MODELLI ORIENTATI AL PROBLEM SOLVING

unIMC
l'umanesimo che innova

PARTE II

PROF. MAURO MARIA BALDI
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E DIRITTO
UNIVERSITÀ DI MACERATA

Prepariamo un Cuba libre

- Un barman vuole preparare almeno 10 litri di Cuba Libre (rum chiaro, Cola e limone) **nel rispetto della legge.**
- La disponibilità ed il costo dei tre diversi ingredienti è indicata in tabella

Ingredienti	Disponibilità massima	Costo x litro
Rum chiaro	6 l	15 €
Cola	15 l	1 €
Limone	3 l	2.5 €

- Le dosi ideali sono: almeno il 25% di rum chiaro e il 50% di Cola e non più del 10% di limone
- Quale miglior combinazione dei tre tipi di ingredienti minimizza la spesa?

Modello matematico

- Indichiamo con: R, C, L le rispettive quantità di Rum chiaro, Cola e Limone (variabili decisionali)

- Queste variabili sono chiaramente non negative (non ha senso, ad esempio, dire -10 cl di cola)

- Inoltre queste variabili sono continue (possiamo ad esempio avere 1.5 cl di lime)

- Pertanto possiamo scrivere $R \geq 0$, $C \geq 0$, $L \geq 0$ oppure $R, C, L \in \mathbb{R}^+$

- Cosa vuol dire «disponibilità massima»?

$R \leq 6,\ C \leq 15,\ L \leq 3$ (anche detti vincoli di capacità)

Osserviamo che possiamo condensare i vincoli di non negatività con quelli sulla disponibilità massima nel seguente modo:

$$0 \leq R \leq 6, \qquad 0 \leq C \leq 15, \qquad 0 \leq L \leq 3$$

Modello matematico

- Cosa vuol dire «almeno 10 litri di Cuba Libre»?

$$(R + C + L) \geq 10 \qquad \text{(vincolo lineare)}$$

osserviamo che il vincolo può essere riscritto nel seguente modo:

$$R + C + L - 10 \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix} - 10 \geq 0$$

Pertanto:

$$\boldsymbol{a}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix}, \quad b_1 = 10,$$

ove il pedice 1 sta ad indicare che si tratta del primo vincolo

Modello matematico

- Cosa vuol dire «almeno il 25% di rum chiaro ?»

  $R \geq 0.25 \cdot (R + C + L)$ (vincolo lineare)

- Cosa vuol dire «almeno il 50% di Cola ?»

  $C \geq 0.50 \cdot (R + C + L)$ (vincolo lineare)

- Cosa vuol dire «non più del 10% di limone?»

  $L \leq 0.10 \cdot (R + C + L)$ (vincolo lineare)

- Il costo di preparazione del cuba libre è dato da:

  $\min\limits_{R,C,L}(15 \cdot R + 1 \cdot C + 2.5 \cdot L)$ (funzione obiettivo lineare)

Osserviamo che la funzione obiettivo può essere scritta anche nella seguente forma compatta:

$$\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \text{ con } \boldsymbol{c}^T = [15 \quad 1 \quad 2.5] \text{ e, come prima, } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix}$$

Il modello definitivo

$$\min_{R,C,L}(15 \cdot R + C + 2.5 \cdot L)$$

soggetto a:

- $(R + C + L) \geq 10$
- $R \geq 0.25 \cdot (R + C + L)$
- $\mathrm{C} \geq 0.50 \cdot (R + C + L)$
- $\mathrm{L} \leq 0.10 \cdot (R + C + L)$
- $0 \leq R \leq 6$
- $0 \leq C \leq 15$
- $0 \leq L \leq 3$

Si tratta, quindi, di un problema di programmazione lineare a variabili continue

Risolviamo un Sudoku

- Siamo alle prese con il seguente sudoku, ma non sappiamo più dove sbattere la testa

```
8 . . | . . . | . . .
. . 3 | 6 . . | . . .
. 7 . | . 9 . | 2 . .
------+-------+------
. 5 . | . . 7 | . . .
. . . | . 4 5 | 7 . .
. . . | 1 . . | . 3 .
------+-------+------
. . 1 | . . . | . 6 8
. . 8 | 5 . . | . 1 .
. 9 . | . . . | 4 . .
```

- Oltre a sbirciare nelle soluzioni, quali altri strumenti possiamo utilizzare se proprio vogliamo arrenderci?

La griglia

➢ Iniziamo a preparare una griglia con la seguente numerazione:

```
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
| (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) | (1,7) | (1,8) | (1,9) |
| (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) | (2,7) | (2,8) | (2,9) |
| (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) | (3,7) | (3,8) | (3,9) |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
| (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) | (4,7) | (4,8) | (4,9) |
| (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) | (5,7) | (5,8) | (5,9) |
| (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) | (6,7) | (6,8) | (6,9) |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
| (7,1) | (7,2) | (7,3) | (7,4) | (7,5) | (7,6) | (7,7) | (7,8) | (7,9) |
| (8,1) | (8,2) | (8,3) | (8,4) | (8,5) | (8,6) | (8,7) | (8,8) | (8,9) |
| (9,1) | (9,2) | (9,3) | (9,4) | (9,5) | (9,6) | (9,7) | (9,8) | (9,9) |
+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+
```

Le variabili

Definiamo le seguenti variabili binarie:

$$x_{k,i,j} = \begin{cases} 1 & se\ nella\ cella\ (i,j) c'è\ la\ cifra\ k \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Regola 1

Ogni cella deve contenere un numero da 1 a 9:

$$\sum_{k=1}^{9} x_{k,i,j} = 1 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, 9\}, \forall\, j \in \{1, \dots, 9\}$$

Regola 2

Ogni riga deve contenere tutti i numero da 1 a 9:

$$\sum_{j=1}^{9} x_{k,i,j} = 1 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, 9\}, \forall\, k \in \{1, \dots, 9\}$$

Regola 3

Ogni colonna deve contenere tutti i numero da 1 a 9:

$$\sum_{i=1}^{9} x_{k,i,j} = 1 \quad \forall\, j \in \{1, \dots, 9\}, \forall\, k \in \{1, \dots, 9\}$$

Regola 4

Ogni riquadro deve contenere tutti i numero da 1 a 9:

$$\sum_{i,j:(i,j)\in RQ_h} x_{k,i,j} = 1 \quad \forall\, h \in \{1, \dots, 9\}, \forall\, k \in \{1, \dots, 9\},$$

Ove RQ_h è l'insieme delle celle nel riquadro h.

E la funzione obiettivo?

Questo è un caso speciale di problema di ottimizzazione senza funzione obiettivo o, meglio, di funzione obiettivo costante. L'enfasi, infatti, si pone sulla ricerca di una soluzione ammissibile (in realtà l'unica) piuttosto che sulla migliore soluzione.
Ricapitolando, il nostro modello è:

$$\max 1$$

s.t.: $\sum_{k=1}^{9} x_{k,i,j} = 1 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, 9\}, \forall\, j \in \{1, \dots, 9\}$

$$\sum_{j=1}^{9} x_{k,i,j} = 1 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, 9\}, \forall\, k \in \{1, \dots, 9\}$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_{k,i,j} = 1 \quad \forall\, j \in \{1, \dots, 9\}, \forall\, k \in \{1, \dots, 9\}$$

$$\sum_{i,j:(i,j)\in RQ_h} x_{k,i,j} = 1 \quad \forall\, h \in \{1, \dots, 9\}, \forall\, k \in \{1, \dots, 9\}$$

Un regalo di compleanno «ottimizzato»

- Vogliamo comprare per il nostro compleanno (plurale maiestatis) un certo numero n di giochi sulla piattaforma Steam avendo a disposizione:
  - 150 euro come budget massimo
  - 150 GB di spazio sul pc
- Vogliamo i giochi che più ci piacciono (su una scala da 1 a 5)

						
Costo	39,99€	39,99€	59,99€	59,99€	19,99€	29,99€
Spazio	30 GB	40 GB	12 GB	46 GB	12 GB	72 GB
Gradimento	2	5	2	5	3	5

Modello matematico

- Il comprare o no un videogioco può essere modellizzato per mezzo di variabili decisionali binarie associate ad ogni gioco

$x_i \in \{0,1\}$ per $i = 1, \dots, n$
- $x_i = 1$ lo compriamo
- $x_i = 0$ non lo compriamo

(variabili binarie)

- Non superare il budget massimo di 150 euro può essere espresso dalla seguente relazione

$$39{,}99 \cdot x_1 + 39{,}99 \cdot x_2 + 59{,}99 \cdot x_3 + 59{,}99 \cdot x_4 + 19{,}99 \cdot x_5 + 29{,}99 \cdot x_6 \le \underbrace{150\ €}_{\text{Budget massimo}}$$

(vincolo lineare)

- Non superare la memoria massima può essere espresso dalla seguente relazione

$$30 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 46 \cdot x_4 + 12 \cdot x_5 + 72 \cdot x_6 \le \underbrace{150}_{\text{Spazio massimo}}$$

(vincolo lineare)

- Volere i giochi che più ci piacciono si esprime nel seguente modo:

$$\max(2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6)$$

(funzione obiettivo lineare)

Il modello definitivo

- Volere i giochi che più ci piacciono, avendo 200 euro di budget e 100GB si spazio corrisponde a:

$$\max(2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6)$$

soggetto a:

- $39{,}99 \cdot \mathrm{x}_1 + 39{,}99 \cdot \mathrm{x}_2 + 59{,}99 \cdot \mathrm{x}_3 + 59{,}99 \cdot \mathrm{x}_4 + 19{,}99 \cdot \mathrm{x}_5 + 29{,}99 \cdot \mathrm{x}_6 \leq 150$
- $30 \cdot \mathrm{x}_1 + 40 \cdot \mathrm{x}_2 + 12 \cdot \mathrm{x}_3 + 46 \cdot \mathrm{x}_4 + 12 \cdot \mathrm{x}_5 + 72 \cdot \mathrm{x}_6 \leq 150$
- $x_i \in \{0,1\}, \ \forall\, i \ \in \{1, \dots, 6\}$

Si tratta, quindi, di un problema di programmazione lineare a variabili binarie, che sono un caso particolare di variabili intere

- Un modello di ottimizzazione di questo tipo prende il nome di Problema dello zaino (Knapsack)

Fantacalcio

- Vogliamo comprare una squadra di fantacalcio (23 giocatori) avendo a disposizione 250 milioni

- Vogliamo scegliere 3 portieri, 7 difensori, 8 centrocampisti e 5 attaccanti

- Ogni giocatore ha una quotazione ed una media di rendimento

Come costruiamo la squadra più forte?

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q	PG	G	A	AM	ES	RT	RR	RS	RP	MV	MM	MP
	Ronaldo C.	A	52	31	21	7	3	-	6	5	1	-	6.67	8.79	65.7
	Quagliarella F.	A	46	37	26	7	1	-	10	9	1	-	6.62	8.82	81.4
	Mertens D.	T (A)	40	34	16	9	1	-	1	1	-	-	6.16	8.05	64.3
	Zapata D.	A	40	37	23	7	5	-	2	1	1	-	6.51	8.41	70.3
	Ilicic J.	T (A)	35	31	12	6	4	1	1	-	1	-	6.41	7.77	42.2

Quale è la squadra migliore?

- Non possiamo comprare i 23 giocatori più forti:
  - Sforiamo il budget (779 milioni)
  - Abbiamo una squadra «leggermente» squilibrata (23 attaccanti, 1 centrocampista e 1 un portiere)

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q	PG	G	A	AM	ES	RT	RR	RS	RP	MV	MM	MP
	Ronaldo C.	A	52	31	21	7	3	-	6	5	1	-	6.67	8.79	65.7
	Quagliarella F.	A	46	37	26	7	1	-	10	9	1	-	6.62	8.82	81.4
	Mertens D.	T (A)	40	34	16	9	1	-	1	1	-	-	6.16	8.05	64.3
	Zapata D.	A	40	37	23	7	5	-	2	1	1	-	6.51	8.41	70.3
	Ilicic J.	T (A)	35	31	12	6	4	1	1	-	1	-	6.41	7.77	42.2
	Belotti A.	A	34	37	15	1	5	-	6	5	1	-	6.31	7.4	40.3
	Piatek K.	A	32	37	22	-	5	-	2	2	-	-	6.41	8.13	63.6

Quale è la squadra migliore?

- Non possiamo comprare la squadra più forte (5 attaccanti più forti, 8 centrocampisti più forti, etc.):
  - Sforiamo il budget (663)

5 attaccanti migliori

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q
	Ronaldo C.	A	52
	Quagliarella F.	A	46
	Mertens D.	T (A)	40
	Zapata D.	A	40
	Ilicic J.	T (A)	35

8 centrocampisti migliori

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q
	Chiesa F.	T (C)	25
	Perisic I.	T (C)	24
	Milinkovic S.	C	23
	De Paul R.	T (C)	23
	Khedira S.	C	23
	Nainggolan R.	T (C)	23
	Bonaventura G.	C	23
	Pastore J.	C	23

7 difensori migliori

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q
	Kolarov A.	D	24
	Izzo A.	D	22
	Koulibaly K.	D	22
	Di Lorenzo G.	D	20
	De Vrij S.	D	20
	Fazio F.	D	19
	Castagne T.	D	19

3 portieri migliori

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q
	Donnarumma G.	P	24
	Sirigu S.	P	24
	Szczesny W.	P	23

Come si può ottenere la squadra migliore?

- Comprare o no un giocatore può essere modellizzato per mezzo di variabili decisionali binarie associate

$x_i \in \{0,1\}$ per $i = 1, \dots, n$

- $x_i = 1$ lo compriamo
- $x_i = 0$ non lo compriamo

(variabili binarie)

- Non superare il budget massimo di 250 euro può essere espresso dalla seguente relazione
  - $\sum_{i=1}^{M} q_i \cdot x_i \leq \underbrace{250€}_{\text{Budget massimo}}$

- $q_i > 0$ valore del giocare

(vincolo lineare)

- Vogliamo avere 5 attaccanti in squadra
  - $\sum_{i=1}^{M} A_i \cdot x_i = 5$

- $A_i = 1$ se i è attaccante, 0 altrimenti

(vincolo lineare)

- Vogliamo la squadra più forte

$$\max\left(\sum_{i=1}^{M} MV_i \cdot x_i\right)$$

(funzione obiettivo lineare)

Come si può ottenere la squadra migliore?

- Volere la squadra più forte rispettando il budget e la composizione corrisponde al seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\max_x \left(\sum_{i=1}^{M} MV_i \cdot x_i \right)$$

soggetto a:

- $\sum_{i=1}^{M} q_i \cdot x_i \leq 250.000.000€$
- $\sum_{i=1}^{M} A_i \cdot x_i = 5$
- $\sum_{i=1}^{M} C_i \cdot x_i = 8$
- $\sum_{i=1}^{M} D_i \cdot x_i = 7$
- $\sum_{i=1}^{M} P_i \cdot x_i = 3$
- $x_i \in \{0,1\}$

con parametri:

- $A_i = 1$ se *i* è attaccante, 0 altrimenti
- $C_i = 1$ se *i* è centrocampista, 0 altrimenti
- $D_i = 1$ se *i* è difensore, 0 altrimenti
- $P_i = 1$ se *i* è portiere, 0 altrimenti

Si tratta nuovamente di un problema di programmazione lineare a variabili binarie

Anche in questo caso tale problema è considerato un Problema dello zaino (Knapsack)

Avatar vs Avengers

- Negli ultimi mesi molti si sono chiesti se Avengers Endgame avrebbe battuto Avatar al Box office USA

- L'incasso totale di Avatar è stato di circa 750 milioni

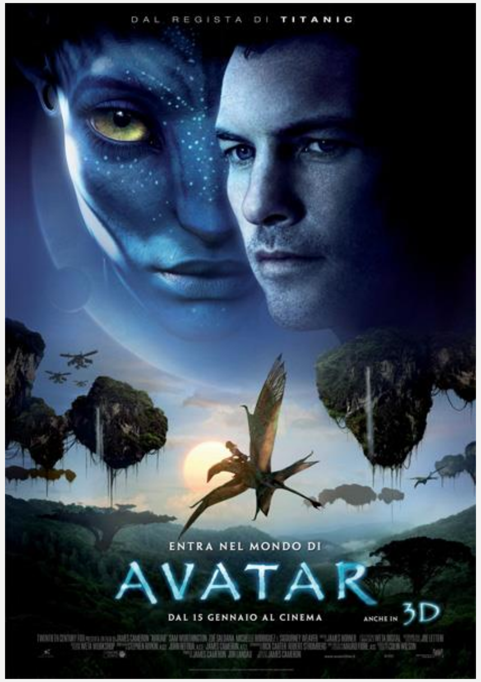
- Questo è il trend di incassi giornalieri dal 25 Aprile 7 Maggio

APRIL 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
21	22	23	24	25 Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	26 1 $157,461,641 - / - 4,662 / $33,776 $157,461,641 / 1	27 1 $109,264,122 -30.6% / - 4,662 / $23,437 $266,725,763 / 2
28 1 1 $90,389,244 $357,115,007 -17.3% / - - / - 4,662 / $19,389 $76,601 $357,115,007 / 3	29 1 $36,874,439 -59.2% / - 4,662 / $7,910 $393,989,446 / 4	30 1 $33,110,349 -10.2% / - 4,662 / $7,102 $427,099,795 / 5				

MAY 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
		Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	1 1 $25,251,991 -23.7% / - 4,662 / $5,417 $452,351,786 / 6	2 1 1 $21,542,852 $473,894,638 -14.7% / - - / - 4,662 / $4,621 $101,651 $473,894,638 / 7	3 1 $40,736,774 89.1% / -74.1% 4,662 / $8,738 $514,631,412 / 8	4 1 $61,527,049 51% / -43.7% 4,662 / $13,198 $576,158,461 / 9
5 1 1 $45,119,388 $147,383,211 -26.7% / -50.1% - / -58.7% 4,662 / $9,678 $31,614 $621,277,849 / 10	6 1 $10,709,607 -76.3% / -71% 4,662 / $2,297 $631,987,456 / 11	7 1 $12,518,963 16.9% / -62.2% 4,662 / $2,685 $644,506,419 / 12	[redacted]			



- Riesce Avengers a battere Avatar?

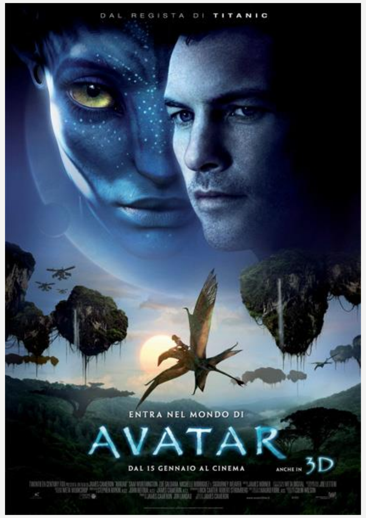
Avengers ha battuto Avatar?

- Abbiamo a disposizione i dati di vendita nel tempo

- Vogliamo costruire una retta di regressione lineare che interpoli i dati

$$y = ax + b \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

- Come scelgo a e b?

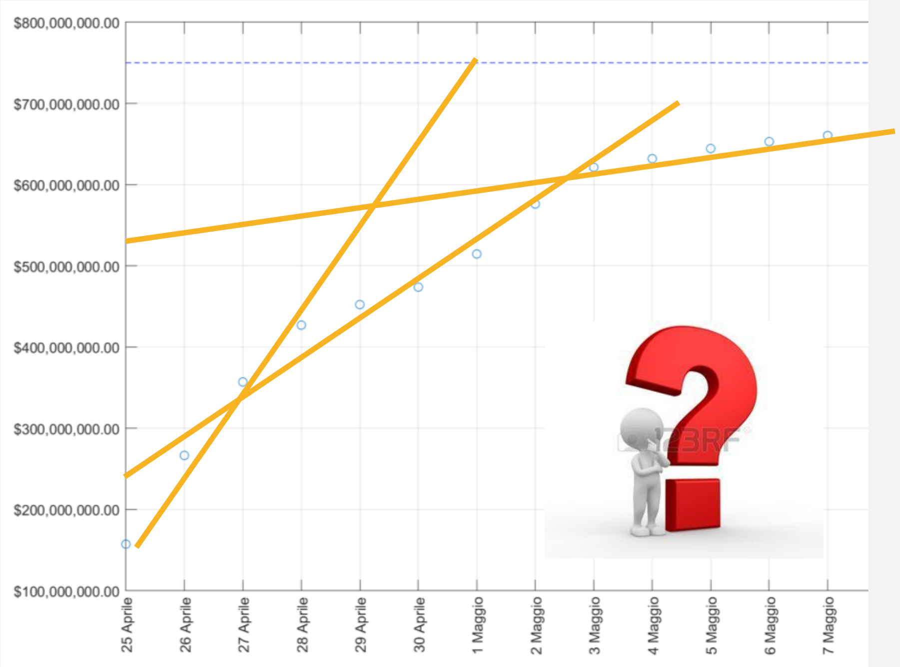


APRIL 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
21	22	23	24	25 Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	26 1 $157,461,641 - / - 4,662 / $33,776 $157,461,641 / 1	27 1 $109,264,122 -30.6% / - 4,662 / $23,437 $266,725,763 / 2
28 1 1 $90,389,244 $357,115,007 -17.3% / - - / - 4,662 / $19,389 $76,601 $357,115,007 / 3	29 1 $36,874,439 -59.2% / - 4,662 / $7,910 $393,989,446 / 4	30 1 $33,110,349 -10.2% / - 4,662 / $7,102 $427,099,795 / 5				

MAY 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
		Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	1 1 $25,251,991 -23.7% / - 4,662 / $5,417 $452,351,786 / 6	2 1 1 $21,542,852 $473,894,638 -14.7% / - - / - 4,662 / $4,621 $101,651 $473,894,638 / 7	3 1 $40,736,774 89.1% / -74.1% 4,662 / $8,738 $514,631,412 / 8	4 1 $61,527,049 51% / -43.7% 4,662 / $13,198 $576,158,461 / 9
5 1 1 $45,119,388 $147,383,211 -26.7% / -50.1% - / -58.7% 4,662 / $9,678 $31,614 $621,277,849 / 10	6 1 $10,709,607 -76.3% / -71% 4,662 / $2,297 $631,987,456 / 11	7 1 $12,518,963 16.9% / -62.2% 4,662 / $2,685 $644,506,419 / 12	[redacted]			

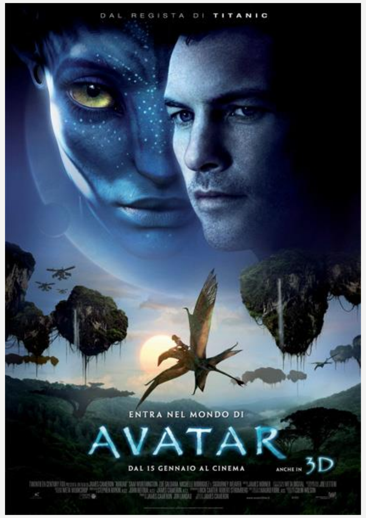


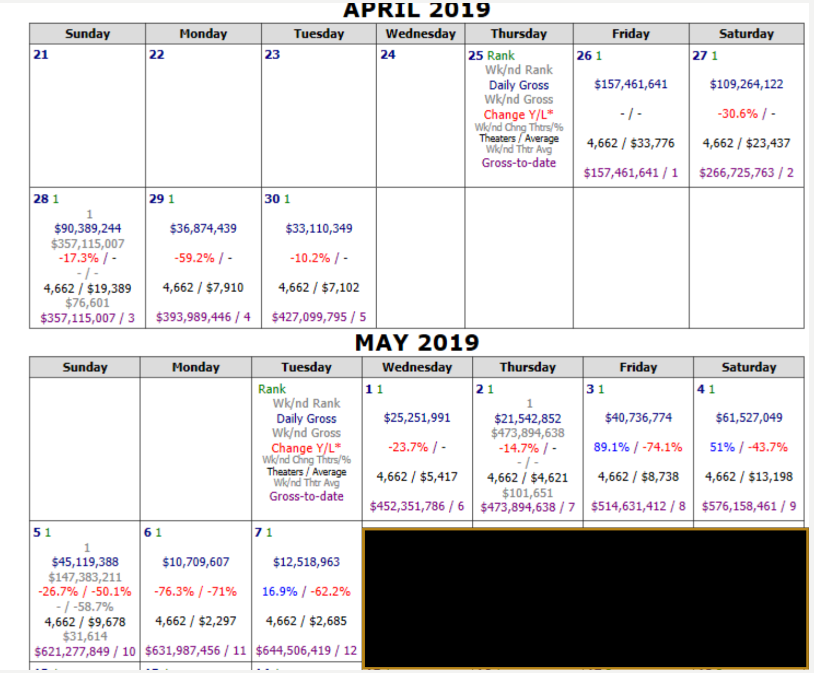
Regressione

- Calcolare la retta di regressione corrisponde al seguente problema di **ottimizzazione non vincolata**:

$$\min_{a,b}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2\right]$$

  - funzione obiettivo non-lineare
  - a e b sono variabili continue



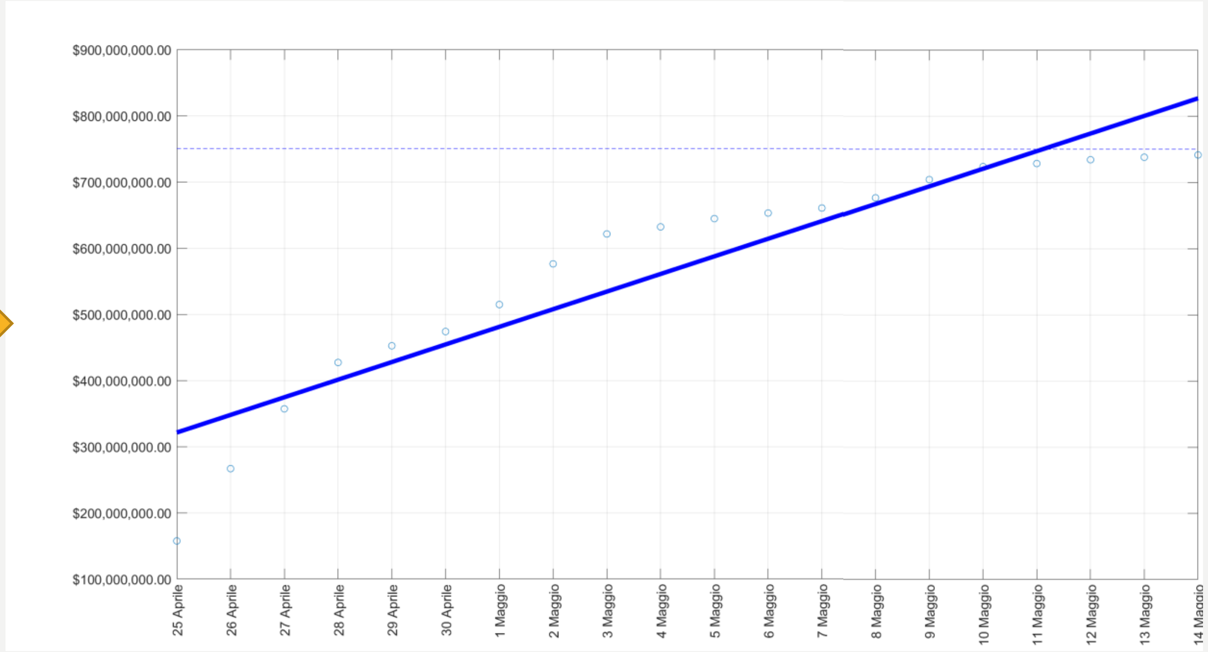


APRIL 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
21	22	23	24	25 Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	26 1 $157,461,641 - / - 4,662 / $33,776 $157,461,641 / 1	27 1 $109,264,122 -30.6% / - 4,662 / $23,437 $266,725,763 / 2
28 1 1 $90,389,244 $357,115,007 -17.3% / - - / - 4,662 / $19,389 $76,601 $357,115,007 / 3	29 1 $36,874,439 -59.2% / - 4,662 / $7,910 $393,989,446 / 4	30 1 $33,110,349 -10.2% / - 4,662 / $7,102 $427,099,795 / 5				

MAY 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
		Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	1 1 $25,251,991 -23.7% / - 4,662 / $5,417 $452,351,786 / 6	2 1 1 $21,542,852 $473,894,638 -14.7% / - - / - 4,662 / $4,621 $101,651 $473,894,638 / 7	3 1 $40,736,774 89.1% / -74.1% 4,662 / $8,738 $514,631,412 / 8	4 1 $61,527,049 51% / -43.7% 4,662 / $13,198 $576,158,461 / 9
5 1 1 $45,119,388 $147,383,211 -26.7% / -50.1% - / -58.7% 4,662 / $9,678 $31,614 $621,277,849 / 10	6 1 $10,709,607 -76.3% / -71% 4,662 / $2,297 $631,987,456 / 11	7 1 $12,518,963 16.9% / -62.2% 4,662 / $2,685 $644,506,419 / 12	[redacted]			



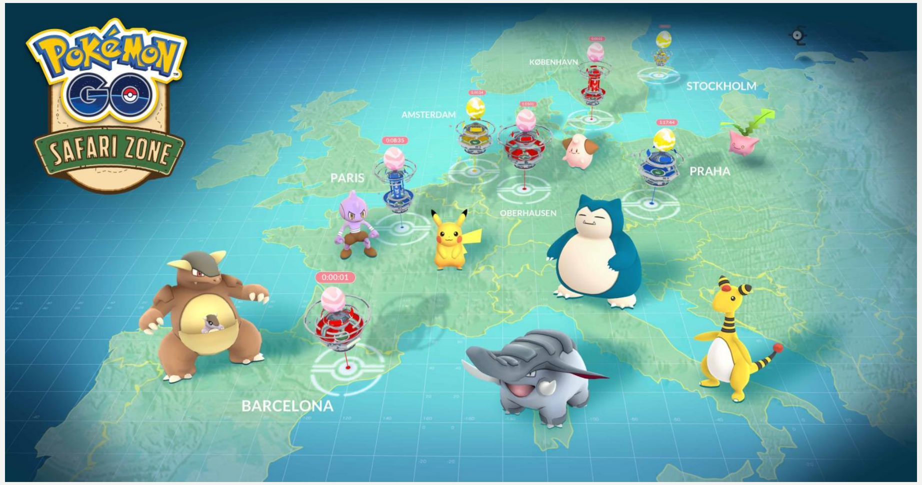
Gotta catch 'em all!

- Giocando a Pokemon GO, vogliamo visitare nel più breve tempo possibile tutte le Pokéstop di una città.

- Qual è il percorso più breve per visitarle tutti?

- Se siete curiosi http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/poke/index.html

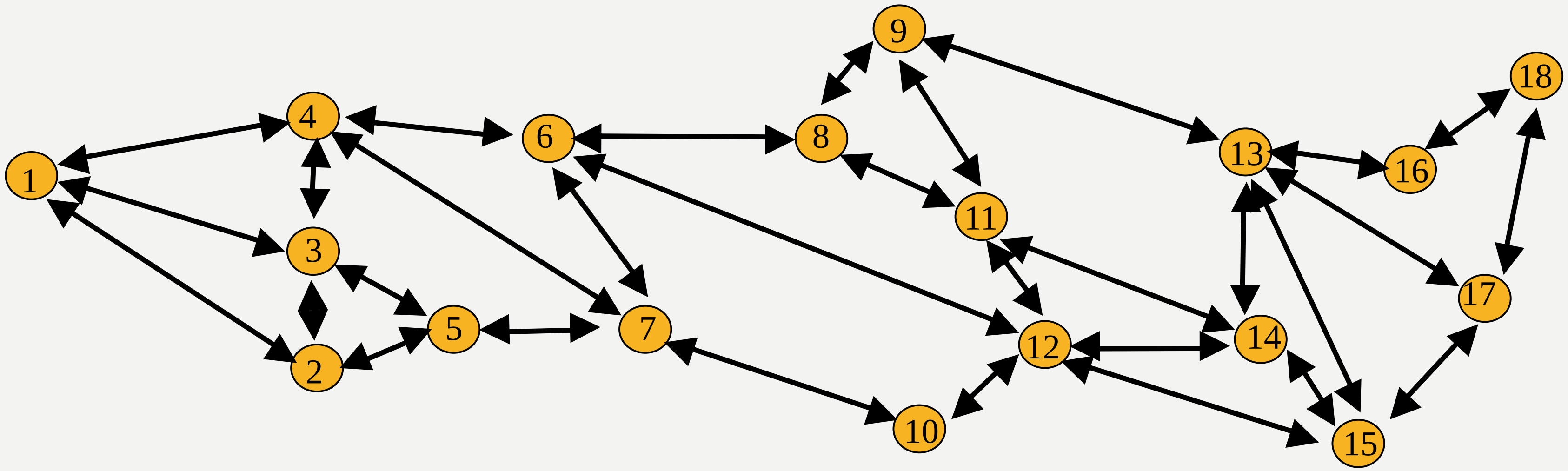
Gotta catch 'em all!



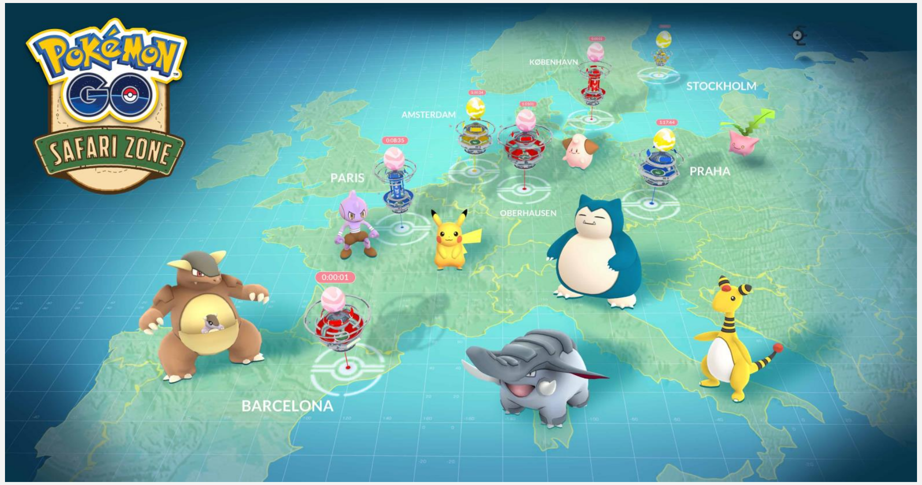
- L'insieme delle n Pokestops possono essere visti come i nodi di un grafo V

- L'insieme delle (possibili) strade che collegano le Pokestop possono essere visti come l'insieme degli archi A,

  dove indichiamo con ij l'arco che collega la stazione i con la stazione j (se esiste)



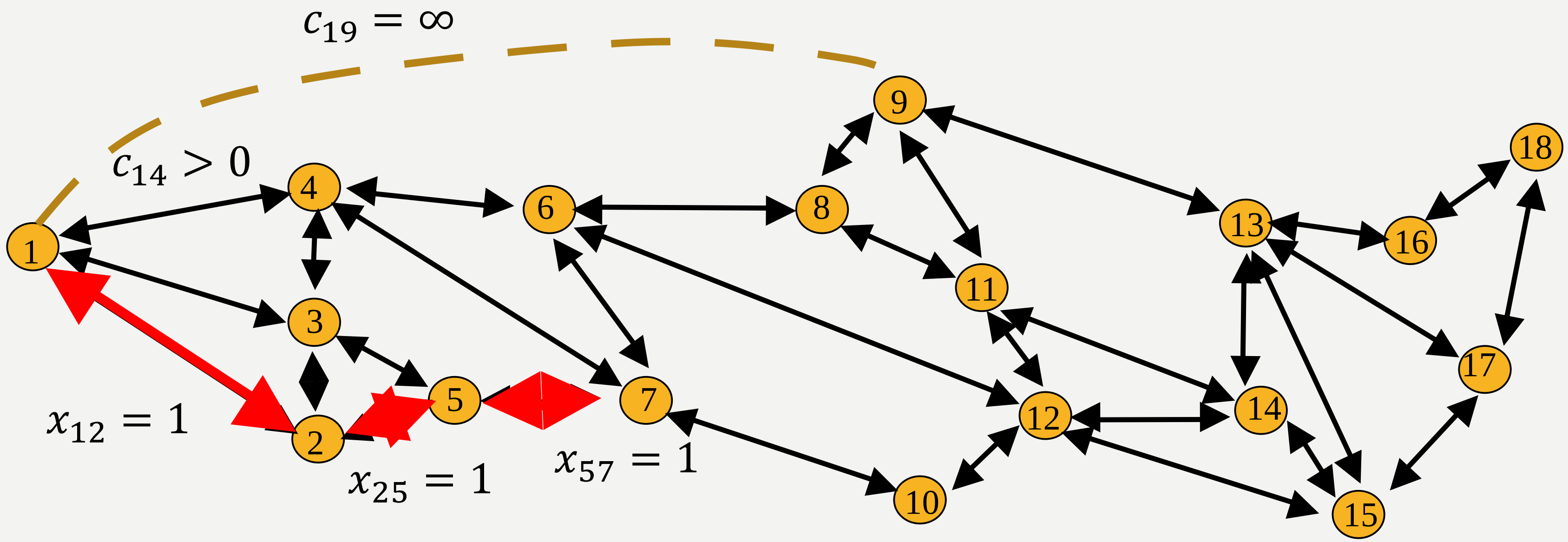
Gotta catch 'em all!



- Indichiamo con c_{ij} il tempo per andare dalla Pokestop i alla Pokestop j con:
  - $c_{ij} > 0$ se esiste l'arco ij
  - $c_{ij} = \infty$ se non esiste l'arco ij
- Includere o meno l'arco ij nel percorso ottimo può essere modellizzato per mezzo di variabili decisionali binarie

$x_{i,j} \in \{0,1\}$ per $i = 1, \dots, n$ e j= $1, \dots, n$

- $x_{i,j} = 1$ includo l'arco ij nel percorso (se esiste)
- $x_{i,j} = 0$ non includo l'arco ij nel percorso



Gotta catch 'em all!

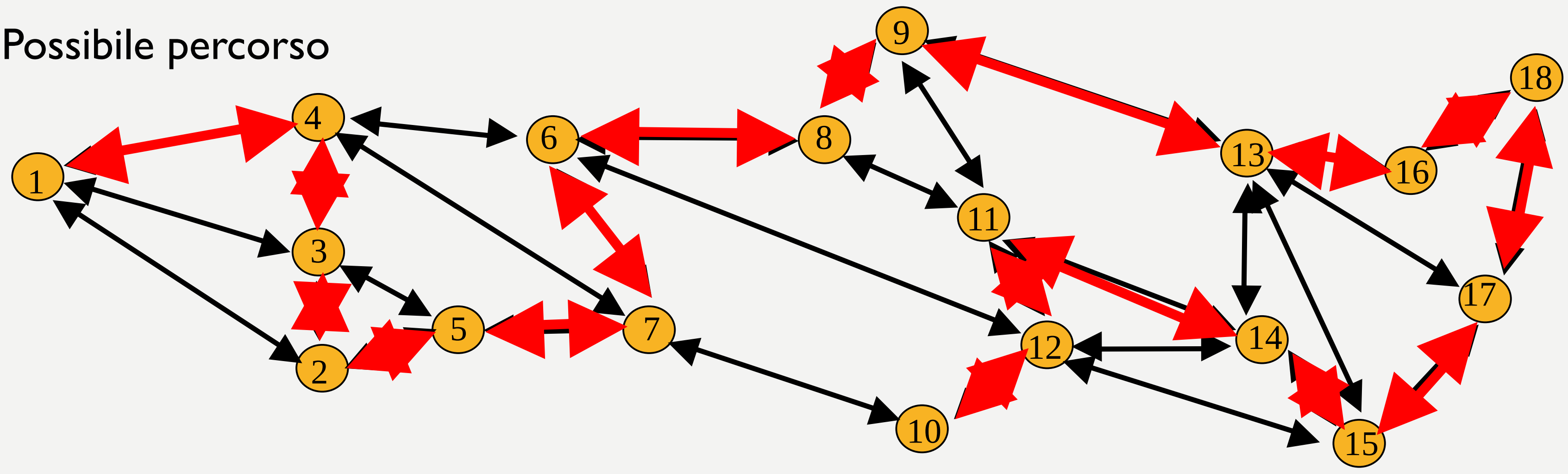
- Ogni pokestop vogliamo visitarla una sola volta (vincolo di assegnazione)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{n}$$ voglio che per ogni nodo vi sia un solo arco entrante

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}$$ voglio che per ogni nodo vi sia un solo arco uscente

- Il percorso proposto deve comprendere tutti i nodi e devono essere visitati una ed una sola volta

Possibile percorso



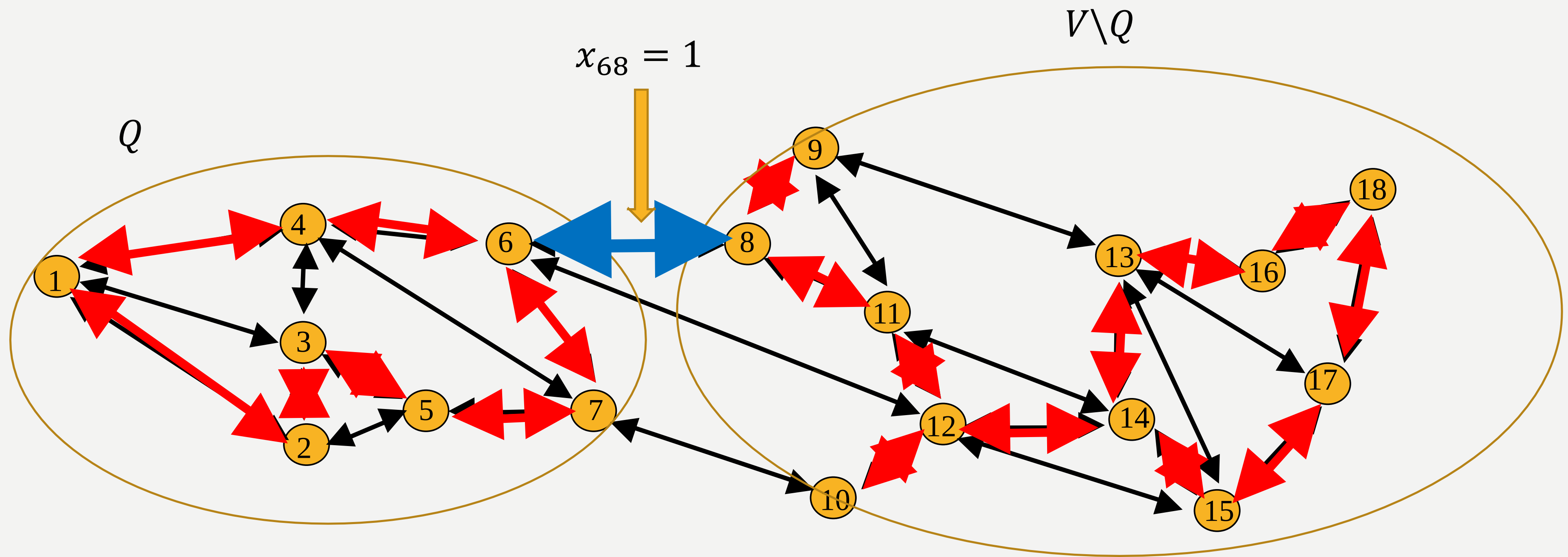
Gotta catch 'em all!

- Inoltre, non vogliamo la presenza di sotto-percorsi

$$\sum_{i\in Q}\sum_{j\in V\setminus Q} x_{ij} \geq 1 \quad \forall Q \subset V, |Q| \geq 1$$

- Con questo vincolo vogliamo che comunque si scelga un sottoinsieme proprio di nodi Q in V, deve esistere almeno un arco che colleghi un nodo di Q con un nodo non appartenente a Q.

- In questo esempio abbiamo il sottoinsieme proprio Q che viene collegato con $V\setminus Q$ attraverso l'arco x_{68}



Gotta catch 'em all!

- Cercare il percorso più breve che copra tutte le Pokestops corrisponde al seguente problema di ottimizzazione lineare intera (su grafo!):

$$\min\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$$

funzione costo

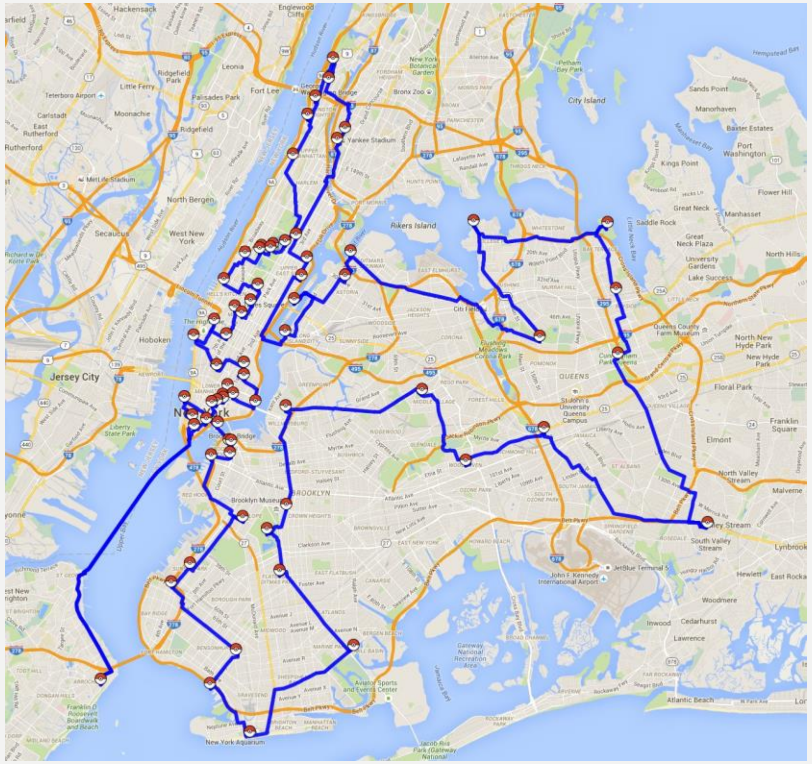
soggetto a:

$$\sum_{i=1,i\neq j}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1,,j\neq i}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,\dots,n$$

$$\sum_{i\in Q}\sum_{j\in V\setminus Q} x_{ij} \geq 1 \quad \forall Q \subset V, |Q| \geq 1$$

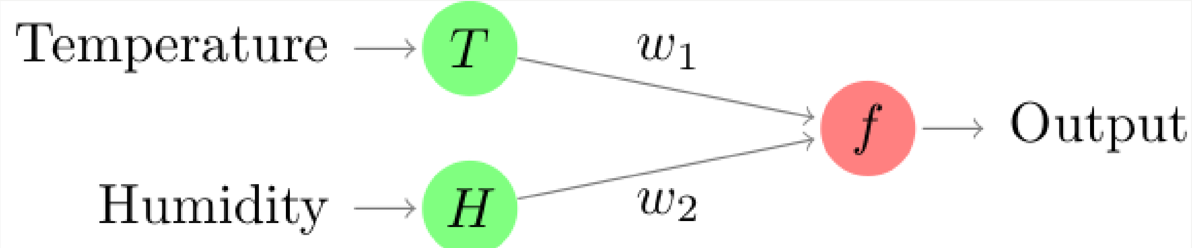
$$x_{ij} \in \{0,1\}$$



Un modello predittivo

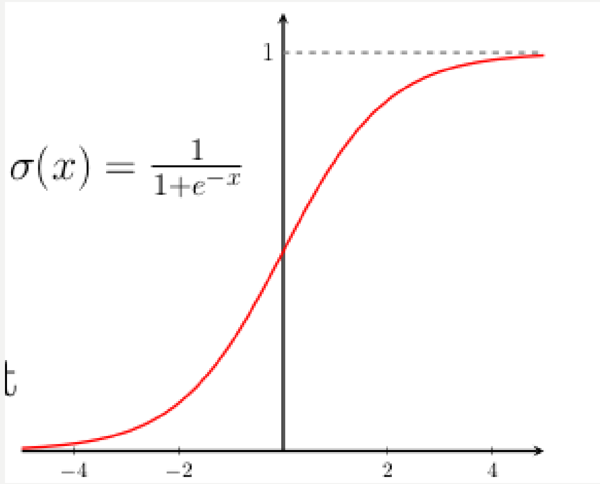
Temp. [°C]	20	31	15	18	21
Humidity [%]	40	36	23	45	30
Prob. Pioggia	70%	52%	55%	73%	60%

- Si propone il modello seguente:



1. $x_1 \rightarrow x_1 \cdot w_1$ e $x_2 \rightarrow x_2 \cdot w_2$
2. $x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2$
3. $y = \frac{1}{1+e^{-(x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2)}}$

funzione di attivazione



- Il mio output sarà: $$y = \frac{1}{1+e^{-(x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2)}}$$
- Quali parametri w1 e w2 generano le migliori predizioni?

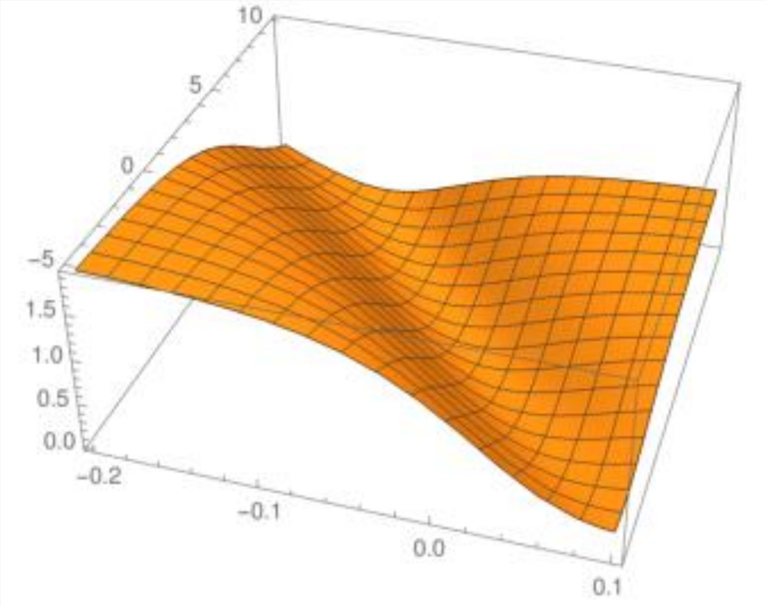
Addestrare una rete neurale

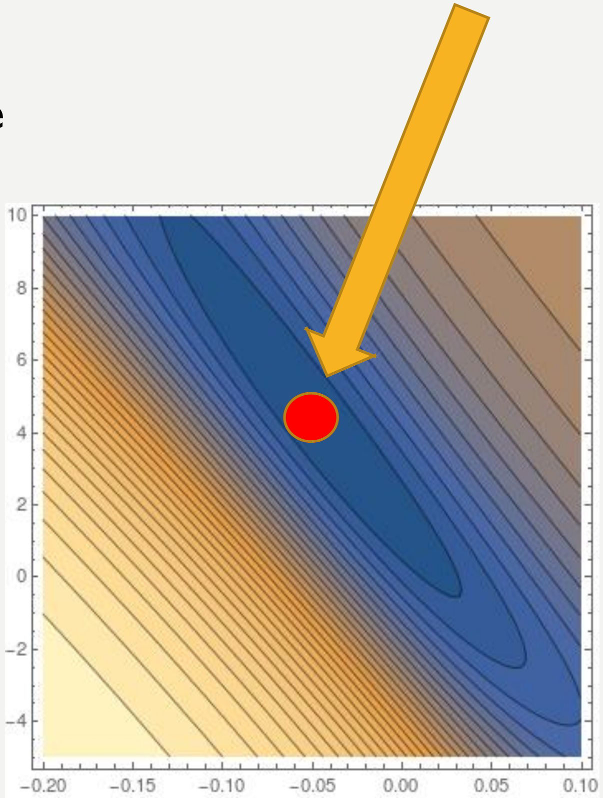
- Addestrare un rete neurale significa ottimizzare!!!

$$\min_{w_1,w_2} \sum_{i=1}^{5} \left(y_i - \frac{1}{1+e^{-(x_{1i}\cdot w_1 + x_{2i}\cdot w_2)}} \right)^2$$

- In questo caso ho un problema di ottimizzazione non-lineare con 2 incognite

w1= -0.04
w2= 4.9





- Qual è l'output di x_1=0.4 e $x_2 = -0.4$?

$$y = \frac{1}{1+e^{-(0.4\cdot(-0.299)-0.4\cdot(0.518))}} = \cdots$$

Addestrare una rete neurale

- E se ho più input?

$$\min_{w_1,\dots,w_n,} \sum_{i=1}^{5}\left(y_i - \frac{1}{1+e^{-(x_{1i}\cdot w_1+\dots+x_{ni}\cdot w_n)}}\right)^2$$

- In questo caso ho un problema di ottimizzazione con n incognite!!!