

Esercizio 2: una dieta povera di dolci

Un atleta desidera trovare le quantità ottimali di pasta, latte, uova, verdura e dolce per soddisfare le quantità minime di nutrienti previste dalla sua dieta. La seguente tabella riporta tali requisiti nutrizionali minimi, la quantità di nutrienti per ciascun grammo di alimento ed i costi al grammo di ciascun alimento.

	Pasta	Latte	Uova	Verdura	Dolce	Requisiti nutrizionali minimi
Calorie	100	90	110	80	420	2000
Proteine	4	8	13	2	4	50
Calcio	2	285	54	80	22	700
Costo/grammo	2	3	4	19	20	

L'atleta desidera sottoporsi ad una dieta povera di dolci, che prevede le seguenti scelte:

- ❖ Almeno 10 g di latte, se si decide di inserire il latte nella dieta;
- ❖ Se il numero di grammi fra pasta e uova è di almeno 30 g, allora la quantità di dolci deve essere inferiore a 10 g.

Formulare un modello in programmazione lineare che permetta di descrivere tale problema, minimizzando il costo complessivo degli alimenti.

$$I = \{1, \dots, 5\}$$

|
|
pasta
dolce

x_i : quantità in grammi di cibo $i \in I$

min $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 + 20x_5$

s.t.: $100x_1 + 90x_2 + 110x_3 + 80x_4 + 420x_5 \geq 2000$

eccetera

min $\underline{C}^T \underline{x}$

s.t.: $\underline{A} \underline{x} \geq \underline{b}$

$$x \geq 0$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{se } x_2 > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{andata} \\ \text{ritorno} \end{array}$$

$$x_2 > 0 \rightarrow y_2 = 1$$

$$x_2 \leq M y_2$$

$$y_2 = 1 \rightarrow x_2 > 0$$

$$x_2 \geq \varepsilon y_2$$

$$x_2 \leq M y_2$$

$$x_2 \geq \varepsilon y_2$$

$$x_1 + x_3 \geq 30 \rightarrow x_5 < 10$$

$$x_1 + x_3 \geq 30 \rightarrow \sigma = 1$$

$$\sigma = 1 \rightarrow x_5 < 10$$

$$\underbrace{x_1 + x_3 \geq 30}_A \rightarrow \underbrace{\sigma = 1}_B$$

$$A \rightarrow B$$

$$\bar{B} \rightarrow \bar{A}$$

$$\sigma = 0 \rightarrow x_1 + x_3 < 30$$

$$\sigma = 0 \rightarrow x_1 + x_3 \leq 30 - \varepsilon$$

$$\sigma = 0 \rightarrow x_1 + x_3 - 30 + \varepsilon \leq 0$$

$$x_1 + x_3 - 30 + \varepsilon \leq \alpha \sigma$$

se $\sigma = 1$

$$x_1 + x_3 - 30 + \varepsilon \leq \alpha$$

$$\alpha \geq x_1 + x_3 - 30 + \varepsilon$$

α è un UB della suddetta espressione

$$\alpha = M$$

$$x_1 + x_3 \leq 30 - \varepsilon + M \sigma$$

$$x_1 + x_3 \leq 30 - \varepsilon + 11\sigma$$

$$\sigma = 1 \rightarrow x_5 < 10$$

$$1 - \sigma = 0 \rightarrow x_5 \leq 10 - \varepsilon$$

$$1 - \sigma = 0 \rightarrow x_5 - 10 + \varepsilon \leq 0$$

$$x_5 - 10 + \varepsilon \leq \alpha(1 - \sigma)$$

Se $\sigma = 0$, $\alpha \geq x_5 - 10 + \varepsilon$

è un UB dell'espressione

$$x_5 \leq 10 - \varepsilon + M(1 - \sigma)$$