamente da una farmacia, i vincoli di disuguaglianza passerebbero a dei vincoli di uguaglianza e in tal caso il problema prende il nome di set partitioning.



non è una partizione






$$P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + P(A|B_3)\,P(B_3)$$

1. Un certo prodotto finale è composto da tre parti che possono essere lavorate su quattro linee differenti di produzione; ogni linea è dotata di una limitata capacità di ore di produzione disponibili. La tabella seguente indica la produttività (in numero di pezzi all'ora) di ciascuna parte su ciascuna linea e la capacità di ciascuna linea.

| Linea | Capacità | Produttività | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Parte1 | Parte 2 | Parte 3 |
| 1 | 100 | 10 | 15 | 5 |
| 2 | 150 | 15 | 10 | 5 |
| 3 | 80 | 20 | 5 | 10 |
| 4 | 200 | 10 | 15 | 20 |

Si vuole determinare il numero di ore di lavorazione di ciascuna parte su ciascuna linea in modo da massimizzare il numero di unità complete del prodotto finale. Formulare il modello di Programmazione Lineare di questo problema.

$I = \{1, 2, 3, 4\}$ insieme delle linee

$J = \{1, 2, 3\}$ insieme delle "parti" (di prodotto)

$x_{ij}$ = numero di ore di lavorazione sulla linea $i \in I$ della parte $j \in J$.

$$\max \ \min \left\{ \begin{array}{l} 10x_{11} + 15x_{21} + 20x_{31} + 10x_{41}, \\ 15x_{12} + 10x_{22} + 5x_{32} + 15x_{42}, \\ 5x_{13} + 5x_{23} + 10x_{33} + 20x_{43} \end{array} \right\}$$

$$\text{s.t.:}\quad x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 100$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 150$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 80$$

$$x_{41}+x_{42}+x_{43} \leq 200$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall\ (i,j) \in I \times J \qquad \text{oppure}$$

$$\forall\ i \in I,\ \forall\ j \in J$$

Alla fine del processo avrò:

$10x_{11} + 15x_{21} + 20x_{31} + 10x_{41}$ pezzi di tipo 1

$15x_{12} + 10x_{22} + 5x_{32} + 15x_{42}$ " " " 2

$5x_{13} + 5x_{23} + 10x_{33} + 20x_{43}$ " " " 3

Chiamando $z$ il minimo fra le 3 parti, vale che:

$z \leq$ n° pezzi di tipo 1

$z \leq$ n° " " " 2

$z \leq$ n° " " " 3

$$\max\ z$$

$$\text{s.t.:}\quad z \leq 10x_{11} + 1\ \ {}_{21} + 20x_{31} + 10x_{41}$$

$$z \leq 15\ \ {}_{2} + 10x_{22} + 5x_{32} + 15x_{42}$$

$$- \leq 5x_{13} + 5x_{23} + 10x_{33} + 20x_{43}$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 100$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 150$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 80$$

$$x_{41}+x_{42}+x_{43} \leq 200$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall\ (i,j) \in I \times J \qquad \text{oppure}$$

$\ldots x_2 + x_3 <$

$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i,j) \in I \times J$ oppure

$\forall i \in I, \ \forall j \in J$

$z \in \mathbb{Z}^+$

2. Un allevatore utilizza per l'alimentazione delle sue mucche 3 tipi di alimenti. Ogni kg. di ciascun alimento ha le caratteristiche indicate nella tabella seguente (costo in euro, calorie in cal., proteine in g., vitamine in g.).

| ALIM. | Costo | Calorie | Proteine | Vitamine |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4000 | 0.3 | 0.5 |
| 2 | 0.5 | 3000 | 0.4 | 0.3 |
| 3 | 0.3 | 1500 | 0.2 | 0.2 |

A ciascuna mucca deve essere assicurata quotidianamente un'alimentazione che comprenda una quantità di proteine P compresa tra 2 e 3 g. e almeno 4 g. di vitamine V. É richiesto inoltre che la miscela alimentare contenga (in peso) non meno del 15% di alimento 2 e non più del 60% di alimento 3. Si vuole determinare la miscela alimentare che massimizzi l'espressione $300V - L - 20|C - 15000| - 7500|P - 2|$, dove L è il costo della miscela fornita ad ogni animale.

$I = \{1, 2, 3\}$ insieme degli alimenti

$x_i$ : q.tà (in kg) di alimento $i \in I$.

$$\max \ 300V - L - 20|C - 15000| - 7500|P - 2|$$

s.t.:

$$V = 0.5x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3$$

$$L = x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 \qquad \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \geq 15\%$$

$$C = 4000x_1 + 3000x_2 + 1500x_3$$

$$P = 0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3$$

$$2 \leq P \leq 3$$

$$V \geq 4$$

$$x_2 \geq 0.15(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_3 \leq 0.6(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_1, x_2, x_3, L, C, P, V \geq 0$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

oppure:

$$|x| = \max\{x, \ -x\}$$

$$z_1 = |C - 15000|$$

$$z_1 = \max\{C - 15000, \ -C + 15000\}$$

$$z_1 \geq C - 15000$$

$$z_1 \geq -C + 15000$$

$$z_2 = |P - 2|$$

$$z_2 = \max\{P - 2, \ 2 - P\}$$

$$\max \ 300V - L - 20|C - 15000| - 7500|P - 2|$$

$$\max \ 300V - L - 20z_1 - 7500z_2$$

s.t.: $z_1 \geq C - 15000$

$z_1 \geq -C + 15000$

$z_2 \geq P - 2$

$z_2 \geq -P + 2$

più quelli di mi

più quelli di prima

$z_1$, $z_2$ libere perché possono assumere dei valori negativi benché le corrispondenti soluzioni non siano ottimali.

Un supermercato aperto 24 ore su 24 ha i seguenti fabbisogni minimi di cassiere:

| Turno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Orario | 3-7 | 7-11 | 11-15 | 15-19 | 19-23 | 23-3 |
| Numero minimo | 7 | 20 | 14 | 20 | 10 | 5 |

Il turno 1 segue immediatamente il turno 6. Una cassiera lavora otto ore consecutive, cominciando all'inizio di uno dei sei turni. Si formuli un modello in programmazione lineare che permetta di determinare il numero minimo di cassiere per soddisfare il fabbisogno giornaliero del supermercato.

$I = \{1, \dots, 6\}$ insieme dei turni

$x_i$: numero di cassiere che iniziano a lavorare al turno $i \in I$

$$\min \quad x_1 + x_2 + \dots + x_6$$

$$x_1 + x_6 \geq 7$$

$$x_2 + x_1 \geq 20$$

$$x_3 + x_2 \geq 14$$

eccetera ...

$$x_i \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall\, i \in I$$