MODELLI NELLA RICERCA OPERATIVA


Quando il prof fa una domanda alla classe
e tutti cercano di non incrociare il suo sguardo

Problemi di ottimizzazione

Data una funzione f: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un **problema di ottimizzazione** può essere formulato come:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{opt } f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t. } \boldsymbol{x} \in X \end{array}}$$

dove con $\text{opt} = \begin{Bmatrix} \min \\ \max \end{Bmatrix}$ intendiamo che può essere $\text{opt} = \min$ oppure $\text{opt} = \max$, quindi avere un problema di minimizzazione, con $\min f(\boldsymbol{x})$, oppure un problema di massimizzazione, con $\max f(\boldsymbol{x})$

- $f(x)$ si chiama **Funzione obiettivo**
  NOTA: Vale che: $\max\{f(\boldsymbol{x}): \boldsymbol{x} \in X\} = -\min\{-f(\boldsymbol{x}): \boldsymbol{x} \in X\}$
- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ rappresenta l'**Insieme di soluzioni ammissibili (Regione Ammissibile)**
- $\boldsymbol{x} \in X$ rappresenta il **Vettore delle variabili decisionali** : si tratta di variabili numeriche i cui valori identificano una soluzione del problema.

Quindi, un **problema di ottimizzazione** consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo/massimo della funzione *f* tra i punti dell'insieme X

Ottimizzazione Vincolata e Non Vincolata

- Se $X = \mathbb{R}^n$ si parla di **ottimizzazione non vincolata**

  (in questo caso la ricerca dei punti di ottimo della funzione obiettivo viene fatta su tutto lo spazio di definizione delle variabili di decisioni)

- Se $X \subset \mathbb{R}^n$ si parla di **ottimizzazione vincolata**

  (in questo caso la ricerca dei punti di ottimo della funzione obiettivo viene fatta su un sottoinsieme proprio dello spazio di definizione delle variabili di decisioni)

Ottimizzazione Intera e Binaria

Se

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ (variabili intere)
  un caso particolare è $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}$ (variabili binarie)

si parla di ottimizzazione a numeri interi

NOTA:
Si possono avere anche casi di ottimizzazione mista in cui alcune variabili sono intere e altre sono reali.

Se non specificato generalmente si intende $X \subseteq \mathbb{R}^n$

Problemi di Programmazione Matematica

Quando l'insieme X delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione viene espresso attraverso un sistema di equazioni e disequazioni, tale problema prende il nome di **problema di Programmazione Matematica** (PM). In questo caso:

- **Vincolo**: è un'espressione del tipo $g_i(\boldsymbol{x})\begin{Bmatrix}\geq\\=\\\leq\end{Bmatrix} 0,$
  - dove con $g_i(x)\begin{Bmatrix}\geq\\=\\\leq\end{Bmatrix} 0,$ intendiamo che può essere $g_i(x) \geq 0$ oppure $g_i(x) = 0$ oppure ancora $g_i(x) \leq 0$
  - $g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ è una generica funzione che lega tra di loro le variabili.
  - in generale possiamo avere uno o più vincoli
- **Regione ammissibile** $X \subseteq \mathbb{R}^n$: è l'insieme dato dall'intersezione di tutti i vincoli del problema:

$$X = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ con } g_i(\boldsymbol{x})\begin{Bmatrix}\geq\\=\\\leq\end{Bmatrix} 0, i = 1, \dots, m\right\}$$

  - Osserviamo, quindi, che abbiamo m vincoli ed n variabili
  - Se $\boldsymbol{x} \in X$ allora x è **soluzione ammissibile**, se $\boldsymbol{x} \notin X$ allora x è **non ammissibile**

Un esempio

- Consideriamo il seguente problema

$$\min_{x,y}(x^2 + y^2)$$

  - $x + y \leq 3$
  - $x \geq 0$
  - $y \geq 0$

- Quali sono le variabili di decisione?

  x e y

- Qual è la funzione obiettivo?

  $f(x, y) = x^2 + y^2$

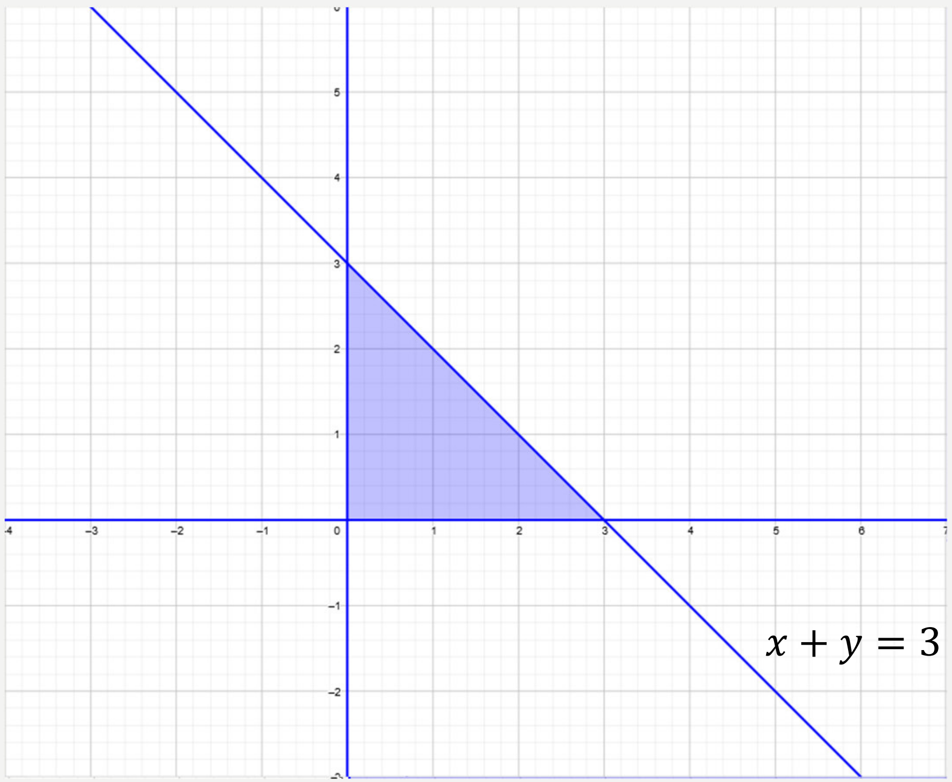
- Quali e quanti sono i vincoli?

  abbiamo 3 vincoli

- Qual è la regione ammissibile?

  $x \in \mathbb{R}^2$ tale che:

  - $x \geq 0;$
  - $y \geq 0;$
  - $x + y \leq 3;$



Soluzioni possibili

Può capitare che:

1. Il problema sia **non ammissibile**, cioè $X = \emptyset$ (in questo caso il problema risulta mal posto)

2. Il problema sia **illimitato**, cioè

$$\forall\, c \in \mathbb{R}, \exists\, \boldsymbol{x}_c \in X : f(\boldsymbol{x}_c) \leq c \quad \text{se opt} = \min$$
$$\forall\, c \in \mathbb{R}, \exists\, \boldsymbol{x}_c \in X : f(\boldsymbol{x}_c) \geq c \quad \text{se opt} = \max$$

3. Il problema ha un'**unica soluzione ottima**

4. Il problema ha più di una (anche **infinite**) soluzione ottime, tutte con lo stesso valore della funzione obiettivo

Alcuni esempi

- Il seguente problema

$$\min_{x,y}(x^2 + y^2)$$

- $x + y \leq -1$
- $x \geq 0$
- $y \geq 0$

Non ha soluzione in quanto non esistono $x \geq 0$ e $y \geq 0$ tali che $x + y \leq -1$

- Il seguente problema

$$\max_{x,y}(x^2 + y^2)$$

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$

È illimitato
Posso far crescere x e y

- Il seguente problema

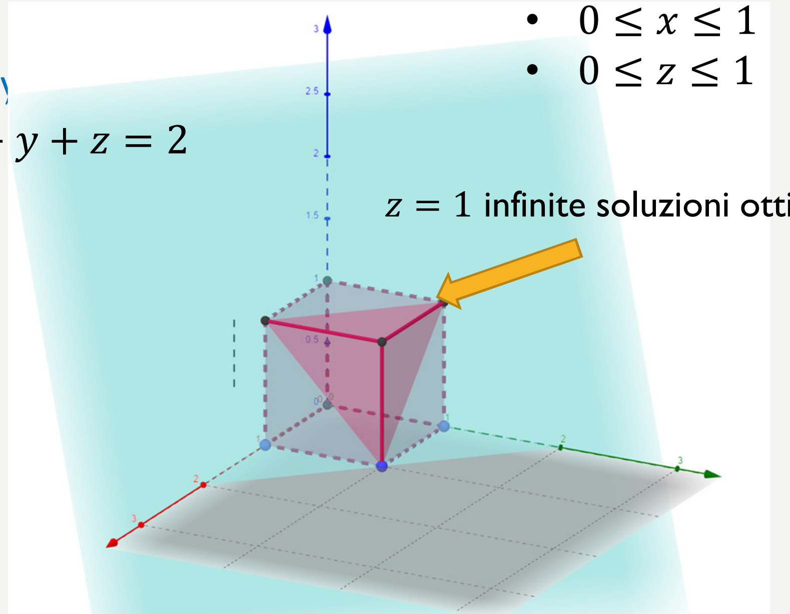
$$\max_{x,y,z}(z)$$

- $x + y + z = 2$
- $0 \leq x \leq 1$
- $0 \leq y \leq 1$
- $0 \leq z \leq 1$

Ha soluzione?è illimitato? Ha infinite soluzioni?

- $0 \leq x \leq 1$
- $0 \leq x \leq 1$
- $0 \leq z \leq 1$

- $x + y + z = 2$



$z = 1$ infinite soluzioni ottime

Ottimi locali e ottimi globali

- La risoluzione di un problema di **Programmazione matematica** consiste nel trovare una soluzione ammissibile che sia un **ottimo globale**, vale a dire un vettore $\boldsymbol{x}^* \in X$ tale che:

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}) \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in X \quad \text{se opt} = \min$$
$$f(\boldsymbol{x}^*) \geq f(\boldsymbol{x}) \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in X \quad \text{se opt} = \max$$

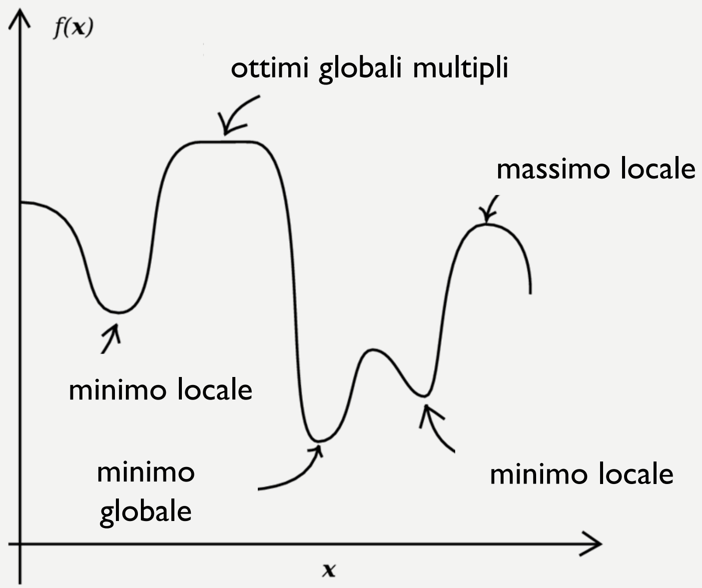
- Quando il problema è molto difficile da risolvere possiamo accontentarci di un **ottimo locale**, vale a dire un vettore $\hat{\boldsymbol{x}} \in X$ tale che, fissato un $\varepsilon > 0$ opportuno, vale che:

$$f(\hat{\boldsymbol{x}}) \leq f(\boldsymbol{x}) \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in X : \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\| \leq \varepsilon \quad \text{se opt} = \min \quad \text{(quindi un problema di minimo)}$$
$$f(\hat{\boldsymbol{x}}) \geq f(\boldsymbol{x}) \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in X : \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\| \leq \varepsilon \quad \text{se opt} = \max \quad \text{(quindi un problema di massimo)}$$

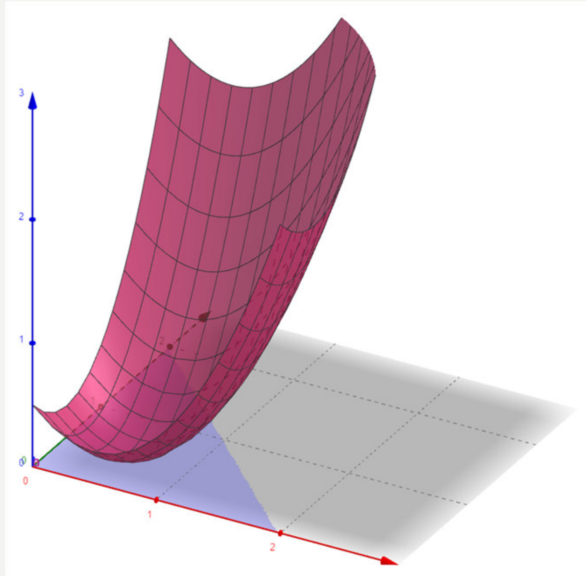
Osservazione Un problema di ottimizzazione può avere:

- più di un ottimo locale
- più di un ottimo globale

Osservazione Un punto di ottimo globale è anche di ottimo locale



Esempi



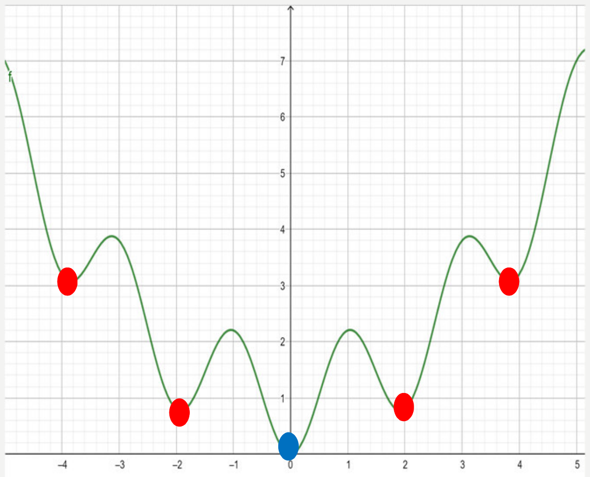
- Consideriamo il seguente problema

$$\min_{x,y}\left((x-0.2)^2+y^2\right)$$

- $x+y\leq 1$
- $x\geq 0$
- $y\geq 0$

- Qual è l'ottimo globale?
- Vi sono ottimi locali?

Osservazione Nel caso di una funzione convessa, vi è solo un ottimo globale



- Consideriamo il seguente problema

$$\min_{x,y}\left(0.2x^2+(1-\cos(\pi x))\right)$$

- $x\leq 5$
- $x\geq -5$

- Qual è l'ottimo globale?
- Quanti ottimi locali ha?
- Vi sono ottimi locali?Quali?

Alcuni casi possibili

- **Programmazione Lineare** (PL)

$$\text{opt } f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \quad \text{(funzione obiettivo lineare)}$$

$$X = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\boldsymbol{x}) \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} 0, i = 1, \dots, m \right\}, \quad \text{con } g_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} - b_i \quad \text{(vincoli lineari)}$$

- **Programmazione Lineare Intera** (PLI)

$$\text{opt } f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \quad \text{(funzione obiettivo lineare)}$$

$$X = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n : g_i(\boldsymbol{x}) \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} 0, i = 1, \dots, m \right\}, \quad \text{con } g_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} - b_i \quad \text{(vincoli lineari)}$$

- **Programmazione Non Lineare** (PNL)

$$\text{opt } f(\boldsymbol{x}) \quad \text{(funzione obiettivo o vincoli non lineare)}$$

$$X = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\boldsymbol{x}) \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} 0, i = 1, \dots, m \right\}, \text{con i vincoli } g_i(\boldsymbol{x}) \text{ non lineari}$$

Esempi

- Il seguente problema

$$\min_{x,y}(x^2 + y^2)$$

  - $x + y \leq 1$
  - $x \geq 0$
  - $y \geq 0$

- è LP o NLP?

- Il seguente problema

$$\min_{x,y}(x + y)$$

  - $x^2 - 1 \geq 0$
  - $y \geq 0$

- è LP o NLP?

- Il seguente problema

$$\max_{x,y}(x + 4y)$$

  - $x + y = 3$
  - $x^2 - 1 \geq 0$ ⇐ $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, ma $(x+1)$ è sempre vero, quindi…
  - $y \geq 0$
  - $x \geq 0$

- è LP o NLP?

Prepariamo un Cuba libre

- Vogliamo organizzare una festa e dobbiamo preparare almeno 10 litri di Cuba Libre (rum chiaro, Cola e limone)
- La disponibilità ed il costo dei tre diversi ingredienti è indicata in tabella

Ingredienti	Disponibilità massima	Costo x litro
Rum chiaro	6 l	15 €
Cola	15 l	1 €
Limone	3 l	2.5 €

- Le dosi ideali sono: almeno il 25% di rum chiaro e il 50% di Cola e non più del 10% di limone
- Quale miglior combinazione dei tre tipi di ingredienti minimizza la spesa?

Modello matematico

- Indichiamo con: R, C, L le rispettive quantità di Rum chiaro, Cola e Limone (variabili decisionali)
- Queste variabili sono chiaramente non negative (non ha senso, ad esempio, dire -10 cl di cola)
- Inoltre queste variabili sono continue (possiamo ad esempio avere 1.5 cl di lime)
- Pertanto possiamo scrivere $R \geq 0$, $C \geq 0$, $L \geq 0$ oppure $R, C, L \in \mathbb{R}^+$
- Cosa vuol dire «disponibilità massima»?

  $R \leq 6$, $C \leq 15$, $L \leq 3$ (anche detti vincoli di capacità)

  Osserviamo che possiamo condensare i vincoli di non negatività con quelli sulla disponibilità massima nel seguente modo:

$$0 \leq R \leq 6, \qquad 0 \leq C \leq 15, \qquad 0 \leq L \leq 3$$

Modello matematico

- Cosa vuol dire «almeno 10 litri di Cuba Libre»?

$$(R + C + L) \geq 10 \qquad \text{(vincolo lineare)}$$

osserviamo che il vincolo può essere riscritto nel seguente modo:

$$R + C + L - 10 \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix} - 10 \geq 0$$

Pertanto:

$$\boldsymbol{a}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix}, \quad b_1 = 10,$$

ove il pedice 1 sta ad indicare che si tratta del primo vincolo

Modello matematico

- Cosa vuol dire «almeno il 25% di rum chiaro ?»

$$R \geq 0.25 \cdot (R + C + L) \qquad \text{(vincolo lineare)}$$

- Cosa vuol dire «almeno il 50% di Cola ?»

$$\mathrm{C} \geq 0.50 \cdot (R + C + L) \qquad \text{(vincolo lineare)}$$

- Cosa vuol dire «non più del 10% di limone?»

$$\mathrm{L} \leq 0.10 \cdot (R + C + L) \qquad \text{(vincolo lineare)}$$

- Il costo di preparazione del cuba libre è dato da:

$$\min_{R,C,L}(15 \cdot R + 1 \cdot C + 2.5 \cdot L) \qquad \text{(funzione obiettivo lineare)}$$

Osserviamo che la funzione obiettivo può essere scritta anche nella seguente forma compatta:

$$\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \text{ con } \boldsymbol{c}^T = [15 \quad 1 \quad 2.5] \text{ e, come prima, } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix}$$

Il modello definitivo

$$\min_{R,C,L}(15 \cdot R + C + 2.5 \cdot L)$$

soggetto a:

- $(R + C + L) \geq 10$
- $R \geq 0.25 \cdot (R + C + L)$
- $\mathrm{C} \geq 0.50 \cdot (R + C + L)$
- $\mathrm{L} \leq 0.10 \cdot (R + C + L)$
- $0 \leq R \leq 6$
- $0 \leq C \leq 15$
- $0 \leq L \leq 3$

Si tratta, quindi, di un problema di programmazione lineare a variabili continue

Un regalo di compleanno «ottimizzato»

- Vogliamo comprare per il nostro compleanno (plurale maiestatis) un certo numero n di giochi sulla piattaforma Steam avendo a disposizione:
  - 150 euro come budget massimo
  - 150 GB di spazio sul pc
- Vogliamo i giochi che più ci piacciono (su una scala da 1 a 5)

						
Costo	39,99€	39,99€	59,99€	59,99€	19,99€	29,99€
Spazio	30 GB	40 GB	12 GB	46 GB	12 GB	72 GB
Gradimento	2	5	2	5	3	5

Cosa prendiamo?

- Quante possibilità abbiamo?
  - Steam ha circa 30.000 giochi
  - Se ne vogliamo k→ $\binom{30000}{k} = \frac{30.000!}{k!(30.000-k)!}$ possibilità
- Con k=6 giochi
  - $\binom{30000}{6} = \frac{30.000!}{6!(30.000-6)!}$ ≈ 1.011.993.845.616.562.842.495.000 possibilità!

						
Costo	39,99€	39,99€	59,99€	59,99€	19,99€	29,99€
Spazio	30 GB	40 GB	12 GB	46 GB	12 GB	72 GB
Gradimento	2	5	2	5	3	5

Modello matematico

- Il comprare o no un videogioco può essere modellizzato per mezzo di variabili decisionali binarie associate ad ogni gioco

$x_i \in \{0,1\}$ per $i = 1, \dots, n$
- $x_i = 1$ lo compriamo
- $x_i = 0$ non lo compriamo

(variabili binarie)

- Non superare il budget massimo di 150 euro può essere espresso dalla seguente relazione

$$39{,}99 \cdot x_1 + 39{,}99 \cdot x_2 + 59{,}99 \cdot x_3 + 59{,}99 \cdot x_4 + 19{,}99 \cdot x_5 + 29{,}99 \cdot x_6 \leq \underbrace{150\ €}_{\text{Budget massimo}}$$

(vincolo lineare)

- Non superare la memoria massima può essere espresso dalla seguente relazione

$$30 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 46 \cdot x_4 + 12 \cdot x_5 + 72 \cdot x_6 \leq \underbrace{150}_{\text{Spazio massimo}}$$

(vincolo lineare)

- Volere i giochi che più ci piacciono si esprime nel seguente modo:

$$\max(2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6)$$

(funzione obiettivo lineare)

Il modello definitivo

- Volere i giochi che più ci piacciono, avendo 200 euro di budget e 100GB si spazio corrisponde a:

$$\max(2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6)$$

soggetto a:

- $39{,}99 \cdot \mathrm{x}_1 + 39{,}99 \cdot \mathrm{x}_2 + 59{,}99 \cdot \mathrm{x}_3 + 59{,}99 \cdot \mathrm{x}_4 + 19{,}99 \cdot \mathrm{x}_5 + 29{,}99 \cdot \mathrm{x}_6 \leq 150$
- $30 \cdot \mathrm{x}_1 + 40 \cdot \mathrm{x}_2 + 12 \cdot \mathrm{x}_3 + 46 \cdot \mathrm{x}_4 + 12 \cdot \mathrm{x}_5 + 72 \cdot \mathrm{x}_6 \leq 150$
- $x_i \in \{0,1\}, \ \forall\, i \ \in \ \{1, \dots, 6\}$

Si tratta, quindi, di un problema di programmazione lineare a variabili binarie, che sono un caso particolare di variabili intere

- Un modello di ottimizzazione di questo tipo prende il nome di Problema dello zaino (Knapsack)

Fantacalcio

- Vogliamo comprare una squadra di fantacalcio (23 giocatori) avendo a disposizione 250 milioni
- Vogliamo scegliere 3 portieri, 7 difensori, 8 centrocampisti e 5 attaccanti
- Ogni giocatore ha una quotazione ed una media di rendimento

Come costruiamo la squadra più forte?

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q	PG	G	A	AM	ES	RT	RR	RS	RP	MV	MM	MP
	Ronaldo C.	A	52	31	21	7	3	-	6	5	1	-	6.67	8.79	65.7
	Quagliarella F.	A	46	37	26	7	1	-	10	9	1	-	6.62	8.82	81.4
	Mertens D.	T (A)	40	34	16	9	1	-	1	1	-	-	6.16	8.05	64.3
	Zapata D.	A	40	37	23	7	5	-	2	1	1	-	6.51	8.41	70.3
	Ilicic J.	T (A)	35	31	12	6	4	1	1	-	1	-	6.41	7.77	42.2

Quale è la squadra migliore?

- Non possiamo comprare i 23 giocatori più forti:
  - Sforiamo il budget (779 milioni)
  - Abbiamo una squadra «leggermente» squilibrata (23 attaccanti, 1 centrocampista e 1 un portiere)

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q	PG	G	A	AM	ES	RT	RR	RS	RP	MV	MM	MP
	Ronaldo C.	A	52	31	21	7	3	-	6	5	1	-	6.67	8.79	65.7
	Quagliarella F.	A	46	37	26	7	1	-	10	9	1	-	6.62	8.82	81.4
	Mertens D.	T (A)	40	34	16	9	1	-	1	1	-	-	6.16	8.05	64.3
	Zapata D.	A	40	37	23	7	5	-	2	1	1	-	6.51	8.41	70.3
	Ilicic J.	T (A)	35	31	12	6	4	1	1	-	1	-	6.41	7.77	42.2
	Belotti A.	A	34	37	15	1	5	-	6	5	1	-	6.31	7.4	40.3
	Piatek K.	A	32	37	22	-	5	-	2	2	-	-	6.41	8.13	63.6

Quale è la squadra migliore?

- Non possiamo comprare la squadra più forte (5 attaccanti più forti, 8 centrocampisti più forti, etc.):
  - Sforiamo il budget (663)

5 attaccanti migliori

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q
	Ronaldo C.	A	52
	Quagliarella F.	A	46
	Mertens D.	T (A)	40
	Zapata D.	A	40
	Ilicic J.	T (A)	35

8 centrocampisti migliori

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q
	Chiesa F.	T (C)	25
	Perisic I.	T (C)	24
	Milinkovic S.	C	23
	De Paul R.	T (C)	23
	Khedira S.	C	23
	Nainggolan R.	T (C)	23
	Bonaventura G.	C	23
	Pastore J.	C	23

7 difensori migliori

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q
	Kolarov A.	D	24
	Izzo A.	D	22
	Koulibaly K.	D	22
	Di Lorenzo G.	D	20
	De Vrij S.	D	20
	Fazio F.	D	19
	Castagne T.	D	19

3 portieri migliori

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q
	Donnarumma G.	P	24
	Sirigu S.	P	24
	Szczesny W.	P	23

Come costruisco la squadra migliore?

- Quante possibilità abbiamo?
  - La Lega di seria A ha circa 500 giocatori

- Anche se ci restringessimo a solo 23 giochi
  - $\binom{500}{23} = \frac{500!}{23!(500-23)!} \approx$

2.758.609.174.009.195.018.652.002.324.001.896.356.000 possibilità!

Sqd	Giocatore	Ruolo	Q	PG	G	A	AM	ES	RT	RR	RS	RP	MV	MM	MP
	Ronaldo C.	A	52	31	21	7	3	-	6	5	1	-	6.67	8.79	65.7
	Quagliarella F.	A	46	37	26	7	1	-	10	9	1	-	6.62	8.82	81.4
	Mertens D.	T (A)	40	34	16	9	1	-	1	1	-	-	6.16	8.05	64.3
	Zapata D.	A	40	37	23	7	5	-	2	1	1	-	6.51	8.41	70.3
	Ilicic J.	T (A)	35	31	12	6	4	1	1	-	1	-	6.41	7.77	42.2

Come si può ottenere la squadra migliore?

- Comprare o no un giocatore può essere modellizzato per mezzo di variabili decisionali binarie associate

$x_i \in \{0,1\}$ per $i = 1, \dots, n$

- $x_i = 1$ lo compriamo
- $x_i = 0$ non lo compriamo

(variabili binarie)

- Non superare il budget massimo di 250 euro può essere espresso dalla seguente relazione
  - $\sum_{i=1}^{M} q_i \cdot x_i \leq \underbrace{250€}_{\text{Budget massimo}}$

- $q_i > 0$ valore del giocare

(vincolo lineare)

- Vogliamo avere 5 attaccanti in squadra
  - $\sum_{i=1}^{M} A_i \cdot x_i = 5$

- $A_i = 1$ se i è attaccante, 0 altrimenti

(vincolo lineare)

- Vogliamo la squadra più forte

$$\max\left(\sum_{i=1}^{M} MV_i \cdot x_i\right)$$

(funzione obiettivo lineare)

Come si può ottenere la squadra migliore?

- Volere la squadra più forte rispettando il budget e la composizione corrisponde al seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\max_{x}\left(\sum_{i=1}^{M} MV_i \cdot x_i\right)$$

soggetto a:

- $\sum_{i=1}^{M} q_i \cdot x_i \leq 250.000.000€$
- $\sum_{i=1}^{M} A_i \cdot x_i = 5$
- $\sum_{i=1}^{M} C_i \cdot x_i = 8$
- $\sum_{i=1}^{M} D_i \cdot x_i = 7$
- $\sum_{i=1}^{M} P_i \cdot x_i = 3$
- $x_i \in \{0,1\}$

con parametri:

- $A_i = 1$ se *i* è attaccante, 0 altrimenti
- $C_i = 1$ se *i* è centrocampista, 0 altrimenti
- $D_i = 1$ se *i* è difensore, 0 altrimenti
- $P_i = 1$ se *i* è portiere, 0 altrimenti

Si tratta nuovamente di un problema di programmazione lineare a variabili binarie

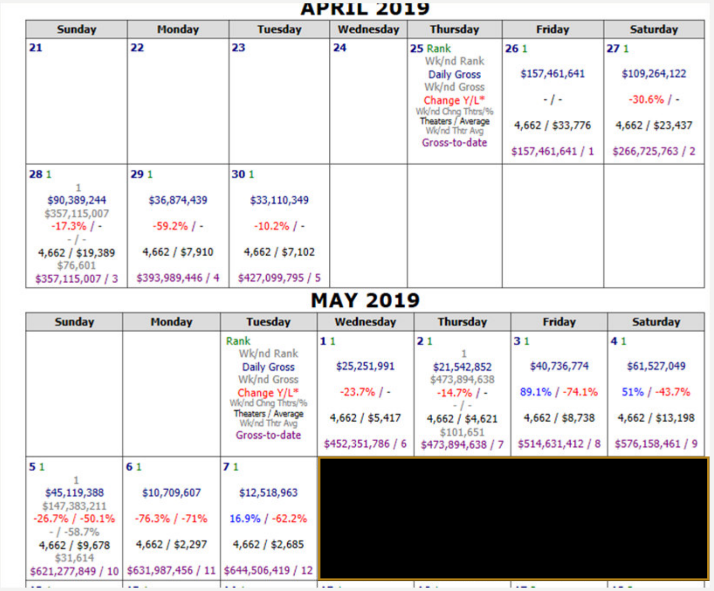
Anche in questo caso tale problema è considerato un Problema dello zaino (Knapsack)

Avatar vs Avengers

- Negli ultimi mesi molti si sono chiesti se Avengers Endgame avrebbe battuto Avatar al Box office USA

- L'incasso totale di Avatar è stato di circa 750 milioni

- Questo è il trend di incassi giornalieri dal 25 Aprile 7 Maggio



APRIL 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
21	22	23	24	25 Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	26 1 $157,461,641 - / - 4,662 / $33,776 $157,461,641 / 1	27 1 $109,264,122 -30.6% / - 4,662 / $23,437 $266,725,763 / 2
28 1 1 $90,389,244 $357,115,007 -17.3% / - - / - 4,662 / $19,389 $76,601 $357,115,007 / 3	29 1 $36,874,439 -59.2% / - 4,662 / $7,910 $393,989,446 / 4	30 1 $33,110,349 -10.2% / - 4,662 / $7,102 $427,099,795 / 5				

MAY 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
		Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	1 1 $25,251,991 -23.7% / - 4,662 / $5,417 $452,351,786 / 6	2 1 1 $21,542,852 $473,894,638 -14.7% / - - / - 4,662 / $4,621 $101,651 $473,894,638 / 7	3 1 $40,736,774 89.1% / -74.1% 4,662 / $8,738 $514,631,412 / 8	4 1 $61,527,049 51% / -43.7% 4,662 / $13,198 $576,158,461 / 9
5 1 1 $45,119,388 $147,383,211 -26.7% / -50.1% - / -58.7% 4,662 / $9,678 $31,614 $621,277,849 / 10	6 1 $10,709,607 -76.3% / -71% 4,662 / $2,297 $631,987,456 / 11	7 1 $12,518,963 16.9% / -62.2% 4,662 / $2,685 $644,506,419 / 12	[redacted]			

- Riesce Avengers a battere Avatar?

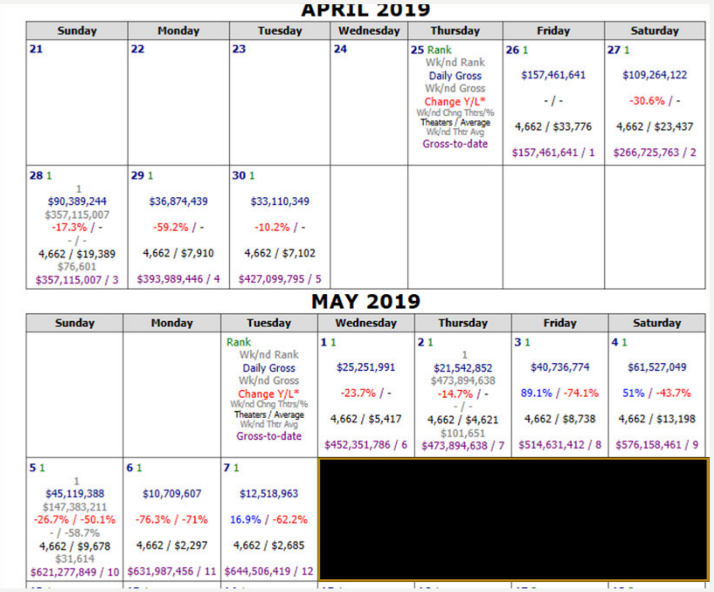
Avengers ha battuto Avatar?

- Abbiamo a disposizione i dati di vendita nel tempo

- Vogliamo costruire una retta di regressione lineare che interpoli i dati

$$y = ax + b \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

- Come scelgo a e b?

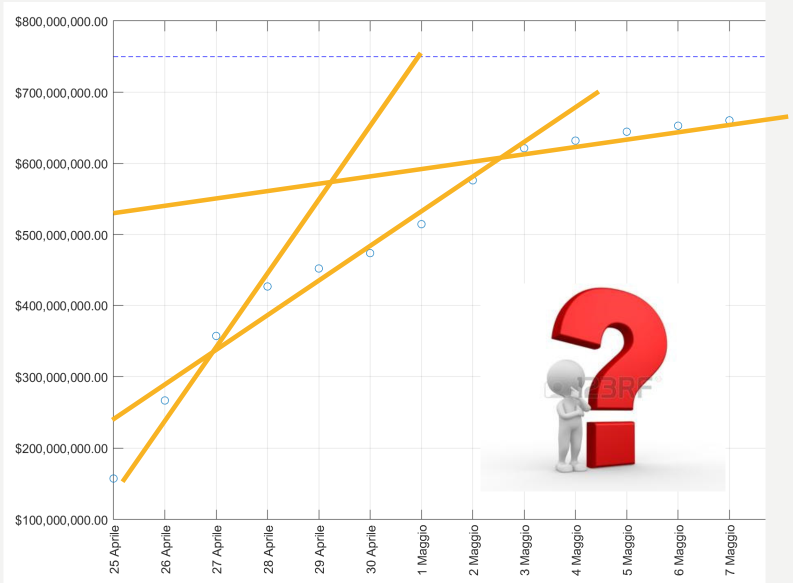


APRIL 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
21	22	23	24	25 Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	26 1 $157,461,641 - / - 4,662 / $33,776 $157,461,641 / 1	27 1 $109,264,122 -30.6% / - 4,662 / $23,437 $266,725,763 / 2
28 1 1 $90,389,244 $357,115,007 -17.3% / - - / - 4,662 / $19,389 $76,601 $357,115,007 / 3	29 1 $36,874,439 -59.2% / - 4,662 / $7,910 $393,989,446 / 4	30 1 $33,110,349 -10.2% / - 4,662 / $7,102 $427,099,795 / 5				

MAY 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
		Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	1 1 $25,251,991 -23.7% / - 4,662 / $5,417 $452,351,786 / 6	2 1 1 $21,542,852 $473,894,638 -14.7% / - - / - 4,662 / $4,621 $101,651 $473,894,638 / 7	3 1 $40,736,774 89.1% / -74.1% 4,662 / $8,738 $514,631,412 / 8	4 1 $61,527,049 51% / -43.7% 4,662 / $13,198 $576,158,461 / 9
5 1 1 $45,119,388 $147,383,211 -26.7% / -50.1% - / -58.7% 4,662 / $9,678 $31,614 $621,277,849 / 10	6 1 $10,709,607 -76.3% / -71% 4,662 / $2,297 $631,987,456 / 11	7 1 $12,518,963 16.9% / -62.2% 4,662 / $2,685 $644,506,419 / 12	[redacted]			



Regressione

➢ Calcolare la retta di regressione corrisponde al seguente problema di **ottimizzazione non vincolata**:

$$\min_{a,b}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2\right]$$

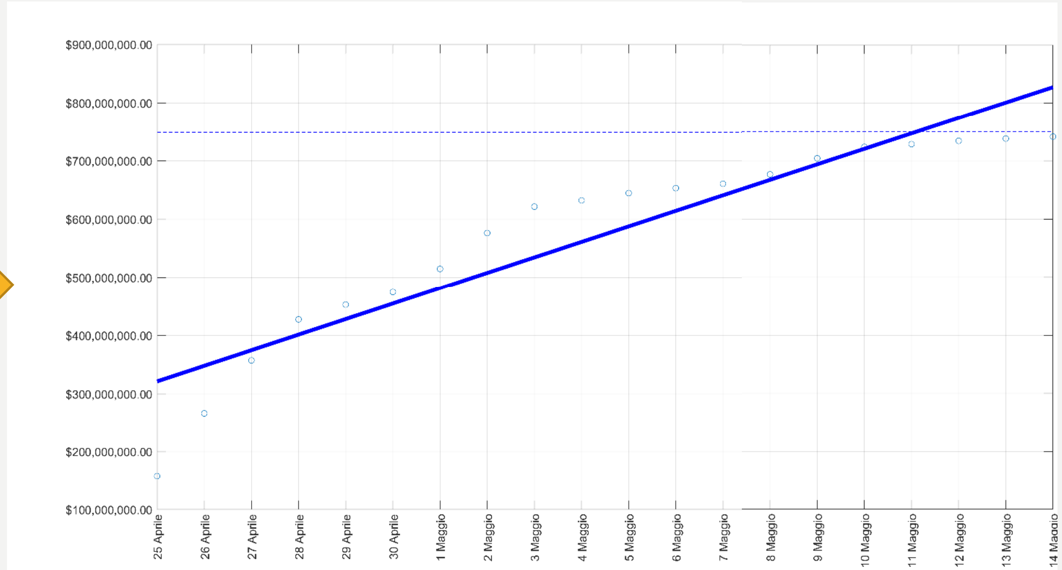
- funzione obiettivo non-lineare
- a e b sono variabili continue

APRIL 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
21	22	23	24	25 Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	26 1 $157,461,641 - / - 4,662 / $33,776 $157,461,641 / 1	27 1 $109,264,122 -30.6% / - 4,662 / $23,437 $266,725,763 / 2
28 1 1 $90,389,244 $357,115,007 -17.3% / - - / - 4,662 / $19,389 $76,601 $357,115,007 / 3	29 1 $36,874,439 -59.2% / - 4,662 / $7,910 $393,989,446 / 4	30 1 $33,110,349 -10.2% / - 4,662 / $7,102 $427,099,795 / 5				

MAY 2019

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
		Rank Wk/nd Rank Daily Gross Wk/nd Gross Change Y/L* Wk/nd Chng Thtrs/% Theaters / Average Wk/nd Thtr Avg Gross-to-date	1 1 $25,251,991 -23.7% / - 4,662 / $5,417 $452,351,786 / 6	2 1 1 $21,542,852 $473,894,638 -14.7% / - - / - 4,662 / $4,621 $101,651 $473,894,638 / 7	3 1 $40,736,774 89.1% / -74.1% 4,662 / $8,738 $514,631,412 / 8	4 1 $61,527,049 51% / -43.7% 4,662 / $13,198 $576,158,461 / 9
5 1 1 $45,119,388 $147,383,211 -26.7% / -50.1% - / -58.7% 4,662 / $9,678 $31,614 $621,277,849 / 10	6 1 $10,709,607 -76.3% / -71% 4,662 / $2,297 $631,987,456 / 11	7 1 $12,518,963 16.9% / -62.2% 4,662 / $2,685 $644,506,419 / 12	[redacted]			



Gotta catch 'em all!

- Giocando a Pokemon GO, vogliamo visitare nel più breve tempo possibile tutte le Pokéstop di una città.

- Qual è il percorso più breve per visitarle tutti?

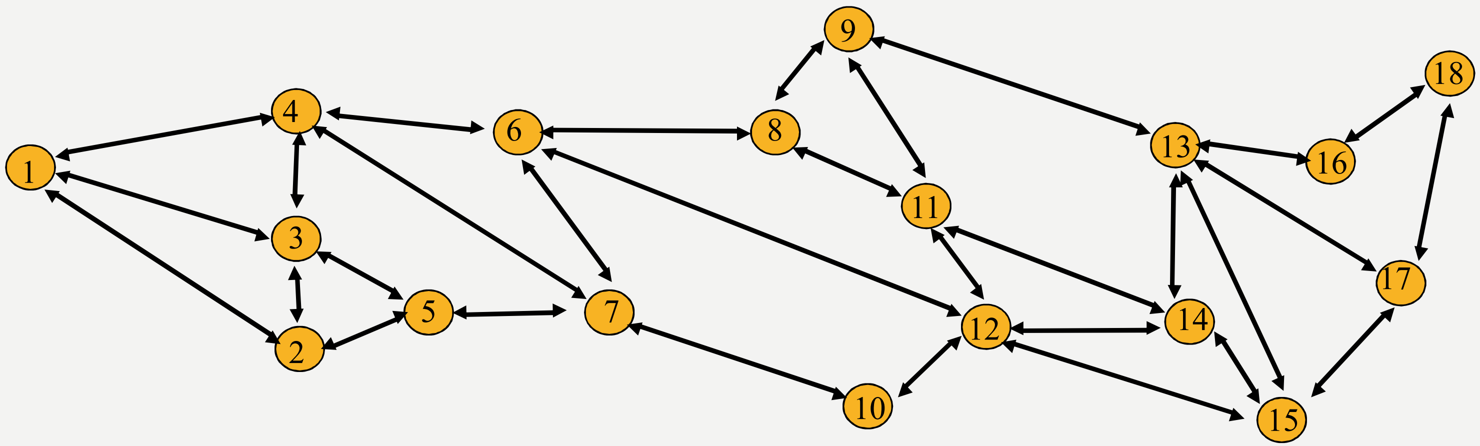
- Se siete curiosi http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/poke/index.html

Gotta catch 'em all!

- L'insieme delle n Pokestops possono essere visti come i nodi di un grafo V

- L'insieme delle (possibili) strade che collegano le Pokestop possono essere visti come l'insieme degli archi A,

    dove indichiamo con ij l'arco che collega la stazione i con la stazione j (se esiste)



Gotta catch 'em all!

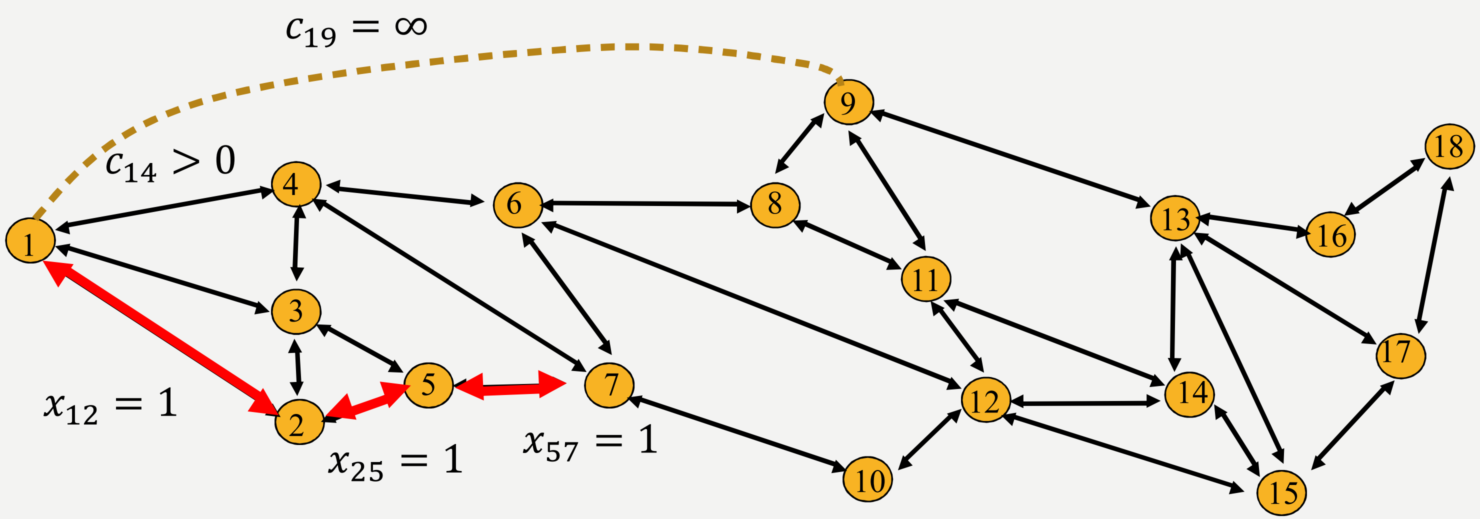
➢ Indichiamo con c_{ij} il tempo per andare dalla Pokestop i alla Pokestop j con:

- $c_{ij} > 0$ se esiste l'arco ij
- $c_{ij} = \infty$ se non esiste l'arco ij

➢ Includere o meno l'arco ij nel percorso ottimo può essere modellizzato per mezzo di variabili decisionali binarie

$x_{i,j} \in \{0,1\}$ per $i = 1, \dots, n$ e j= $1, \dots, n$

- $x_{i,j} = 1$ includo l'arco ij nel percorso (se esiste)
- $x_{i,j} = 0$ non includo l'arco ij nel percorso



Gotta catch 'em all!

- Ogni pokestop vogliamo visitarla una sola volta (vincolo di assegnazione)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{n}$$

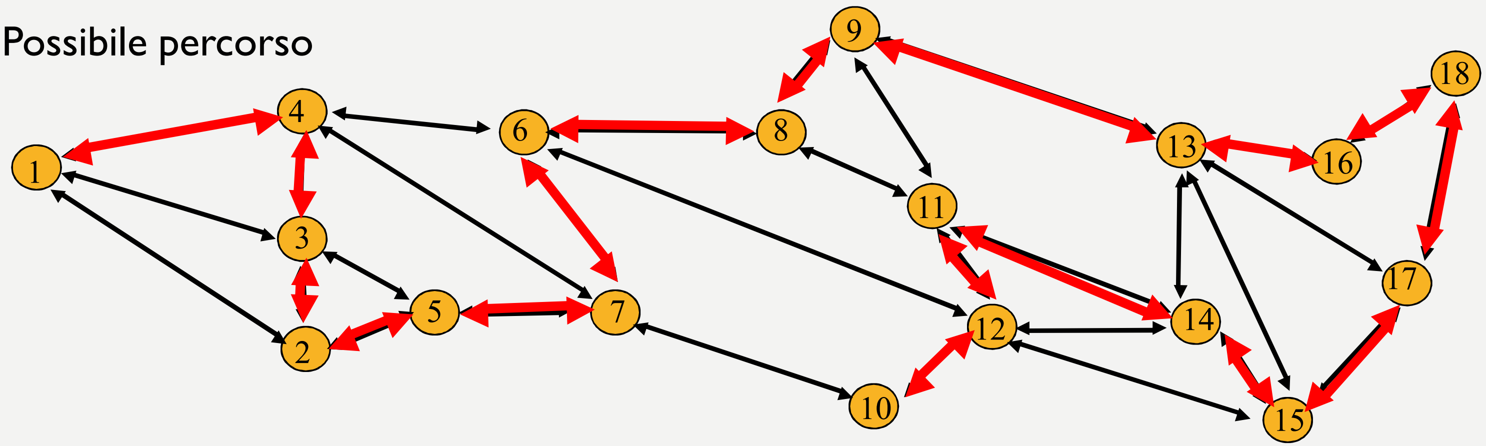
voglio che per ogni nodo vi sia un solo arco entrante

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}$$

voglio che per ogni nodo vi sia un solo arco uscente

- Il percorso proposto deve comprendere tutti i nodi e devono essere visitati una ed una sola volta

Possibile percorso



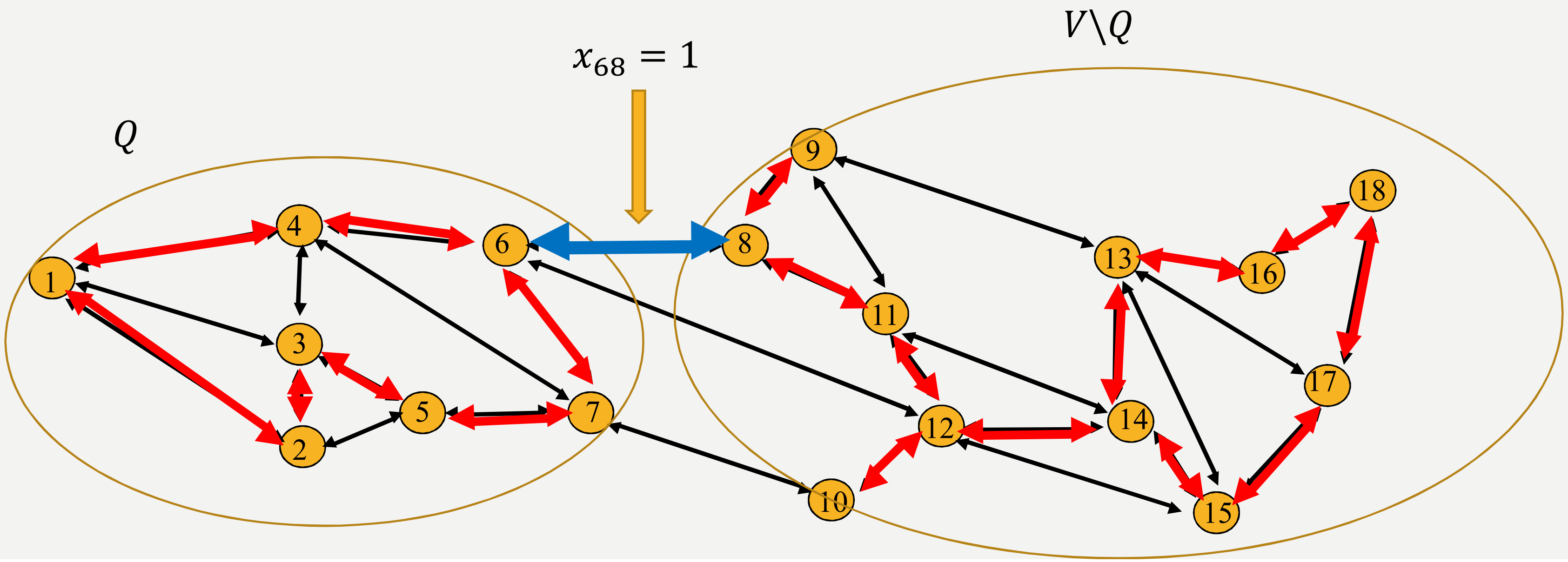
Gotta catch 'em all!

- Inoltre, non vogliamo la presenza di sotto-percorsi

$$\sum_{i\in Q}\sum_{j\in V\setminus Q} x_{ij} \geq 1 \quad \forall Q \subset V, |Q| \geq 1$$

- Con questo vincolo vogliamo che comunque si scelga un sottoinsieme proprio di nodi Q in V, deve esistere almeno un arco che colleghi un nodo di Q con un nodo non appartenente a Q.

- In questo esempio abbiamo il sottoinsieme proprio Q che viene collegato con $V\setminus Q$ attraverso l'arco x_{68}



Gotta catch 'em all!

- Cercare il percorso più breve che copra tutte le Pokestops corrisponde al seguente problema di ottimizzazione lineare intera (su grafo!):

$$\min\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$$

funzione costo

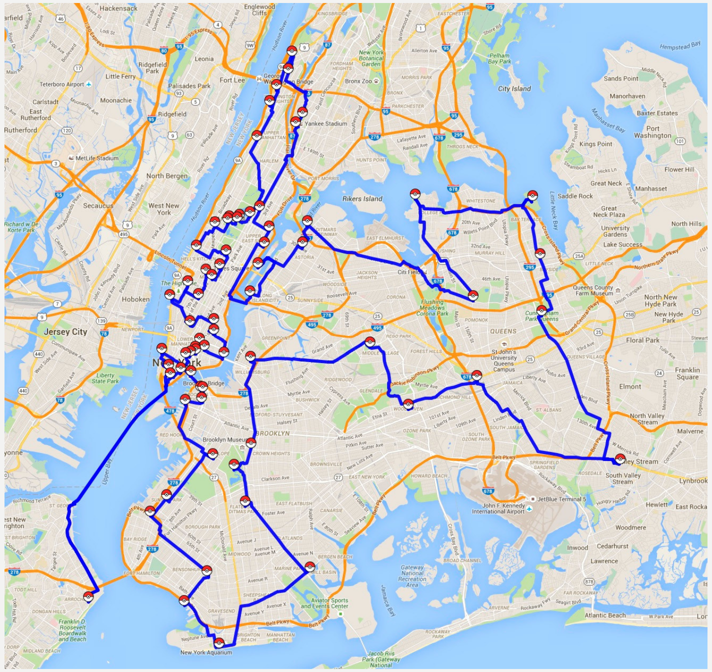
soggetto a:

$$\sum_{i=1,i\neq j}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1,,j\neq i}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,\dots,n$$

$$\sum_{i\in Q}\sum_{j\in V\setminus Q} x_{ij} \geq 1 \quad \forall Q \subset V, |Q| \geq 1$$

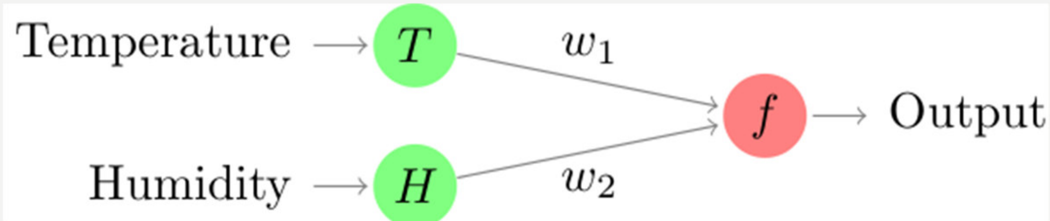
$$x_{ij} \in \{0,1\}$$



Un modello predittivo

Temp. [°C]	20	31	15	18	21
Humidity [%]	40	36	23	45	30
Prob. Pioggia	70%	52%	55%	73%	60%

- Si propone il modello seguente:

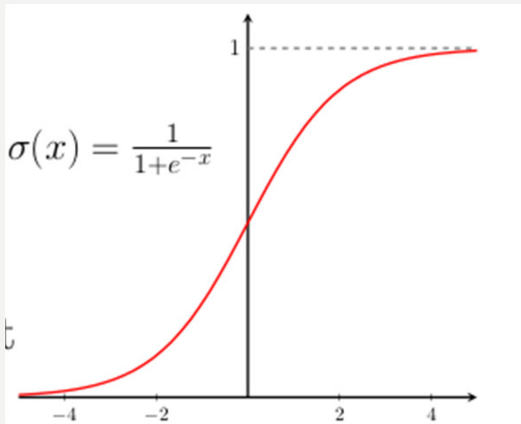


1. $x_1 \rightarrow x_1 \cdot w_1$ e $x_2 \rightarrow x_2 \cdot w_2$

2. $x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2$

3. $y = \frac{1}{1+e^{-(x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2)}}$

funzione di attivazione



- Il mio output sarà: $$y = \frac{1}{1 + e^{-(x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2)}}$$

- Quali parametri w1 e w2 generano le migliori predizioni?

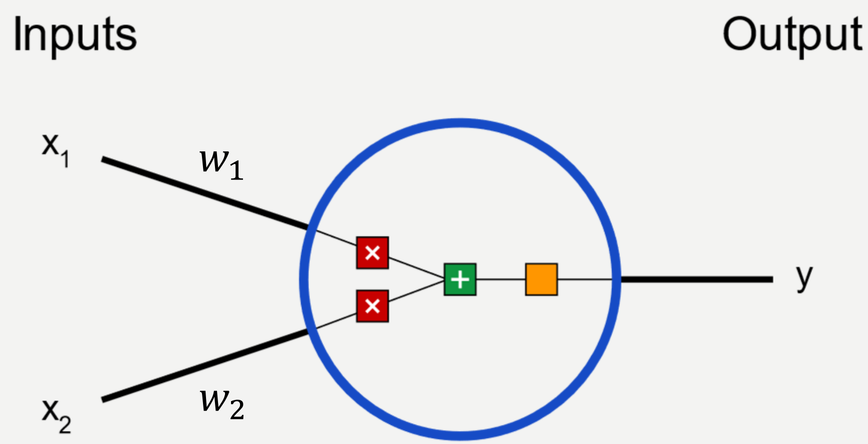
Come funziona una rete neurale

- In questa rete succedono 3 cose:

1. $x_1 \rightarrow x_1 \cdot w_1$ e $x_2 \rightarrow x_2 \cdot w_2$

2. $x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2$

3. $y = \frac{1}{1+e^{-(x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2)}}$



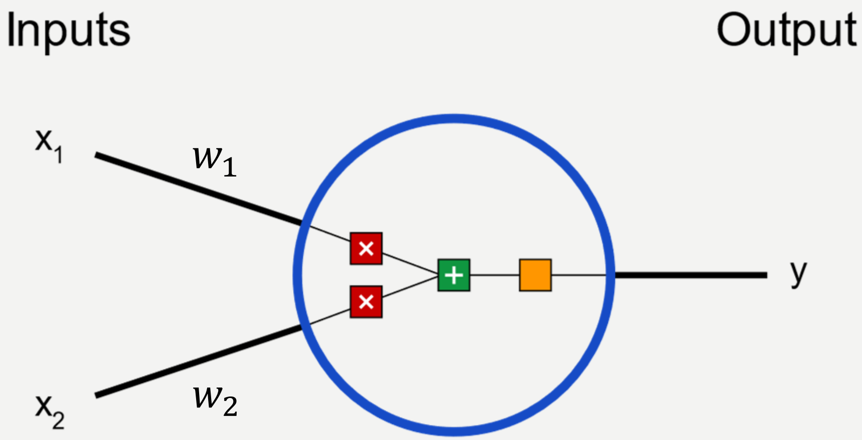
- Il mio output è

$$y = \frac{1}{1+e^{-(x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2)}}$$

Addestrare una rete neurale

- Supponiamo di avere una tabella di input-output

x_1	x_2	y
0	1	0.88
1	0	0.73
0	0	0.5
1	1	0.6
0.5	0.7	0.86



- Qual è l'output di x_1=0.4 e $x_2 = -0.4$?

Addestrare una rete neurale

- Voglio che i miei input...

x_1	x_2
0	1
1	0
0	0
1	1
0.5	0.7

...mi diano diano questi output

y
0.88
0.73
0.5
0.6
0.86

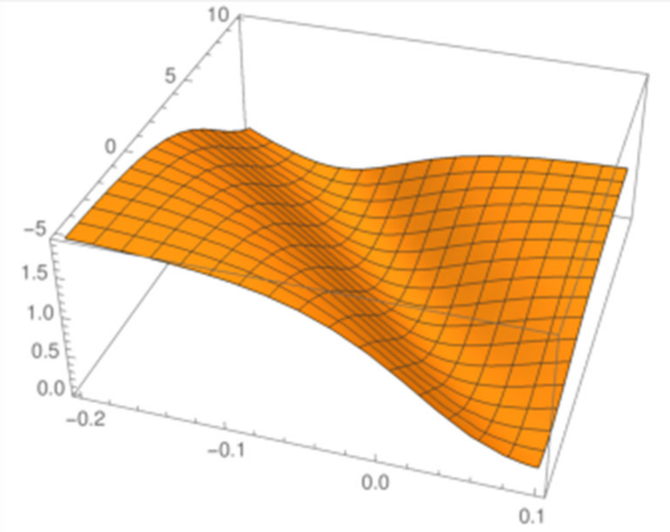
Addestrare una rete neurale

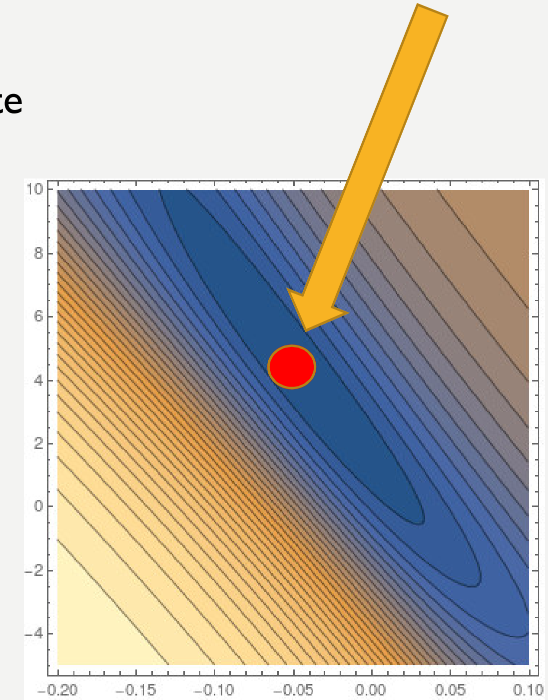
- Addestrare un rete neurale significa ottimizzare!!!

$$\min_{w_1,w_2} \sum_{i=1}^{5} \left(y_i - \frac{1}{1 + e^{-(x_{1i}\cdot w_1 + x_{2i}\cdot w_2)}} \right)^2$$

- In questo caso ho un problema di ottimizzazione non-lineare con 2 incognite

w1= -0.04
w2= 4.9





- Qual è l'output di x_1=0.4 e $x_2 = -0.4$?

$$y = \frac{1}{1 + e^{-\left(0.4\cdot(-0.299) - 0.4\cdot(0.518)\right)}} = \cdots$$

Addestrare una rete neurale

- E se ho più input?

$$\min_{w_1,\dots,w_n,} \sum_{i=1}^{5}\left(y_i - \frac{1}{1+e^{-(x_{1i}\cdot w_1+\cdots+x_{ni}\cdot w_n)}}\right)^2$$

- In questo caso ho un problema di ottimizzazione con n incognite!!!