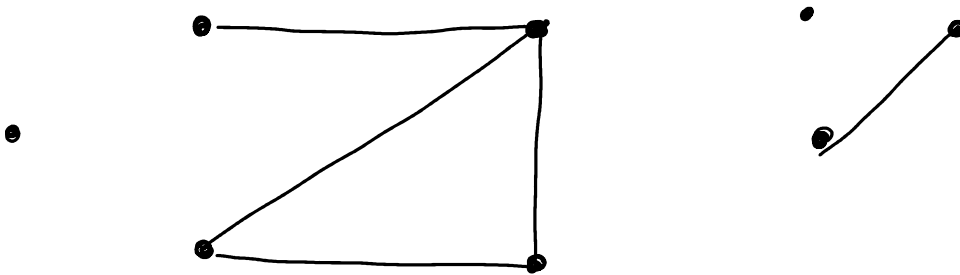
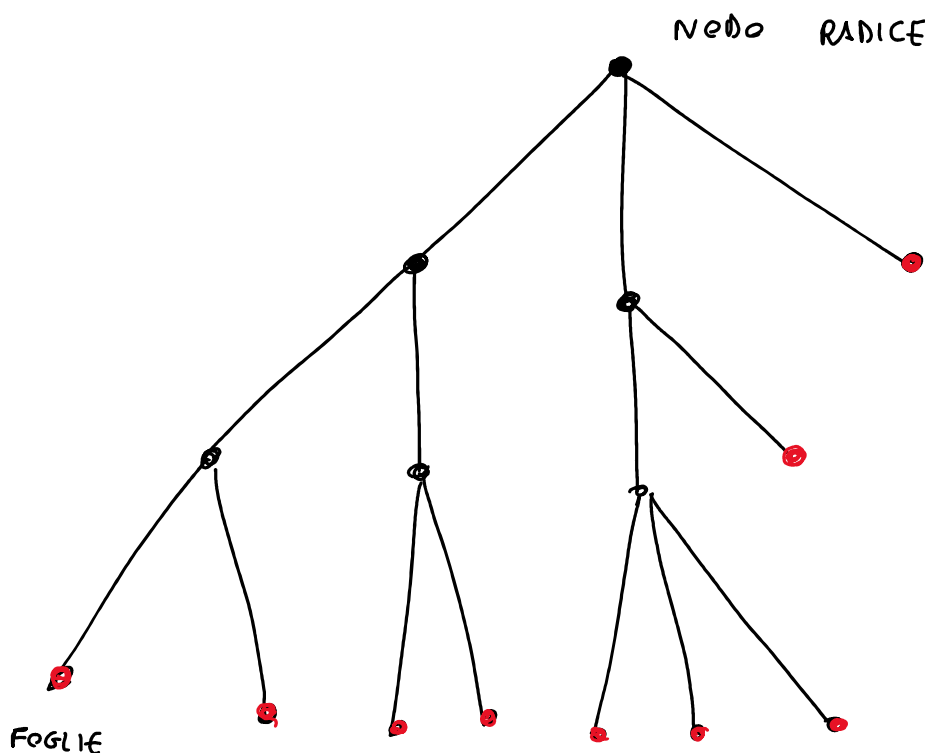


PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA (PLI) (ILP)

ALGORITMO DEL BRANCH AND BOUND



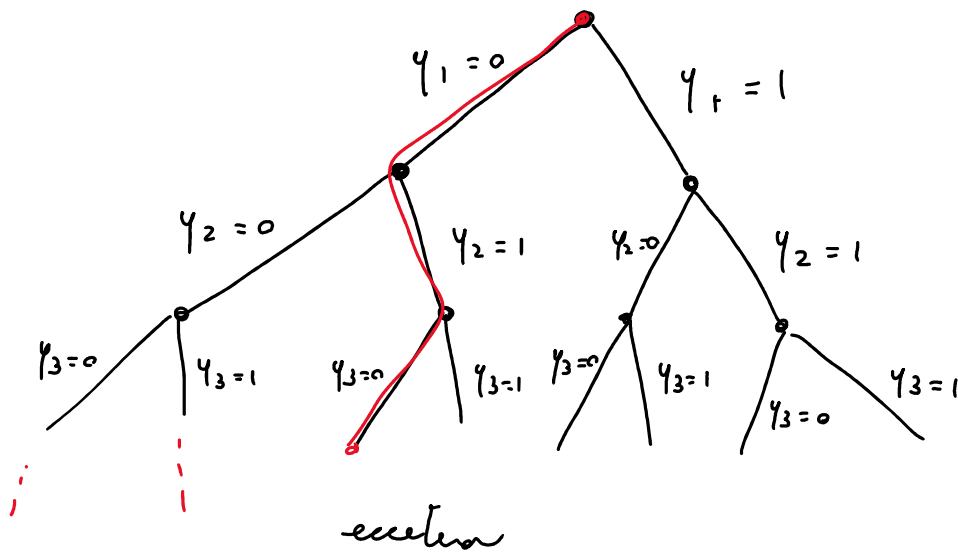
$G(N, A)$
↑
grafo
↑
insieme dei nodi
↑
insieme degli archi



ESEMPIO: n variabili binarie

Abbiamo al più 2^n soluzioni

Valutare tutte (e verificare che il soddisfacimento dei vincoli) è in principio troppo oneroso.



è una sol. con $y_1 = 0, y_2 = 1$ e $y_3 = 0$ ecc...

L'algoritmo del branch and bound sfrutta questa struttura ad albero, ma grazie a tre criteri, detti di fathoming (potatura), in linea di principio eviteremo di esplorare tutto l'albero.

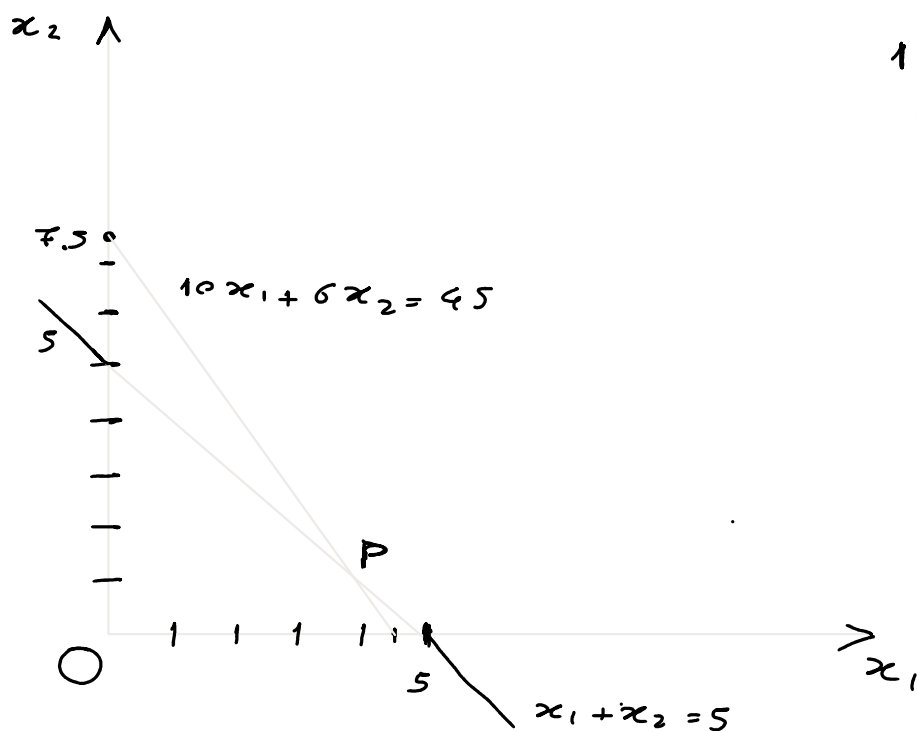
$$\max \quad 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} : \quad x_1 + x_2 \leq 5$$

$$0 + 0 \leq 5 \quad 0 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$



$$10x_1 + 6x_2 = 45$$

$$\text{Se } x_1 = 0:$$

$$6x_2 = 45$$

$$x_2 = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}$$

$$\text{Se } x_2 = 0$$

$$10x_1 = 45$$

$$x_1 = 4.5$$

$$P \begin{cases} 10x_1 + 6x_2 = 45 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4$$

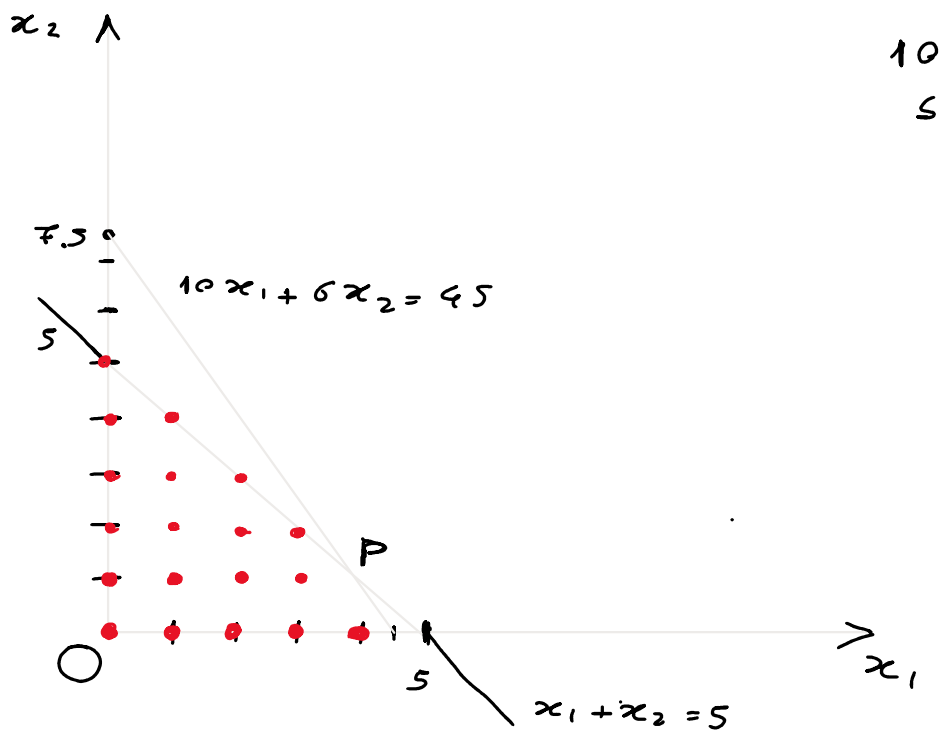
$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 45 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 45 - 30 = 15$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 10 & 45 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 50 - 45 = 5$$

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{15}{4}$$

$$x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{5}{4}$$

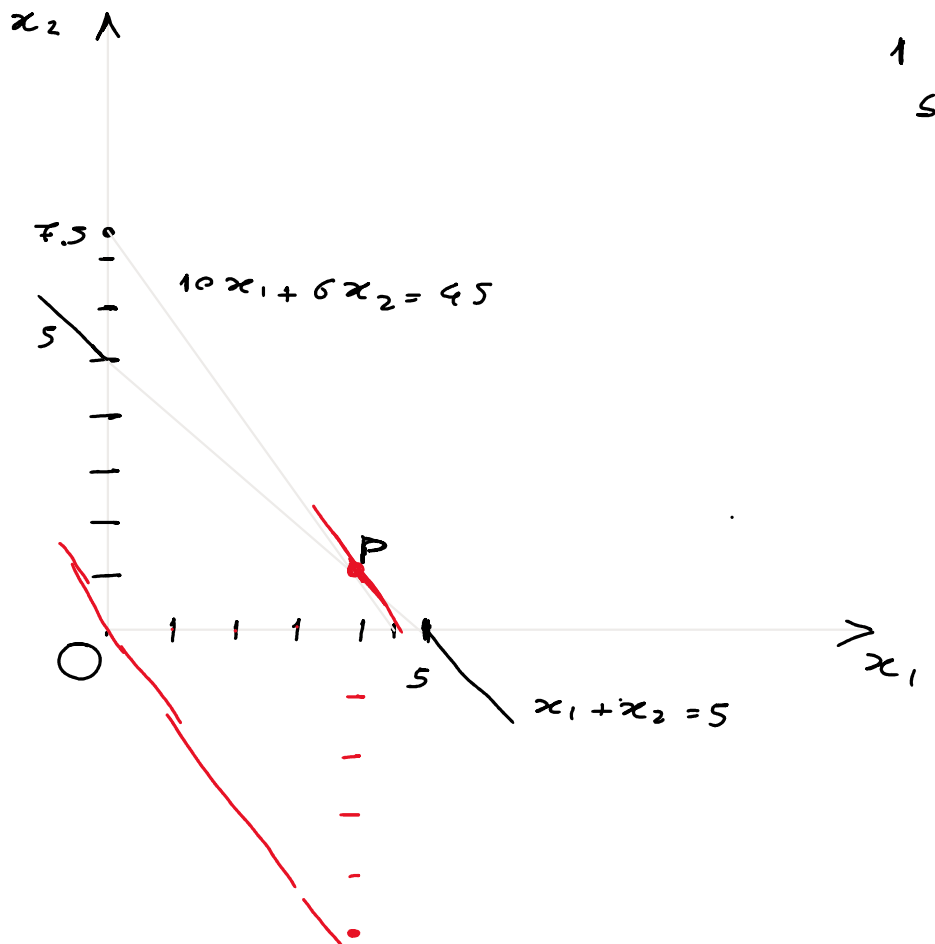
$$P\left(\frac{15}{4}, \frac{5}{4}\right) = (3.75, 1.25)$$



- ① Rilassamento continuo: prendiamo le variabili intere e togliamo il vincolo di interezza.
 Otteniamo un modello che è il nodo radice dell'albero del branch and bound.

Nodo 0

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$4x_2 = -5x_1 + Z$$

$$x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + \frac{Z}{4}$$

Se $Z = 0$ $x_2 = -\frac{5}{4}x_1$

$P\left(\frac{15}{4}, \frac{5}{4}\right)$ è la sol. ottima del problema rilassato
ma non del problema originale.

$$Z = 5 \cdot \frac{15}{4} + 4 \cdot \frac{5}{4} = \frac{75}{4} + \frac{20}{4} = \frac{95}{4} = 23,75$$

∞

$$B = \{ \underline{-2}, 1, 3 \}$$

$$\max B = 3$$

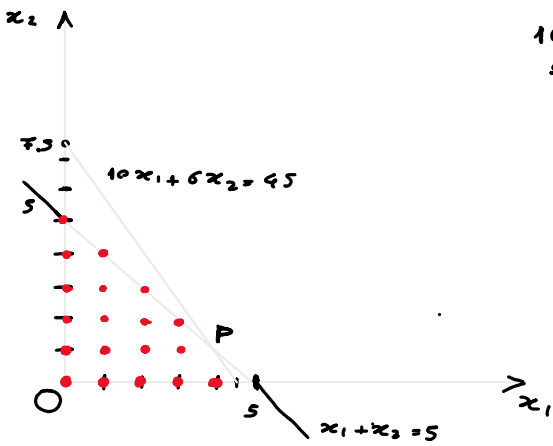
$$\min B = -2$$

✓ - / - / -)

$$A = \{-3, \overbrace{-2, 1, 3}, 4\} \quad \begin{array}{l} \max A = 4 \\ \min A = -3 \end{array}$$

$$B \subseteq A$$

$\max A$ è un upper bound del $\max B$
 $\min A$ è un lower bound del $\min B$



10
5

2 Poiché l'insieme delle soluzioni del problema di partenza è un sottoinsieme dell'insieme delle soluzioni del problema rilassato, allora $Z = 23,75$ è un upper bound del valore ottimo della F. O.

per il problema originale.

③ Poiché i coefficienti in F.O. sono interi e le variabili pure sono intere, allora potremo raggiungere al più $[23, 75] = 23$.

Quindi il nuovo UB è pari a 23.

$$UB = 23$$

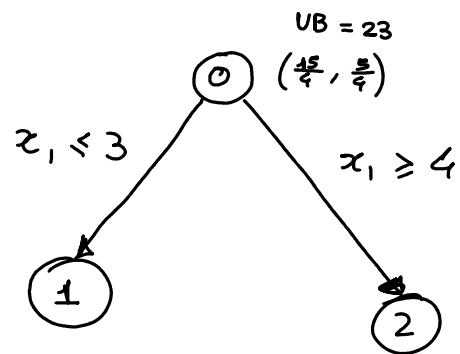
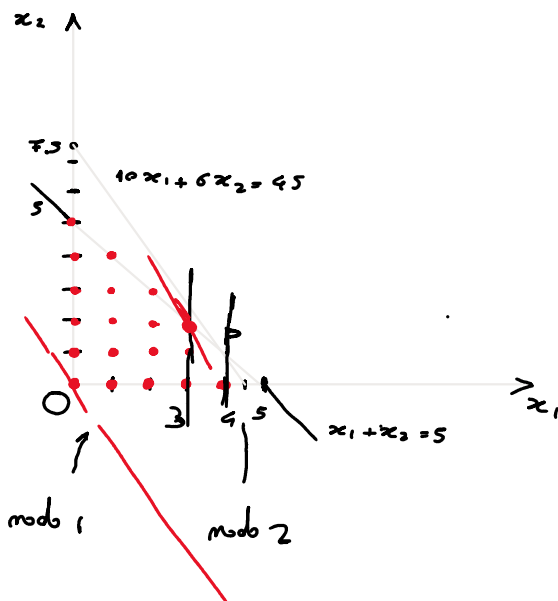
$$\textcircled{0} \left(\frac{15}{4}, \frac{5}{4} \right)$$

④ Poiché il problema rilassato fornisce un UB del problema originale, se la sol. ottima del problema rilassato è intera, allora è ottima anche per il problema originale (perché di meglio non si può fare).

In caso contrario,
⑤ Si sceglie una variabile non intera e si effettua su di essa il cosiddetto "branching".

$$x_1 = \frac{15}{4} = 3.75$$

$$\circ \quad x_1 \leq 3 \quad \circ \quad x_1 \geq 4$$



Nodo 1

$$\max \quad 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t. : } x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \leq 3$$

~~$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$~~

↑

problema rilassato: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

La sol. ottima del problema rilassato è:

$$(x_1, x_2) = (3, 2) \quad \text{ed è intera!}$$

CRITERIO DI FATHOMING: non essendoci ~~nessuna~~ ^{variabili} non intere, non possiamo effettuare il branching e dunque chiudiamo il nodo 1 in quanto non genererà nodi figli.

Abbiamo trovato una soluzione intera che risolve all'ottimo il problema del nodo 1 ma non necessariamente il problema di partenza.

Abbiamo però trovato una cosiddetta soluzione incombente, ovvero una sol. ammissibile per il problema di partenza (in quanto soddisfa tutti i vincoli, anche quelli di interezza) e candidata a essere quella ottima (ma non è detto).

Per questo motivo $(x_1, x_2) = (3, 2)$ è un L.B. del problema di partenza

$$Z = 5x_1 + 4x_2 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 15 + 8 = 23$$

che corrisponde all'upper bound attuale e dunque la sol. intera appena trovata è anche ottima, senza bisogno di enumerare i nodi.

...ma appena trovata è anche ottima,
 senza bisogno di esplorare il nodo ② e la sua
 discendenza (altro criterio di fathoming).

sol.
 ottima

$UB = 23$
 $(3, 2)$
 $LB = 23$

