PROGRAMMAZIONE LINEARE

INTRODUZIONE E SOLUZIONE GRAFICA

Formulazione di un problema di PL

- Consideriamo un generico problema di programmazione lineare (PL) con n variabili e m vincoli

$$\text{opt } f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \qquad \text{(funzione obiettivo lineare)}$$

$$X = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\boldsymbol{x}) \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} 0, i = 1, \dots, m\right\}, \qquad \text{con } g_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} - b_i \qquad \text{(vincoli lineari)}$$

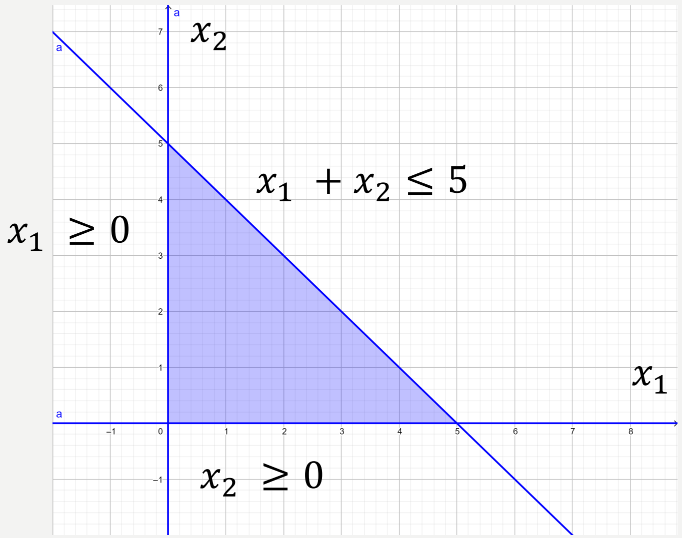
dove $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ e $\text{opt} = \begin{Bmatrix} \min \\ \max \end{Bmatrix}$

- I problemi di ottimizzazione reali si presentano in forma PL se sono verificate le seguenti ipotesi:
  - **Proporzionalità**: il contributo di ogni variabile decisionale al valore della funzione obiettivo è proporzionale rispetto al valore assunto dalla variabile stessa
  - **Additività**: ogni funzione è la somma dei contributi delle variabili
  - **Continuità**: qualunque valore delle variabili in $\mathbb{R}^n$ è accettabile

Caso 2D

- Nel caso 2D, abbiamo che:
  - I vincoli $g_i(\boldsymbol{x})$ possono essere **rette** ($g_i(\boldsymbol{x}) = 0$) o **semipiani** ($g_i(\boldsymbol{x}) \geq 0$ o $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$)
  - La regione ammissibile X risulta essere un sottoinsieme **convesso** del piano cartesiano
  - La funzione obiettivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ è un **piano** nello spazio $\mathbb{R}^3$
- Senza perdere di generalità si assume un vincolo di non negatività delle variabili, ovvero $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ (consideriamo solo il primo quadrante del piano cartesiano)

Esempio di regione ammissibile

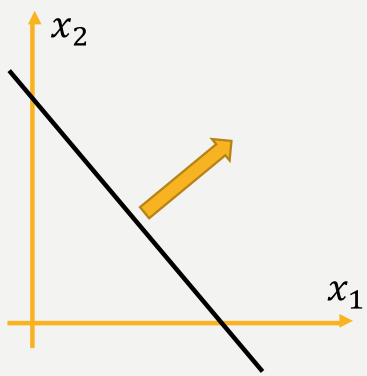


Vincolo retta

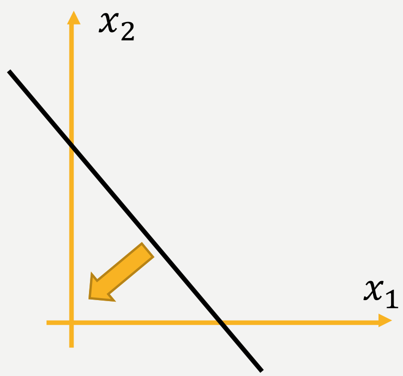
- Un vincolo del tipo $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b_1$ è una retta nel piano

- L'inclinazione della retta è perpendicolare al vettore $\boldsymbol{v} = (a_1, a_2)$

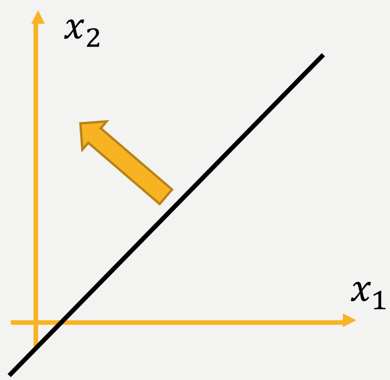
$a_1 > 0$ e $a_2 > 0$



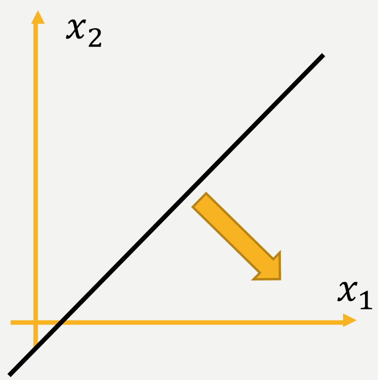
$a_1 < 0$ e $a_2 < 0$



$a_1 < 0$ e $a_2 > 0$



$a_1 > 0$ e $a_2 < 0$



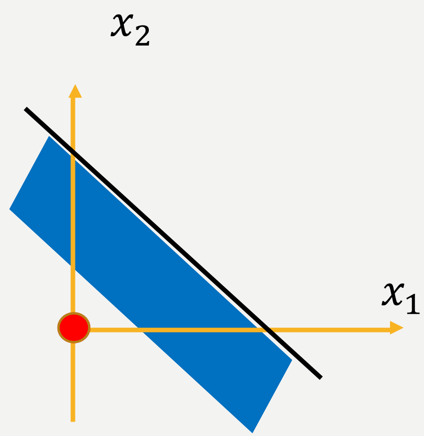
Vincolo semipiano

- Un vincolo del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b_1$ è un semipiano
- Come rappresentiamo il semipiano?
  1. Disegniamo la retta associata $(a_1x_1 + a_2x_2 = b_1\ )$
  2. Scegliamo un punto non appartenente a tale retta
     - Se il punto verifica la disuguaglianza allora scegliamo il semipiano che lo contiene
     - Altrimenti scegliamo l'altro semipiano

Esempio

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

1. Disegniamo la retta associata $x_1 + x_2 = 2$
2. Scegliamo il punto $(0{,}0)$
3. Il punto soddisfa la disequazione perché $0 + 0 \leq 2$
4. Scegliamo il semipiano che contiene $(0{,}0)$



- **Osservazione**: Un vincolo del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b_1$ è equivalente a $-a_1x_1 - a_2x_2 \leq -b_1$

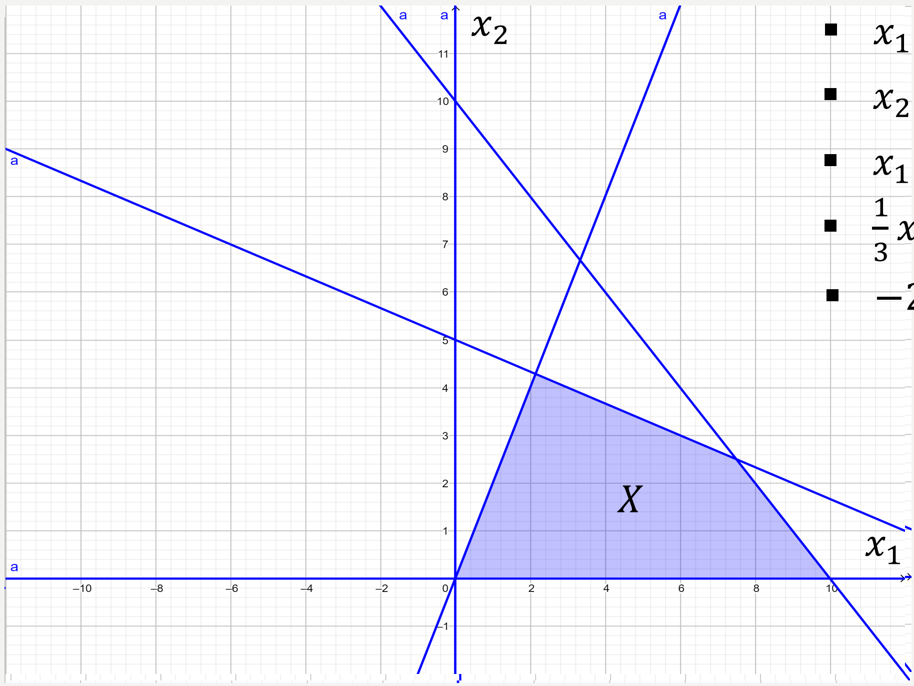
La regione ammissibile

- La regione ammissibile X è data dall'intersezione dei vari vincoli (rette e semipiani)
- La regione ammissibile da un punto di vista geometrico corrisponde ad un **poliedro convesso** in $\mathbb{R}^2$
- La regione ammissibile può essere limitata (**politopo**) o illimitata

Esempio
Disegniamo la seguente regione ammissibile

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tale che:

- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 10$
- $\frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq 5$
- $-2x_1 + x_2 \leq 0$



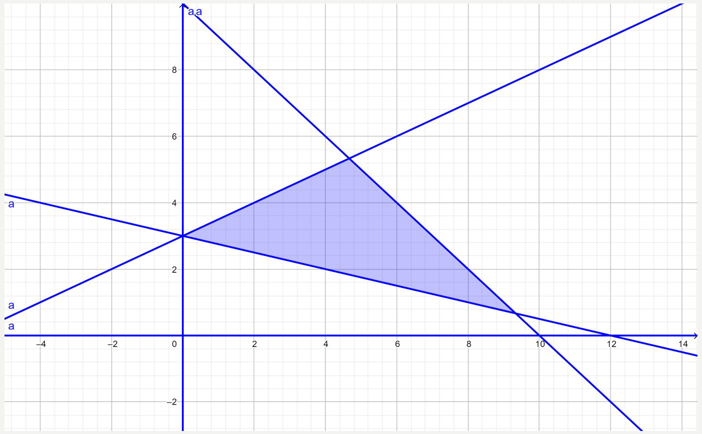
- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 10$
- $\frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq 5$
- $-2x_1 + x_2 \leq 0$

Esempi di regioni ammissibili

La seguente regione ammissibile…

- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 10$
- $\frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq 3$
- $\frac{1}{4}x_1 + x_2 \geq 3$

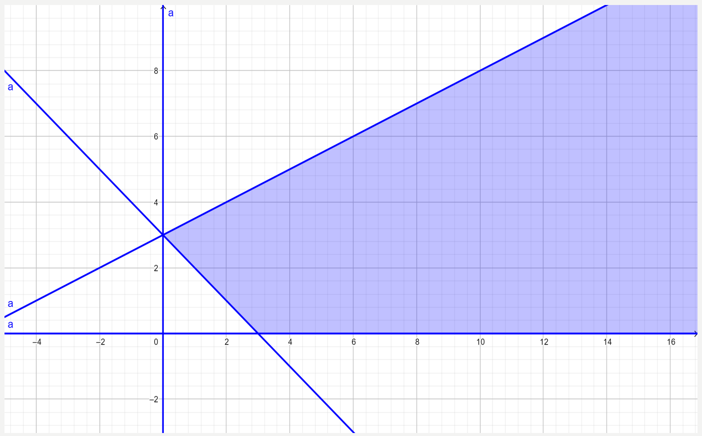
…è un triangolo (politopo con 3 vertici)



La seguente regione ammissibile…

- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$
- $\frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq -3$
- $x_1 + x_2 \geq 3$

…è un poliedro illimitato con 2 vertici

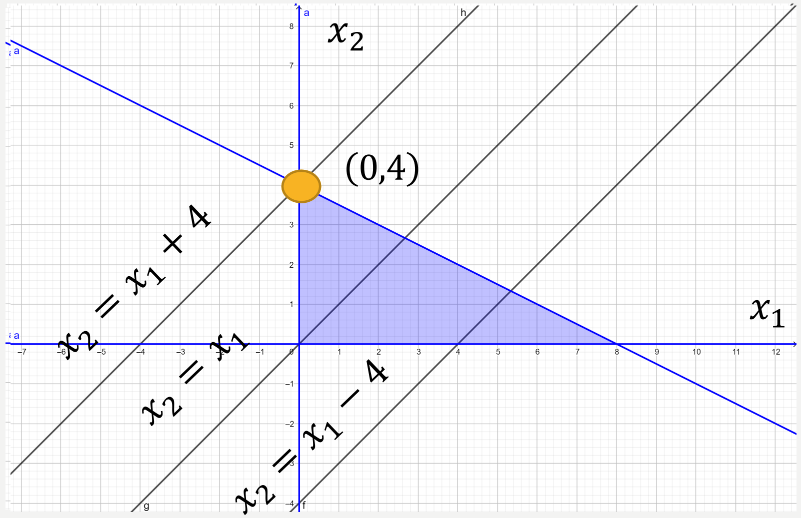


Risoluzione grafica di un problema PL

- Consideriamo il seguente problema di ottimizzazione

$$\max z = -x_1 + x_2$$

- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$



- Riscriviamo la funzione obiettivo come $x_2 = x_1 + z$, che rappresenta un fascio di rette parallele al variare di z

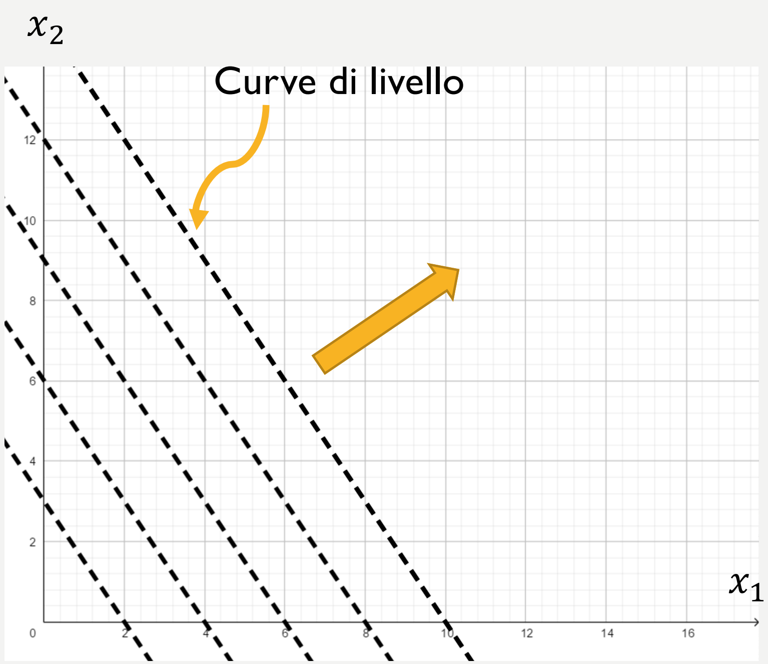
- Osserviamo che all'aumentare di z le rette si spostano sempre di più verso il punto $(0,4)$.

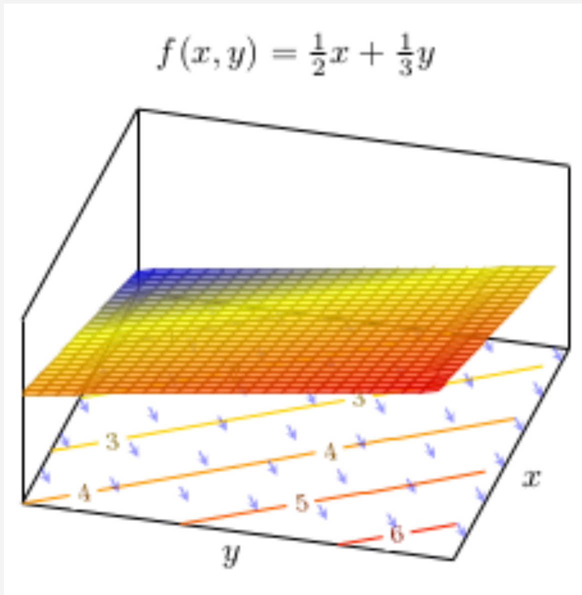
- Dopo tale punto usciamo dalla regione ammissibile

- La soluzione ottima è il punto $(0,4)$ che rappresenta un vertice della regione ammissibile (poligono convesso)

La funzione obiettivo

- La funzione obiettivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ rappresenta un piano nello spazio 3D passante per l'origine
- In particolare:
  - Se $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ allora il piano cresce da sinistra verso destra dal basso verso l'alto

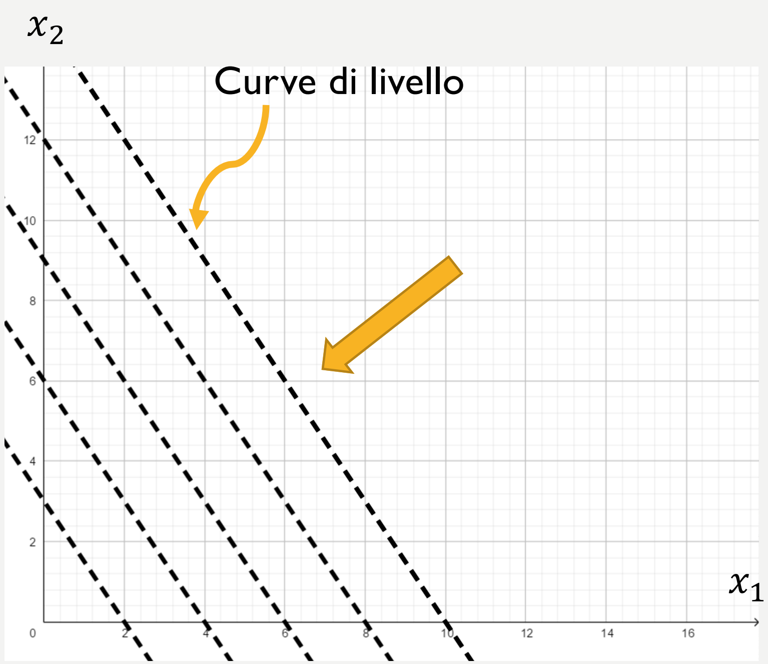




La funzione obiettivo

- La funzione obiettivo $\mathrm{z} = c_1 x_1 + c_2 x_2$ rappresenta un piano nello spazio 3D passante per l'origine

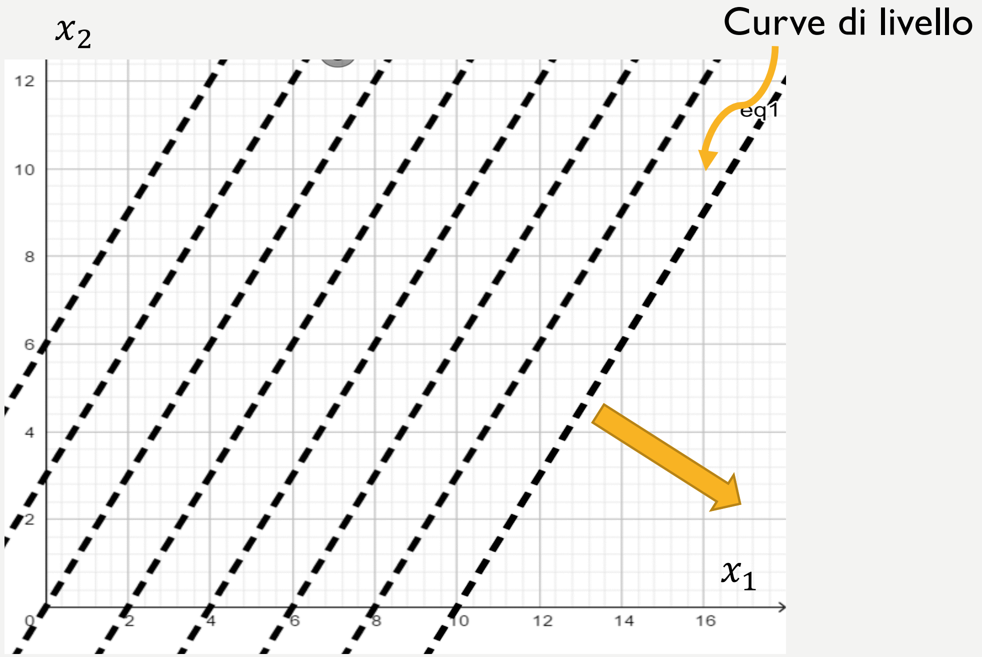
- In particolare:
  - Se $c_1 < 0$ e $c_2 < 0$ allora il piano cresce da destra verso sinistra dall'alto verso il basso



La funzione obiettivo

- La funzione obiettivo $\mathrm{z} = c_1x_1 + c_2x_2$ rappresenta un piano nello spazio 3D passante per l'origine

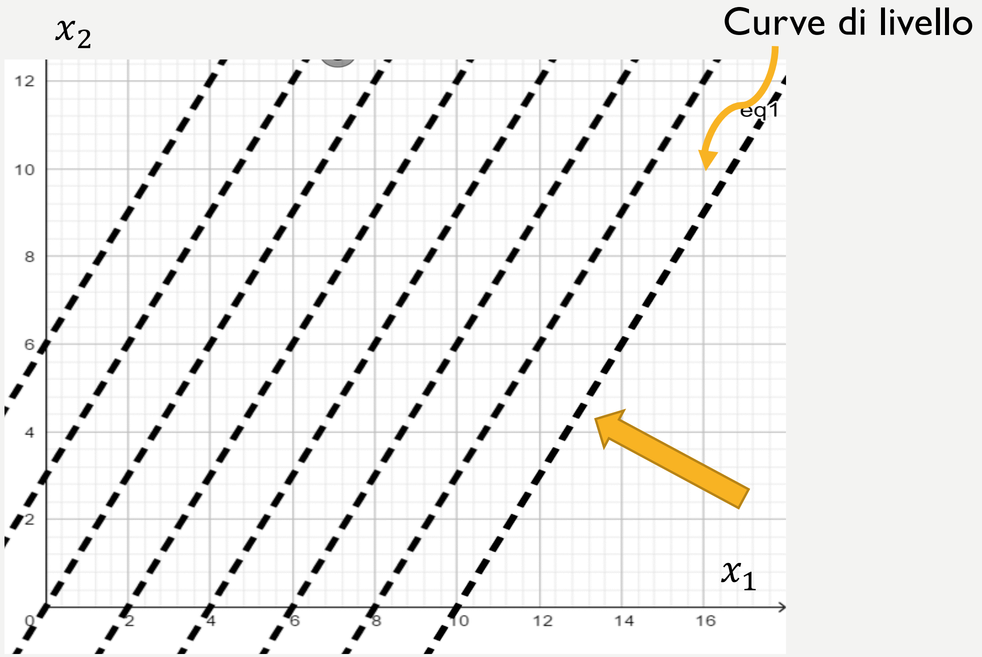
- In particolare:
  - Se $c_1 > 0$ e $c_2 < 0$ allora il piano cresce da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso



La funzione obiettivo

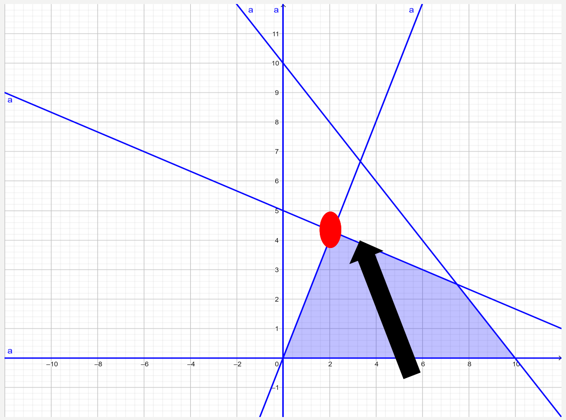
- La funzione obiettivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ rappresenta un piano nello spazio 3D passante per l'origine

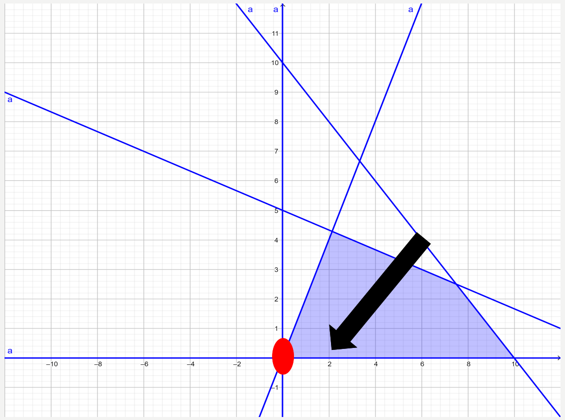
- In particolare:
  - Se $c_1 < 0$ e $c_2 > 0$ allora il piano cresce da destra verso sinistra, dal basso verso l'alto

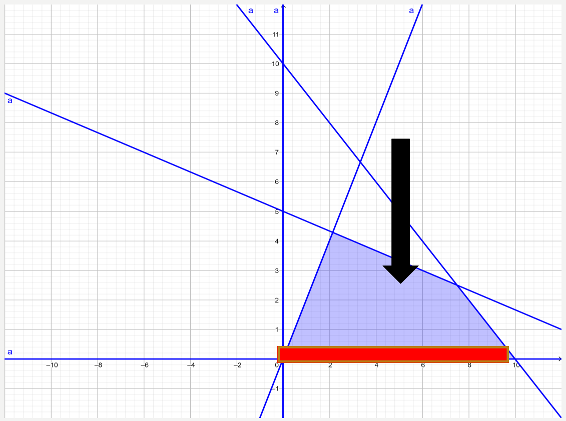


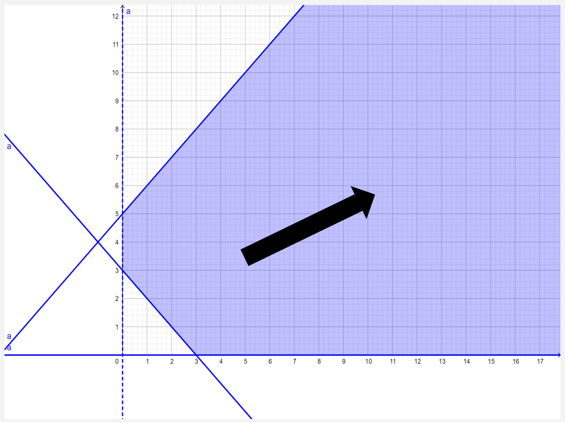
Soluzione grafica un problema PL

- è possibile individuare il punto di massimo (minimo) del problema PL seguendo la direzione di crescita (decrescita) della funzione obiettivo all'interno della regione ammissibile









Soluzione grafica un problema PL

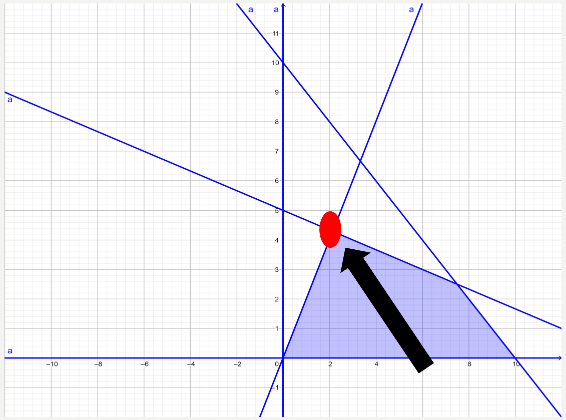
Si possono verificare tre situazioni:

1. il problema PL **ammette un'unica soluzione ottima** in un vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile

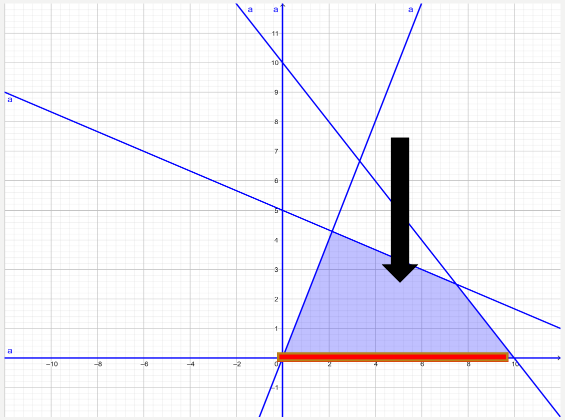
2. il problema PL **ammette infinite soluzioni ottime** in un lato del poligono convesso che delimita la regione ammissibile se la direzione di descrescita è perpendicolare ad un lato del poligono

3. il problema PL **non ammette soluzione** perché la regione ammissibile è illimitata e la funzione obiettivo è illimitata superiormente (se è di massimizzazione) o illimitata inferiormente (se è di minimizzazione)

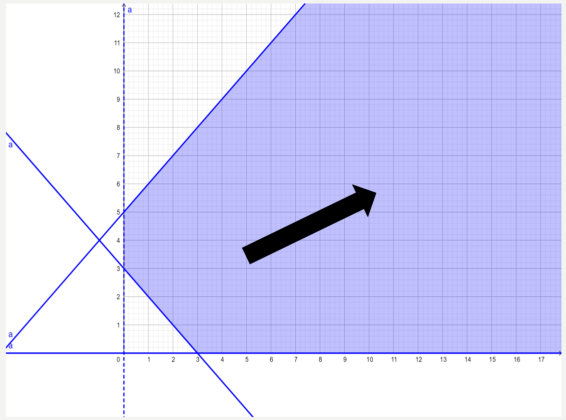
Unica soluzione ottima



Infinite soluzioni ottime



Problema illimitato



UN PROBLEMA PL

DAL LIBRO DI TESTO SECONDO HILLIER E LIEBERMAN, PAG. 18

Formulazione del problema

- La società WYNDOR GLASS & Co. realizza prodotti in vetro di alta qualità tra cui finestre e porte in vetro. Essa possiede tre stabilimenti. Lo Stabilimento 1 produce telai in alluminio, lo Stabilimento 2 produce telai in legno, mentre lo Stabilimento 3 produce il vetro e assembla i prodotti.

- I dirigenti della società hanno deciso di rinnovare la linea di produzione con il lancio di due nuovi prodotti:
  - Prodotto 1: una porta in vetro con intelaiatura in alluminio
  - Prodotto 2: una finestra con intelaiatura in legno

- Il guadagno stimato per i due nuovi prodotti è di 3000$ e 5000$ rispettivamente per lotto

- Nella seguente tabella è rappresentato il tempo di produzione richiesto ed il tempo massimo disponibile per lotto nei 3 stabilimenti per i due nuovi prodotti.

- **Qual è il tasso di produzione dei due prodotti che massimizza il profitto totale della società, rispettando i vincoli di produzione dei 3 stabilimenti?**

Stabilimento	Tempo di produzione richiesto per il Prodotto 1	Tempo di produzione richiesto per il Prodotto 2	Tempo di produzione disponibile
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18

Il modello matematico

- Indichiamo con x_1 e x_2 il numero di lotti per il primo ed il secondo prodotto rispettivamente (variabili decisionali)

- Le variabili variabili x_1 e x_2 sono chiaramente non negative ($x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$) con x_1e $x_2 \in \mathbb{R}^+$
(anche se i lotti sono quantità intere in questo caso si può pensare le due quantità come tassi di produzione nel tempo e quindi come delle quantità continue)

- Il **tempo richiesto** dallo Stabilimento 1 per produrre il prodotto 1 è dato da $1 \cdot x_1$

- Il **tempo richiesto** dallo Stabilimento 2 per produrre il prodotto 2 è dato da $2 \cdot x_2$

- Il **tempo richiesto** dallo Stabilimento 3 per produrre i prodotti 1 e 2 è dato da $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$

Stabilimento	Tempo di produzione richiesto per il Prodotto 1	Tempo di produzione richiesto per il Prodotto 2	Tempo di produzione disponibile
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18

Il modello matematico

- Cosa vuol dire lo Stabilimento 1 ha una disponibilità massima di produzione di 4 ore?

$$x_1 \leq 4$$ (vincolo lineare)

- Cosa vuol dire che lo Stabilimento 2 ha una disponibilità massima di produzione di 12 ore?

$$2 \cdot x_2 \leq 12$$ (vincolo lineare)

- Cosa vuol dire lo Stabilimento 3 ha una disponibilità massima di produzione di 18 ore?

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$$ (vincolo lineare)

- Cosa vuol dire massimizzare il profitto della società?

$$\max_{x_1, x_2} z = (3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$ (funzione obiettivo lineare)

(in realtà sarebbe $z = (3000 \cdot x_1 + 5000 \cdot x_2)$, ma dividendo per 1000 la soluzione del problema non cambia)

Stabilimento	Tempo di produzione richiesto per il Prodotto 1	Tempo di produzione richiesto per il Prodotto 2	Tempo di produzione disponibile
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18

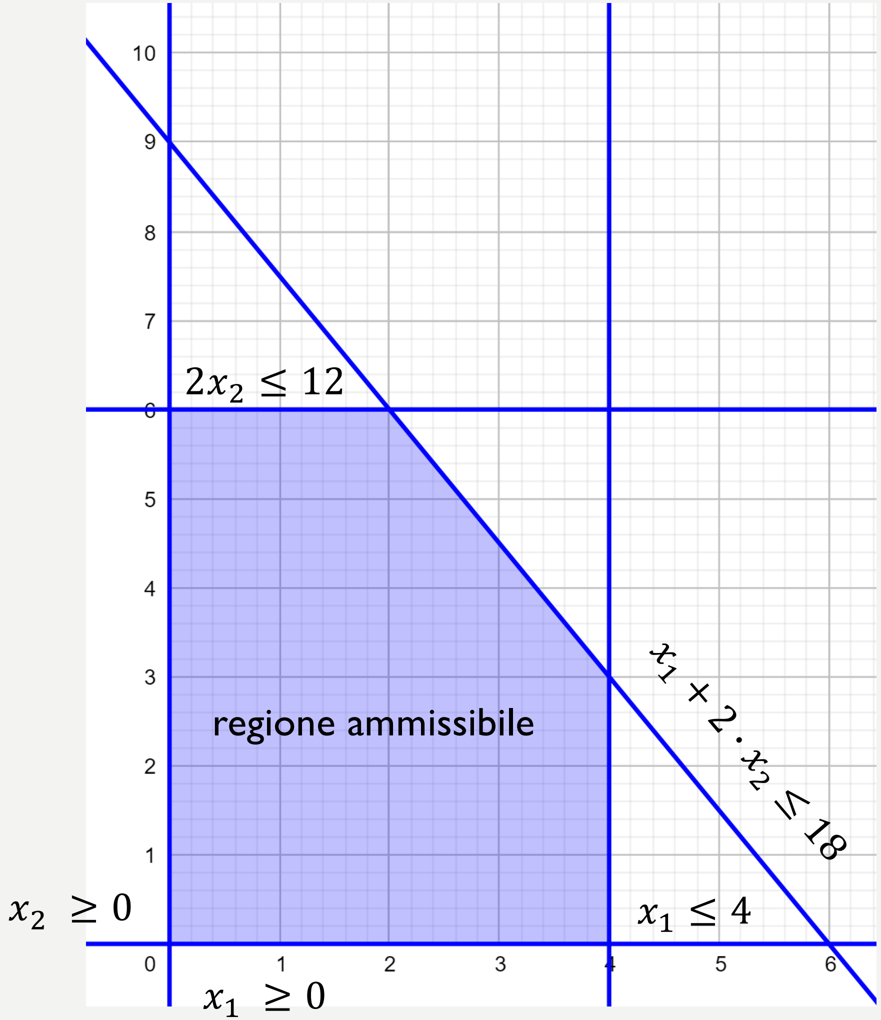
Il modello matematico

➢ Il modello matematico che si ottiene è dato da

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $x_1 \leq 4$
- $2 \cdot x_2 \leq 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$
- $x_1, x_2 \geq 0$



- Si tratta, quindi, di un problema di programmazione lineare a variabili continue con 3 vincoli (più 2 vincoli di non negatività)
- La regione ammissibile è un poligono convesso limitato

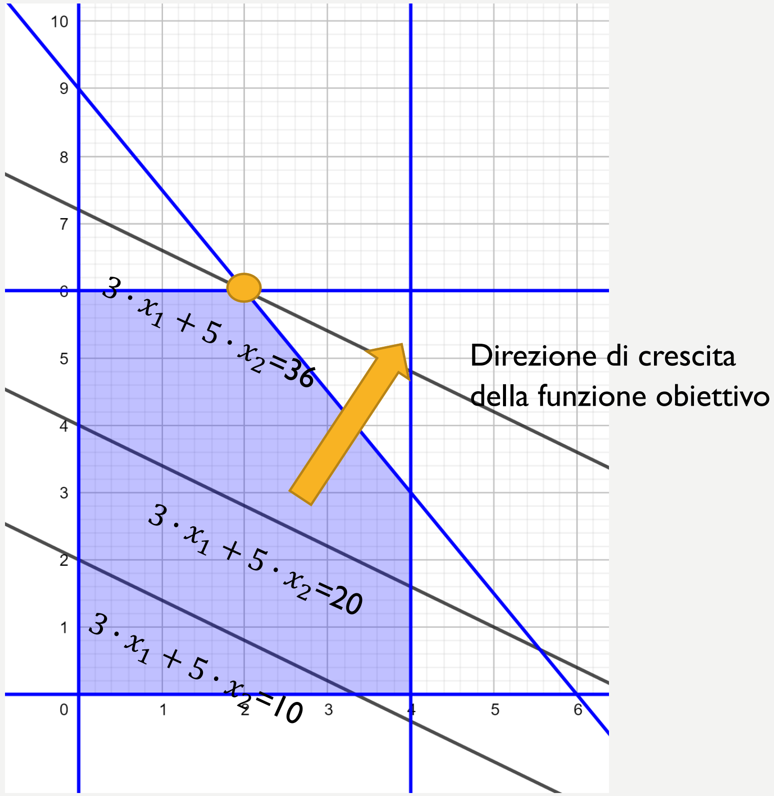
La soluzione

- La soluzione del problema può essere ottenuta per via grafica

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $x_1 \leq 4$
- $2 \cdot x_2 \leq 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$
- $x_1, x_2 \geq 0$



- La funzione obiettivo $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ crescente lungo la direzione positiva degli assi x_1 e x_2.

- Considerando le rette $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = z$ con $z > 0$ crescente si ottiene che il valore che massimizza la funzione obiettivo è $(2,6)$ dove $z = 36$

(Essendo la regione ammissibile finita e non vuota, per qualsiasi valore del profitto dei due prodotti si ottiene sempre almeno una soluzione ottima del problema (potrebbero essere infinite)