

Una pasticceria è specializzata nella produzione di torte per matrimoni. La realizzazione di ciascuna torta richiede 1 kg di cioccolato, 0.5 kg di panna e 1 kg di crema. Per l'acquisto di tali prodotti l'azienda si può rivolgere a cinque fornitori A, B, C, D ed E che erogano i prodotti in lotti (combinazioni dei tre prodotti). Ciascun lotto è composto da diverse quantità, in kg, dei tre ingredienti, secondo la seguente tabella:

Fornitore	Cioccolato	Panna	Crema
A	a_{11}	a_{12}	a_{13}
B	a_{21}	a_{22}	a_{23}
C	a_{31}	a_{32}	a_{33}
D	a_{41}	a_{42}	a_{43}
E	a_{51}	a_{52}	a_{53}

Qualora la pasticceria decidesse di rifornirsi da un particolare fornitore, diciamo i , questa dovrà pagare un costo per il servizio pari ad f_i più un costo pari a c_i per ogni lotto acquistato presso il fornitore i . D'altro canto quest'ultimo può erogare al più U_i lotti. A causa di una storica rivalità tra i fornitori A e D, se la pasticceria deciderà di rivolgersi da A allora il fornitore D si rifiuterà di svolgere servizio alla pasticceria. Viceversa, vista la forte amicizia tra i fornitori B e C, se la pasticceria deciderà di rifornirsi da B allora dovrà pure rifornirsi presso C. Infine, per motivi commerciali, se la pasticceria deciderà di rifornirsi da E, allora dovrà acquistare almeno L_E lotti. Formulare un modello di programmazione lineare che permetta alla pasticceria di massimizzare il numero di torte prodotte, sapendo che questa dispone di un budget massimo pari a K e che non può acquistare porzioni di lotti.

$$\sum_{i \in I} (f_i y_i + c_i x_i) \leq K$$

$$x_i \leq U_i y_i \quad \forall i \in I$$

$$x_i \geq \varepsilon y_i \quad \forall i \in I \setminus \{E\} \quad \text{se } x_i = 0 \text{ allora } y_i = 0$$

$$x_E \geq L_E y_E$$

possiamo scegliere $\varepsilon = L_E$. Infatti:

- se $x_E = 0$ allora $y_E = 0$
- se decidiamo di rifornirci da E, la y_E sarà uguale a 1 e il vincolo diventa $x_E \geq L_E$.

CI: kg di cioccolato totali

P: kg di panna totali

CR: kg di crema

$$C1 = a_{11} x_A + a_{21} x_B + \dots + a_{51} x_E$$

$$P = a_{12} x_A + a_{22} x_B + \dots + a_{52} x_E$$

$$CR = a_{13} x_A + a_{23} x_B + \dots + a_{53} x_E$$

$$\max \min \{C1, 2P, CR\}$$

perché da 1 kg di panna posso ricavare 2 torte

$$Z = \min \{C1, 2P, CR\}$$

∞

$$\max Z$$

$$s.t. \quad Z \leq a_{11} x_A + a_{21} x_B + \dots + a_{51} x_E$$

$$Z \leq 2(a_{12} x_A + a_{22} x_B + \dots + a_{52} x_E)$$

$$Z \leq a_{13} x_A + a_{23} x_B + \dots + a_{53} x_E$$

$$\sum_{i \in I} (f_i y_i + c_i x_i) \leq K$$

$$x_i \leq U_i y_i \quad \forall i \in I$$

$$x_i \geq \varepsilon y_i \quad \forall i \in I \setminus \{0\}$$

$$x_E \geq L_E y_E$$

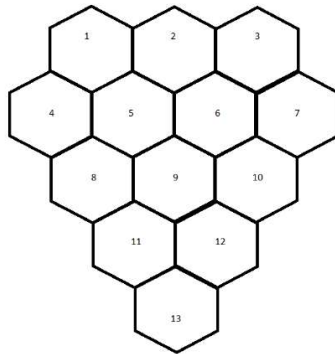
$$Y_D \leq 1 - Y_A$$

$$Y_C \geq Y_B$$

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in I$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I$$

L'Azienda Sanitaria Locale (ASL) di una città desidera localizzazione delle farmacie. La città è formata da 13 quartieri, come illustrato nella seguente figura.



Una farmacia può essere costruita in qualsiasi quartiere ed è in grado di servire il quartiere dove viene realizzata ed i quartieri adiacenti. Formulare un problema di programmazione lineare che permetta di determinare il numero minimo di farmacie al fine di servire tutti i quartieri della città sapendo che:

- ❖ Se si apre la farmacia nel quartiere 5, si può aprire al più una farmacia tra i quartieri 10 e 13
- ❖ Se si aprono le farmacie nei quartieri 4 e 12, non si può aprire la farmacia nel quartiere 6.

$$I = \{1, \dots, 13\}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se apre la farmacia nel quartiere } i \in I \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min \sum_{i \in I} y_i$$

$$y_1 + y_2 + y_4 + y_5 \geq 1$$

⋮

$$y_{11} + y_{12} + y_{13} \geq 1$$

quartiere 1

⋮

quartiere 13

Vincoli di tipo if - then

$$y_5 = 1 \rightarrow y_{10} + y_{13} \leq 1$$

$$y_4 + y_{12} = 2 \rightarrow y_6 = 0$$

— variabile indicatrice (binaria) a 0

$$(Y_4 + Y_{12} = 2) \rightarrow (Y_6 = 0)$$

— Variabile indicatrice
(binaria) a 0
o a 1

— espressione lineare

In generale:

$$\begin{matrix} \sigma = 0 \\ \circ \\ \sigma = 1 \end{matrix} \rightarrow \sum_i a_i x_i \geq b$$

oppure

$$\sum_i a_i x_i \geq b \rightarrow \begin{matrix} \sigma = 0 \\ \circ \\ \sigma = 1 \end{matrix}$$

far comparire 0

$$\sigma = 1 \rightarrow \sum_i a_i x_i \geq b$$

$$1 - \sigma = 0 \rightarrow \sum_i a_i x_i - b \geq 0$$

immaginare di
far comparire i
due zeri

$$(*) \quad \sum_i a_i x_i - b \geq \alpha (1 - \sigma), \quad \text{con } \alpha \text{ costante da determinare}$$

Se $\sigma = 1$ la (*) diventa:

$$\sum_i a_i x_i - b \geq \cancel{\alpha (1 - 1)}$$

$$\sum_i a_i x_i \geq b$$

effettivamente l'implicazione è verificata.

Ma se $\sigma = 0$, devo fare in modo di non sporcare il modello aggiungendo un vincolo fuorviante. Per questo motivo si mette α (da determinare)

Se $\sigma = 0$ la (*) diventa:

$$\sum_i a_i x_i - b \geq \alpha$$

$$\alpha \leq \sum_i a_i x_i - b$$

ovvero α deve essere un lower bound (diciamo m) dell'espressione $\sum_i a_i x_i - b$

In definitiva:

$$\sum_i a_i x_i - b \geq m(\sigma - 1)$$

$$\gamma_5 = 1 \rightarrow \gamma_{10} + \gamma_{13} \leq 1$$

$$1 - \gamma_5 = 0 \rightarrow \gamma_{10} + \gamma_{13} - 1 \leq 0$$

× $\alpha(\dots)$

$$\gamma_{10} + \gamma_{13} - 1 \leq \alpha(1 - \gamma_5)$$

se $\gamma_5 = 1$ l'implicazione è vera

se $\gamma_5 = 1$ l'implicazione è vero

se $\gamma_5 = 0$

$$\gamma_{10} + \gamma_{13} - 1 \leq \alpha$$

$$\alpha \geq \gamma_{10} + \gamma_{13} - 1$$

Quindi α è un upper bound di $\gamma_{10} + \gamma_{13} - 1$

$$\gamma_{10} + \gamma_{13} - 1 \leq M(1 - \gamma_5)$$

Poiché il massimo di $\gamma_{10} + \gamma_{13} - 1$ si ottiene per $\gamma_{10} = \gamma_{13} = 1$, posso scegliere:

$$M = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$\gamma_{10} + \gamma_{13} - 1 \leq 1 - \gamma_5$$

$$\boxed{\gamma_{10} + \gamma_{13} + \gamma_5 \leq 2} \quad (**)$$

Verifica:

se $\gamma_5 = 1$, la (**) diventa:

$\gamma_{10} + \gamma_{13} \leq 1$ e quindi posso aprire al più una farmacia

se invece $\gamma_5 = 0$, la (**) diventa:

$\gamma_{10} + \gamma_{13} \leq 2$ e il vincolo è ininfluente.

∞

$$\gamma_4 + \gamma_{12} = 2 \rightarrow \gamma_6 = 0$$

CONTRONOMINALE (contrapositive)

Dire $A \rightarrow B$ è equivalente a $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$

Es:

A = "piove"

B = "prendo l'ombrello"

$A \rightarrow B$ se piove prendo l'ombrello

$\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ se non prendo l'ombrello, allora non piove

$$\underbrace{\gamma_4 + \gamma_{12} = 2}_A \rightarrow \underbrace{\gamma_6 = 0}_B$$

$$\bar{B} \rightarrow \bar{A}$$

$$\gamma_6 = 1 \rightarrow \gamma_4 + \gamma_{12} \neq 2$$

Perché γ_4 e γ_{12} sono variabili binarie, l'espressione $\gamma_4 + \gamma_{12}$ può assumere al più valore 2 e dunque dire $\gamma_4 + \gamma_{12} = 2$ è come dire $\gamma_4 + \gamma_{12} \geq 2$.

$$\gamma_4 + \gamma_{12} \geq 2 \rightarrow \gamma_6 = 0$$

$$Y_6 = 1 \rightarrow Y_4 + Y_{12} < 2$$

$$Y_6 = 1 \rightarrow Y_4 + Y_{12} \leq 2 - \varepsilon \quad \varepsilon > 0 \text{ opportuno}$$

Perché Y_4 e Y_{12} sono binarie, posso scegliere $\varepsilon = 1$

$$Y_6 = 1 \rightarrow Y_4 + Y_{12} \leq 1$$

$$1 - Y_6 = 0 \rightarrow Y_4 + Y_{12} - 1 \leq 0$$

$$Y_4 + Y_{12} - 1 \leq \alpha (1 - Y_6)$$

$$\text{se } Y_6 = 0$$

$$Y_4 + Y_{12} - 1 \leq \alpha$$

α è un u.b. di $Y_4 + Y_{12} - 1$

$$\alpha = M$$

$$\text{Scego, ad es. } \alpha = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$Y_4 + Y_{12} - 1 \leq 1 - Y_6$$

$$\boxed{Y_4 + Y_{12} + Y_6 \leq 2} \quad (***)$$

Se $Y_4 = Y_{12} = 1$ la (***) diventa:

$$2 + Y_6 \leq 2, \quad Y_6 \leq 0 \quad \text{ovvero} \quad Y_6 = 0$$

$$\text{se } (Y_4 = 0 \wedge Y_{12} = 1) \vee (Y_4 = 1 \wedge Y_{12} = 0)$$

$\uparrow$ nel

$\uparrow$ et

$$1 + Y_6 \leq 2, \quad Y_6 \leq 1 \quad \text{ininfluente}$$

$$\text{se } Y_4 = Y_{12} = 0, \quad Y_6 \leq 2 \quad \text{ininfluente}$$

∞

$$Y_A = 1 \rightarrow Y_D = 0$$

$$1 - Y_A = 0 \rightarrow Y_D \leq 0$$

$$Y_D \leq \alpha (1 - Y_A)$$

$$\text{se } Y_A = 0, \quad Y_D \leq \alpha$$

$\alpha = M$. In particolare, pero scegliere $M = 1$

$$Y_D \leq 1 - Y_A$$

$$Y_B = 1 \rightarrow Y_C = 1$$

$$1 - Y_B = 0 \rightarrow Y_C \geq 1$$

$$1 - Y_B = 0 \rightarrow Y_C - 1 \geq 0$$

$$Y_C - 1 \geq \alpha (1 - Y_B)$$

$$\text{Se } Y_B = 0 \quad \alpha \leq Y_C - 1$$

$$\alpha = m$$

Pero scegliere $m = -1$

$$Y_C - 1 \geq - (1 - Y_B)$$

$$Y_C - 1 \geq -1 + Y_B$$

$$\boxed{Y_C \geq Y_B}$$

∞

$$x > 0 \rightarrow Y = 1$$

$$Y = 0 \rightarrow x = 0$$

$$Y = 0 \rightarrow x \leq 0$$

$$x \leq \alpha Y$$

se $Y = 1$ $\alpha \geq x$ è un u.b. di x

quindi $\alpha = M$

$$x \leq M Y$$

$$x = 0 \rightarrow Y = 0$$

$$Y = 1 \rightarrow x > 0$$

$$1 - Y = 0 \rightarrow x \geq \varepsilon$$

$$1 - Y = 0 \rightarrow x - \varepsilon \geq 0$$

$$x - \varepsilon \geq \alpha (1 - Y)$$

$$\text{Se } Y = 0 \quad \alpha \leq x - \varepsilon$$

α è un l. b. di $x - \varepsilon$

Posso scegliere $\alpha = 0 - \varepsilon = -\varepsilon$

$$x - \varepsilon \geq -\varepsilon (1 - Y)$$

$$x - \cancel{\varepsilon} \geq -\cancel{\varepsilon} + \varepsilon Y$$

$$x - \cancel{\varepsilon} \geq -\cancel{\varepsilon} + \varepsilon y$$

$$x \geq \varepsilon y$$