lu 22, 9 - 11 ?

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1) $x > 0 \longrightarrow y = 1$

2) $x = 0 \longrightarrow y = 0$

Sia M un upper bound di x, la 1) si può scrivere come:

$$x \leq M y$$

Sia ε un numero positivo e sufficientemente piccolo, allora la 2) si esprime come

$$x \geq \varepsilon y$$

Iniziamo a supporre $x \in \mathbb{Z}^+$.

Poniamo, ad es, $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$x \geq \frac{1}{2} y \qquad (*)$$

Se $x = 0$, la $(*)$ diventa

$$0 \geq \frac{1}{2} y$$

$$2 \cdot 0 \geq 2 \cdot \frac{1}{2} y$$

$0 \geq y$ ovvero $y \leq 0$

$0 \geq y$ ovvero $y \leq 0$

Ma y è binaria quindi $y \leq 0$ comporta $y = 0$
e dunque se $x = 0$ effettivamente abbiamo che $y = 0$.

Se $x = 1$, la $(*)$ diventa:

$$1 \geq \frac{1}{2} y$$

$$2 \geq y$$

$y \leq 2$ non ci dice nulla, ma va bene

Vediamo cosa succede
Se $x \geq 0$

Come prima, se $x = 0$ abbiamo $y = 0$

Se, ad es., $\varepsilon = 0$

$$x \geq \frac{1}{2} y$$

Se $x = \frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} y$$

$$\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_{2}} \geq \frac{1}{\cancel{2}} y \cdot \cancel{2}$$

$y \leq \frac{1}{2}$ questo comporta $y = 0$.

Quindi non è vero che solo $x = 0$ implica
$y = 0$ ma anche qualsiasi valore compreso
tra 0 e la soglia ε.

Un'agenzia finanziaria deve investire un milione di dollari di un suo cliente in fondi di investimento. Il mercato offre in questo momento cinque tipi di fondi che sono riassunti come segue:

Nome	Tipo	Moody's rating	Durata in anni	Rendita alla maturazione
A	Privato	1 Aaa	9	4.5%
B	Pubblico	3 A	15	5.4%
C	Pubblico	2 Aaaa	4	5.1%
D	Pubblico	4 Baaa	3	4.4%
E	Privato	5 Ba	2	4.1%

Si sa che i fondi pubblici sono tassati del 50% alla fine del periodo. Il cliente chiede di riservare almeno il 40% del capitale a fondi pubblici o dello stato ed ha imposto che il tempo medio della durata dell'investimento non debba superare i 5 anni. Le regole del mercato impongono che al massimo uno tra i fondi di investimento C e D sia attivato. Infine trasformando il "Moody's rating" in una scala numerica (Aaa=1, Aa=2, A=3, Baa=4, Ba=5), il cliente richiede che il valore medio dell'investimento superi 1.4. Si vuole massimizzare la rendita dell'investimento. Formulare il modello in Programmazione Lineare di questo problema. Aaaa = 2

$I = \{A, B, C, D, E\}$ insieme degli indici

x_i : quantità di soldi investiti nel fondo $i \in I$

$$\max z = (1 + 0.045)x_A + \left(1 + \frac{1}{2}\cdot 0.054\right)x_B + \left(1 + \frac{1}{2}\cdot 0.051\right)x_C + \left(1 + \frac{1}{2}\cdot 0.044\right)x_D + (1 + 0.041)x_E$$

s.t.: $$\sum_{i \in I} x_i \leq 10^6$$

$$\frac{x_B + x_C + x_D}{\sum_{i \in I} x_i}$$ frazione di investimento in fondi pubblici

$$\frac{x_B + x_C + x_D}{\sum_{i \in I} x_i} \geq \frac{40}{100}$$ vincolo non lineare ma linearizzabile

$$x_B + x_C + x_D \geq 0.4 \sum x_i$$

$$x_B + x_C + x_D \geq 0.4 \sum_{i \in I} x_i$$

Tempo medio dell'investimento:

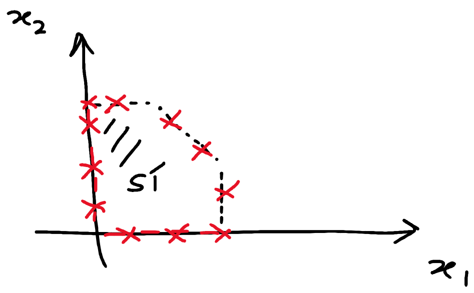
$$\frac{9\,x_A + \overset{\text{anni}}{15}\,\overset{\frac{\$}{\text{euro}}}{x_B} + 4\,x_C + 3\,x_D + 2\,x_E}{\sum_{i \in I} x_i \quad \text{a euro}} \leq 5 \qquad \frac{\text{anni} \cdot \overset{\$}{\cancel{\text{euro}}}}{\cancel{\text{euro}}\ \$}$$

$$9x_A + 15\,x_B + 4\,x_C + 3x_D + 2\,x_E \leq 5 \sum_{i \in I} x_i$$

Punteggio medio dell'investimento:

$$\frac{1\,x_A + 3\,x_B + 2\,x_C + 4\,x_D + 5\,x_E}{\sum_{i \in I} x_i} > 1.4$$

$$x_A + 3\,x_B + 2x_C + 4\,x_D + 5\,x_E > 1.4 \sum_{i \in I} x_i$$



Non sono ammessi vincoli di disuguaglianza stretti, altrimenti non potremmo raggiungere i vertici della regione ammissibile.. Si bypassa l'ostacolo nel seguente modo: Dire che qualcosa è > 1.4 è come dire che la stessa quantità è $\geq 1.4 + \varepsilon$ con ε suff. piccolo:

$$x_A + 3x_B + 2x_C + 4x_D + 5x_E \geq (1.4 + \varepsilon) \cdot \sum_{i \in I} x_i$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se si attiva il fondo } i \text{, ovvero } x_i > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in \{C, D\}$$

$$x_C \leq M y_C$$

$$x_D \leq M y_D$$

Poiché disponiamo di 1 mln di dollari, possiamo scegliere $M = 10^6$

$$y_C + y_D \leq 1$$

$$x_C \geq \varepsilon y_C$$

$$x_D \geq \varepsilon y_D$$

ε può essere un centesimo di dollaro o un dollaro.

$$\max z = (1 + 0.045)\, x_A + \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0.054\right) x_B +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0.051\right) x_C + \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0.044\right) x_D +$$

$$+ (1 + 0.041)\, x_E$$

s.t.: $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i \leq 10^6$

$$x_B + x_C + x_D \geq 0.2 \sum x_i$$

$$x_B + x_C + x_D \geq 0.4 \sum_{i \in I} x_i$$

$$x_A + 3x_B + 2x_C + 4x_D + 5x_E \geq (1.4 + \varepsilon) \cdot \sum_{i \in I} x_i$$

$$x_C \leq M y_C$$

$$x_D \leq M y_D$$

$$y_C + y_D \leq 1$$

$$x_C \geq \varepsilon y_C$$

$$x_D \geq \varepsilon y_D$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall \; i \in I, \qquad y_C, y_D \in \{0, 1\}$$

Una pasticceria e specializzata nella produzione di torte per matrimoni. La realizzazione di ciascuna torta richiede 1 kg di cioccolato, 0.5 kg di panna e 1 kg di crema. Per l'acquisto di tali prodotti l'azienda si può rivolgere a cinque fornitori A, B, C, D ed E che erogano i prodotti in lotti (combinazioni dei tre prodotti). Ciascun lotto è composto da diverse quantità, in kg, dei tre ingredienti, secondo la seguente tabella:

Fornitore	Cioccolato	Panna	Crema
A	a_{11}	a_{12}	a_{13}
B	a_{21}	a_{22}	a_{23}
C	a_{31}	a_{32}	a_{33}
D	a_{41}	a_{42}	a_{43}
E	a_{51}	a_{52}	a_{53}

Qualora la pasticceria decidesse di rifornirsi da un particolare fornitore, diciamo i, questa dovrà pagare un costo per il servizio pari ad f_i più un costo pari a c_i per ogni lotto acquistato presso il fornitore i. D'altro canto quest'ultimo può erogare al più U_i lotti. A causa di una storica rivalità tra i fornitori A e D, se la pasticceria deciderà di rivolgersi da A allora il fornitore D si rifiuterà di svolgere servizio alla pasticceria. Viceversa, vista la forte amicizia tra i fornitori B e C, se la pasticceria deciderà di rifornirsi da B allora dovrà pure rifornirsi presso C. Infine, per motivi commerciali, se la pasticceria deciderà di rifornirsi da E, allora dovrà acquistare almeno L_E lotti. Formulare un modello di programmazione lineare che permetta alla pasticceria di massimizzare il numero di torte prodotte, sapendo che questa dispone di un budget massimo pari a K e che non può acquistare porzioni di lotti.

$$I = \{A, B, C, D, E\}$$

x_i : n° di lotti acquistati dal fornitore $i \in I$

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall \; i \in I$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & x_i > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se mi rivolgo da A pago c_A per ogni litro

quindi $c_A x_A$

più una spesa fissa f_A per la lavorazione

Da A pagherò $f_A y_A + c_A x_A$

Vincolo sul budget:

$$\sum_{i \in I} \left(f_i y_i + c_i x_i \right) \leq K$$

$$x_i \leq M y_i \qquad \forall\ i \in I$$

$$x_i \leq U_i \qquad \forall\ i \in I$$

volendo posso condensare il tutto in:

$$x_i \leq U_i y_i \qquad \forall\ i \in I$$

$$x_i \geq \varepsilon y_i \qquad \forall\ i \in I$$

$$x_E \geq L_E$$

oppure

$$x_i \geq \varepsilon y_i \qquad \forall\ i \in I \setminus \{E\}$$

$$x_E \geq L_E y_E$$