DEF (SOL. DI BASE): date le precedenti assunzioni (rango pieno, $m < n$), sia $\underline{\underline{B}}$ una matrice non singolare formata selezionando m colonne linearmente indipendenti dalla matrice $\underline{\underline{A}}$. Allora se le restanti $n - m$ componenti di $\underline{x}$ non associate alle colonne di $\underline{\underline{B}}$ sono poste a 0, la soluzione del sistema lineare risultante si dice essere una soluzione di base rispetto alla base $\underline{\underline{B}}$.
Le componenti di $\underline{x}$ associate alle colonne di $\underline{\underline{B}}$ si chiamano variabili di base.

non singolare $\Leftrightarrow$ invertibile
singolare $\Leftrightarrow$ non invertibile

lin. dip: una riga è c. l. delle restanti, ovvero si può ottenere attraverso una serie di operazioni elementari

Se una riga è c. l. delle altre allora effettuando queste operazioni troverò che la riga d'interesse sarà nulla.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad R2 = 2R_1$$

$$R_2 \Leftrightarrow R_2 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ il suo determinante è zero

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{\underline{A}})} \text{ per qualcosa} \dots$$

Questa operazione è possibile a patto che $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$

Non singolare $\Longleftrightarrow$ invertibile $\Leftrightarrow$ lin. indip.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

$\underline{\underline{B}}$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2, x_3 in base

$x_4 = x_5 = 0$ fuori base

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Base formata da x_1 e x_5

$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ fuori base

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$ $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ fuori base

$$\begin{cases} x_1 + 5x_5 = 1 \\ 3x_1 + 6x_5 = 2 \end{cases}$$

Base formata da x_3 e x_4 ? $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$C_2 = C_1$

~~$R_2 = 2R_1$~~ non sono lin. indip ovvero $\underline{\underline{B}}$ è singolare.

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$ $x_3 + x_4 = 1$ infinite soluzioni

Se invece il termine noto fosse stato $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, il sistema sarebbe stato:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$ che è impossibile.

Quindi i requisiti in rosso nella definizione di sol. di base (ovvero lin indip e/o non singolarità) servono a evitare questi casi patologici.

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Ripristinando i vincoli di non negatività possiamo aggiungere il concetto di sol. di base ammissibile (non ammissibile), ovvero una sol. di base che rispetta (non rispetta) i vincoli $\underline{x} \geq \underline{0}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{x} \text{ Vertice della regione ammissibile} \\ \Longleftrightarrow \\ \underline{x} \text{ è sol. di base ammissibile} \end{array}}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Il numero di sol. di base è dato dal numero di modi in cui posso scegliere 3 colonne da 5 (ipotizzando che siano lin. indip.). Tale valore è dato dal coeff. binomiale $\binom{5}{3}$

Quindi in generale $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\;2} = 10$$

$\binom{n}{m}$ è dell'ordine di 2^n

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

$$z - 3x_1 \quad 5x_2 =$$

e i vincoli di uguaglianza

$$z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \underline{x_1} \quad\quad + \underline{x_3} \quad\quad\quad &= 4 \\ \underline{2x_2} \quad\quad + \underline{x_4} \quad &= 12 \\ \underline{3x_1} + \underline{2x_2} \quad\quad\quad + \underline{x_5} &= 18 \end{aligned}$$

in base

a zero (fuori base)

Vincoli di non negatività sottintesi.

In base: $x_3 = 4$, $x_4 = 12$, $x_5 = 18$

Fuori base: $x_1 = x_2 = 0$

F. O. $z = 3x_1 + 5x_2 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

se x_1 aumenta di un'unità, la f.o. aumenta di 3 unità

se x_2 " " " " , " " " " 5 "

Scelgo di far ~~e~~ntrare in base x_2 che passerà da 0 a un valore θ (naturalmente non negativo).

$$\begin{aligned} \cancel{x_1} \quad\quad + \underline{x_3} \quad\quad\quad &= 4 \\ \underline{2x_2} \quad\quad + \underline{x_4} \quad &= 12 \\ 3\cancel{x_1} + 2x_2 \quad\quad\quad + \underline{x_5} &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_3 = 4 \\ 2\theta + x_4 = 12 \\ 2\theta + x_5 = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 4 \geq 0 \\ x_4 = 12 - 2\theta \geq 0 \\ x_5 = 18 - 2\theta \geq 0 \end{cases}$$

ci ritorneremo ✓

$$12 - 2\theta \geq 0 \qquad 2\theta \leq 12 \qquad \theta \leq \frac{12}{2} \qquad \theta \leq 6$$

$$18 - 2\theta \geq 0 \qquad 2\theta \leq 18 \qquad \theta \leq \frac{18}{2} \qquad \theta \leq 9$$

$18 - 2\theta \geq 0 \qquad 2\theta \leq 18 \qquad \theta \leq \frac{18}{2} \qquad \theta \leq 9$

$$\theta = \min\{6, 9\} = 6$$

Con questa scelta $x_4 = 0$ e quindi esce dalla base. $x_5 = 18 - 2 \cdot 6 = 18 - 12 = 6$.

$$
\begin{array}{lllllll|l|l}
z & -3x_1 & -5x_2 & 0 & 0 & 0 & = 0 & E_0 & z \\
 & x_1 & & +x_3 & 0 & 0 & = 4 & E_1 & x_3 \\
 & & 2x_2 & 0 & +x_4 & & = 12 & E_2 & x_4 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & 0 & & +x_5 & = 18 & E_3 & x_5
\end{array}
$$

A ogni riga è associata una variabile in base

$$E_2 := \frac{1}{2} E_2$$

$$
\begin{array}{lllllll|l}
z & -3x_1 & -5x_2 & & & & = 0 & E_0 := E_0 + 5E_2 \\
 & x_1 & & +x_3 & & & = 4 & \\
 & & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & & = 6 & \\
 & 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 18 & E_3 := E_3 - 2E_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll|l}
 & & & & & & & \text{In base} \\
z & -3x_1 & & & +\frac{5}{2}x_4 & & = 30 \ \text{F.O.} & z \\
 & x_1 & & +x_3 & & & = 4 & x_3 \\
 & & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & & = 6 & x_2 \\
 & 3x_1 & & & -x_4 & +x_5 & = 6 & x_5
\end{array}
$$

In base: $x_2 = 6, \quad x_3 = 4, \quad x_5 = 6$

Fuori base: $x_1 = x_4 = 0$

$$z = 3\cancel{x_1} - \cancel{\tfrac{5}{2} x_4} + 30$$

x_1 entra in base a un valore $\theta \geq 0$

$$\begin{cases} \theta + x_3 = 4 \\ x_2 = 6 \\ 3\theta + x_5 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 4 - \theta \geq 0 & \theta \leq 4 \\ x_2 = 6 \geq 0 & \\ x_5 = 6 - 3\theta \geq 0 & \theta \leq 2 \end{cases}$$

x_5 esce dalla base

$$\begin{array}{llllll|l} z & -3x_1 & & & +\frac{5}{2}x_4 & = 30 \text{ C.F.O.} & \text{In base } z \\ & x_1 & & +x_3 & & = 4 & x_3 \\ & & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & = 6 & x_2 \\ & 3x_1 & & & -x_4 + x_5 & = 6 & x_5 \end{array}$$

$E_3 := \frac{1}{3} E_3$

$$\begin{array}{llllll} z & -3x_1 & & & +\frac{5}{2}x_4 & = 30 \\ & x_1 & & +x_3 & & = 4 \\ & & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & = 6 \\ & x_1 & & & -\frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 & = 2 \end{array}$$

$E_0 := E_0 + 3E_3$ $\quad$ $E_1 := E_1 - E_3$

Z $\quad$ $\frac{7}{2}x_4$ $\quad$ $= 36$