PROGRAMMAZIONE LINEARE

FORMA STANDARD DI UN PROBLEMA PL

Forma standard di un problema PL

- Consideriamo nuovamente un generico problema di programmazione lineare (PL)

$$\text{opt}\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \quad (\text{funzione obiettivo lineare})$$

$$X = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\boldsymbol{x}) \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} 0, i = 1, \dots, m\right\}, \qquad \text{con } g_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} - b_i \quad (\text{vincoli lineari})$$

- Ogni problema PL può essere riscritto nella seguente **forma standard**

$$\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

tale che:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

- Dove:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = [\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_n}]$$

Vettore colonna $\mathrm{n} \times 1$ — Vettore colonna $m \times 1$ — Matrice $m \times n$ — Vettore riga $m \times 1$

- Inoltre, per convenzione $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ (ovvero tutte le componenti b_i devono essere non negative)

Forma standard di un problema PL

Ogni problema PL può essere riscritto in **forma standard**

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

tale che:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Infatti:

1. $\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = -\max(-\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x})$
(ovvero esprimo un problema di minimo come un problema di massimo, risolvo $\max(-\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x})$ ed una volta risolto aggiungo il segno meno al valore trovato)

2. $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \leq b_i \rightarrow \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} + s_i = b_i$ dove $s_i \geq 0$ è una nuova variabile che prende il nome di **variabile di slack**
(ovvero esprimo un vincolo di disuguaglianza come uno di uguaglianza, introducendo una nuova variabile)

3. $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \geq b_i \rightarrow \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - s_i = b_i$ dove $s_i \geq 0$ è una nuova variabile che prende il nome di **variabile di surplus**
(ovvero esprimo un vincolo di disuguaglianza come uno di uguaglianza, introducendo una nuova variabile)

4. Se $x_i \in \mathbb{R}$ (**variabile libera**) allora possono definire due nuove variabili u_i e v_i tali che:
   - $u \geq 0$
   - $v_i \geq 0$
   - $x_i = u_i - v_i$

(ovvero esprimo una variabile libera attraverso una combinazione di variabili non-negative)
(Un altro possibilità consiste nel ricavare l'espressione di tale variabile da uno dei vincoli del problema, eliminare tale vincolo del modello e sostituire tale espressione laddove compaia la variabile libera)

Esempio 1

- Trasformiamo il seguente problema PL in forma standard

$\min\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2\right)$	$-\max\left(+\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2\right)$
Tale che:	
$x_1 + x_2 \leq 10$	$x_1 + x_2 + s_1 = 10$
$\frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq -5$	$-\frac{1}{3}x_1 - x_2 - s_2 = 5$
$-2x_1 + x_2 \leq 0$	$-2x_1 + x_2 + s_3 = 0$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

- Notiamo che passiamo da un problema con 2 variabili ad uno con 5 variabili

Esempio 2

- Trasformiamo il seguente problema PL in forma standard

$\min(3x_1 + 5x_2 - 7x_3)$	$-\max\big(-3x_1 - 5x_2 + 7(u_3 - v_3)\big)$
Tale che:	
$3x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 5$	$3x_1 + 7x_2 + 6u_3 - 6v_3 + s_1 = 5$
$3x_1 + x_3 \geq 1$	$3x_1 + u_3 - v_3 - s_2 = 1$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, s_1, s_2, u_3, v_3 \geq 0$
$x_3 \in \mathbb{R}$ (libera)	$x_3 = u_3 - v_3$

- Notiamo che passiamo da un problema con 3 variabili ad uno con 6 variabili

- Inoltre, essendo x_3 libera, la sostituiamo ovunque nel modello come segue: $x_3 = u_3 - v_3$

Esempio 2-versione 2

- Possiamo anche ricavare x_3 dal secondo vincolo una volta introdotta la variabile di surplus, ottenendo $x_3 = -3x_1 + s_2 + 1$

$\min(3x_1 + 5x_2 - 7x_3)$

Tale che:

- $3x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 5$
- $3x_1 + x_3 \geq 1$
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_3 \in \mathbb{R}$ (libera)

$-\max(-3x_1 + 5x_2 + 7x_3)$

- $3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + s_1 = 5$
- $3x_1 + x_3 - s_2 = 1$
- $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$
- $x_3 \in \mathbb{R}$ (libera)

$-\max(-24x_1 - 5x_2 + 7s_2)$

- $15x_1 - 7x_2 - s_1 - 6s_2 = 1$
- $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

$x_3 = -3x_1 + s_2 + 1$

Esempio 3

- Riprendiamo il modello matematico relativo alla società Wyndor Glass Co.

$$\max_{x_1,x_2}(3\cdot x_1 + 5\cdot x_2)$$

soggetto a:

- $x_1 \leq 4$
- $2\cdot x_2 \leq 12$
- $3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \leq 18$
- $x_1, x_2 \geq 0$

$\Rightarrow$

$$\max_{x_1,x_2}(3\cdot x_1 + 5\cdot x_2)$$

soggetto a:

- $x_1 + s_1 = 4$
- $2\cdot x_2 + s_2 = 12$
- $3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + s_3 = 18$
- $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Osservazione Ogni sistema di vincoli della forma $\mathbf{N}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ viene trasformato nel sistema

$$\mathbf{A}=[N \quad I]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x_s}\end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

- $\boldsymbol{I}$ è una matrice identità di dimensione $m \times m$
- $\boldsymbol{x_s}$ sono m variabili di slack

Alcune considerazioni

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

tale che:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

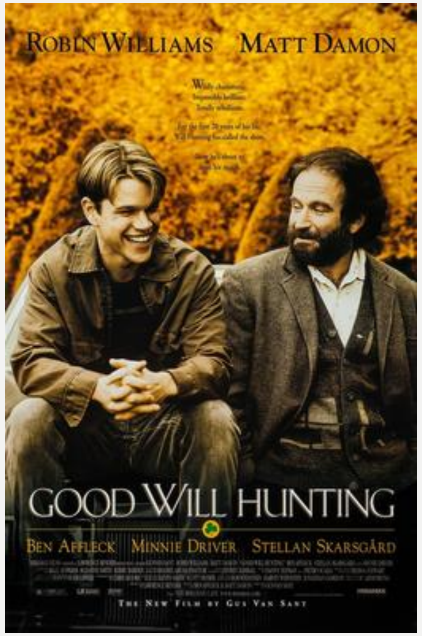
- Se il numero di vincoli m di $\boldsymbol{A}$ è strettamente maggiore del numero di variabili n, allora:
  - se il rango di $\boldsymbol{A}$ è maggiore di n, il sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ non ha soluzione
    (è una conseguenza del Teorema di Rouchè-Capelli)
  - se il rango di $\boldsymbol{A}$ è n allora ho $m - n$ vincoli ridondanti
    (ad esempio potrei avere:
    - $x_1 + x_2 \leq 10$
    - $x_1 + 2x_2 \leq 5$
    - $2x_1 + 3x_2 \leq 15$

    dove il terzo vincolo si ottiene dalla somma dei primi due)
- Se il numero di righe di $\boldsymbol{A}$ è uguale al numero di colonne (matrice quadrata) allora:
  - se $\det(A) \neq 0$ esiste un'unica soluzione del problema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Se tale soluzione ha tutte le componenti non-negative allora è anche la soluzione ottimale del problema. Altrimenti il problema non ha soluzione
  - se $\det(A) = 0$ il sistema non ammette soluzioni o uno dei vincoli è ridondante

PROGRAMMAZIONE LINEARE

METODO DEL SIMPLESSO: UN'INTRODUZIONE GEOMETRICA

Metodo del simplesso



- Ideato da George Dantzig nel 1947
- La figura di Dantzig ha ispirato il film Will Hunting (1997)
- Considerato come uno dei dieci migliori algoritmi del 900 (*)
- È un algoritmo efficiente?
  1. Nel caso medio il tempo computazionale è **lineare** rispetto al numero delle variabili
  2. Nel caso peggiore può risultare **esponenziale** (**)
  3. Ancora oggi rappresenta uno degli algoritmi più efficienti per risolvere un problema PL

(*) Computing in Science and Engineering
(**) Klee, V. and Minty, G. (1972)"How good is the simplex algorithm?".

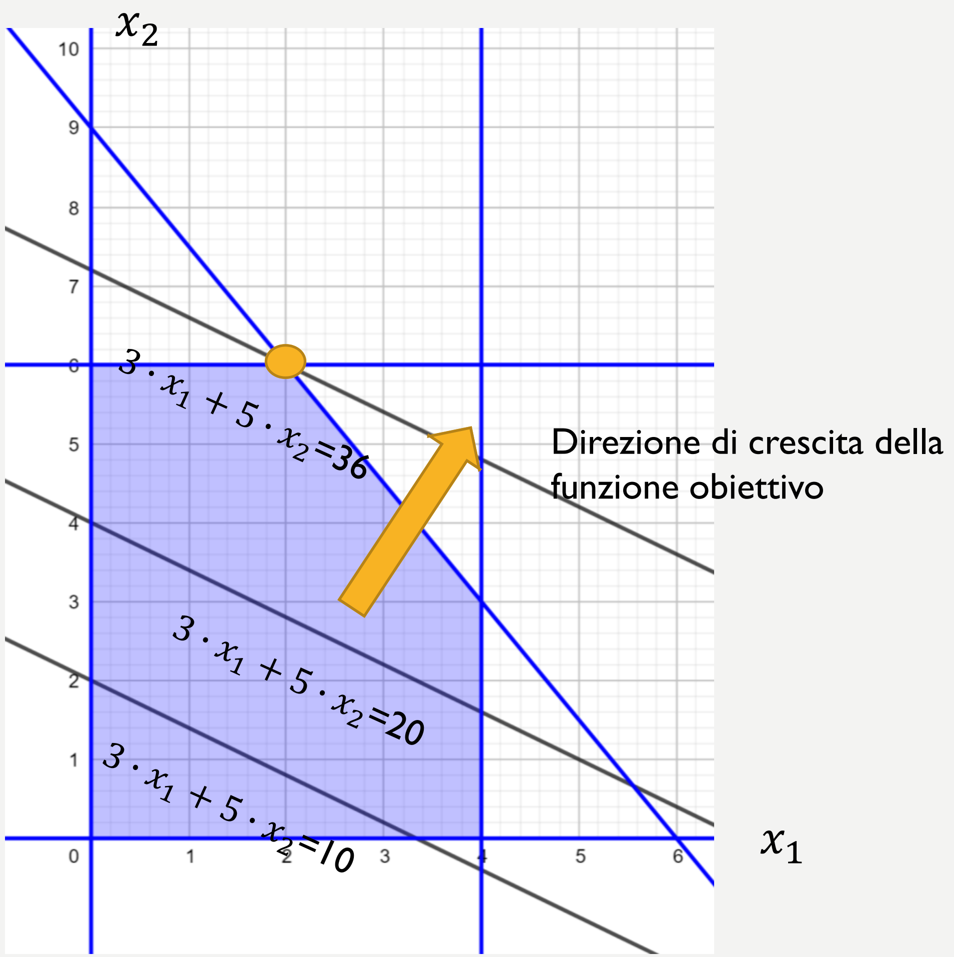
Modello matematico

- Riprendiamo il modello matematico relativo alla società WYNDOR GLASS & Co.

$$\max_{x_1,x_2} z = (3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $x_1 \leq 4$
- $2 \cdot x_2 \leq 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$
- $x_1 , x_2 \geq 0$



Un problema di programmazione lineare a variabili continue con 5 vincoli (3 funzionali e 2 di non negatività)

Il valore che massimizza $3x_1 + 5x_2$ è $(2, 6)$

Concetti geometrici del metodo del simplesso

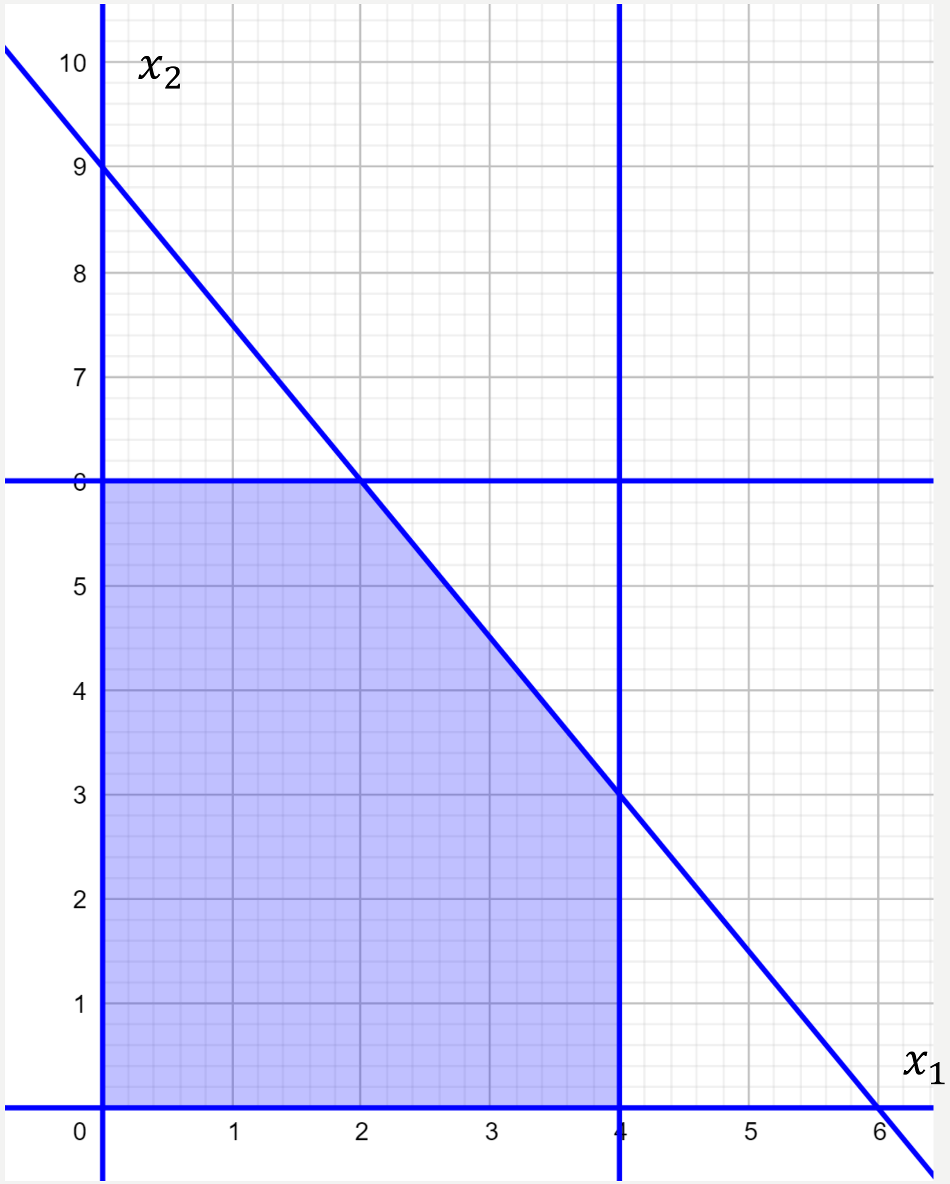
- Per un vincolo, l'equazione della **frontiera** è ottenuta sostituendo $\leq$ o $\geq$ con =

Esempio

- $x_1 \leq 4$ → $x_1 = 4$
- $2 \cdot x_2 \leq 12$ → $2 \cdot x_2 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$ → $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 18$
- $x_1 \geq 0$ → $x_1 = 0$
- $x_2 \geq 0$ → $x_2 = 0$

- Nello spazio 2D, una frontiera corrisponde ad una **retta**

(Nello spazio n-dimensionale la frontiera corrisponde ad un **iperpiano**)



Concetti geometrici del metodo del simplesso

- Un **vertice ammissibile** è una soluzione ammissibile che non è presente su nessun segmento che congiunge altre due soluzioni ammissibili

  (i vertici di un poligono convesso non possono essere mai ottenuti da una combinazione convessa di altri 2 punti del poligono)

- Per un problema PL 2D, ogni vertice ammissibile è l'intersezione delle frontiere di 2 vincoli

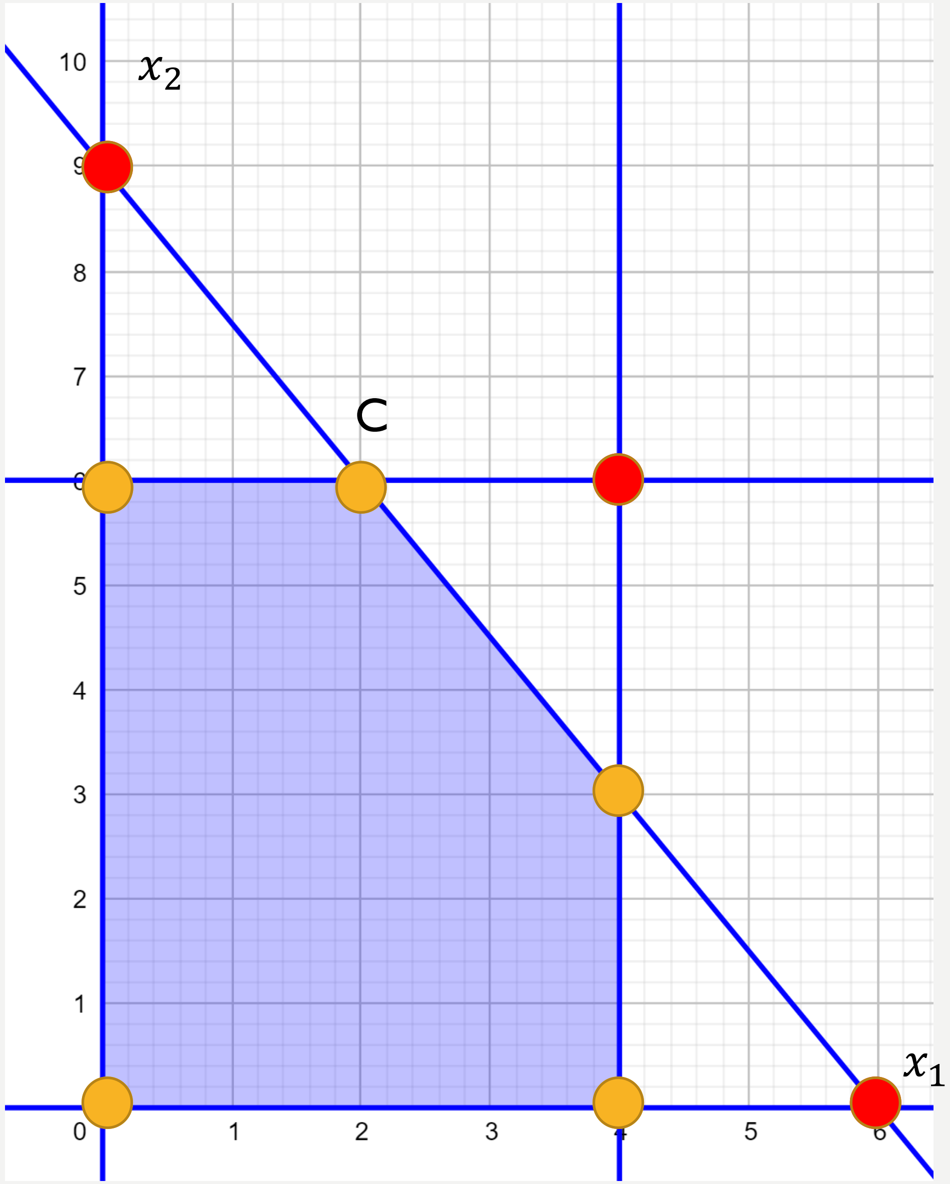
  (Per un problema PL n-dimensionale, ogni vertice ammissibile è l'intersezione delle frontiere di n vincoli)

Esempio

Nel problema WYNDOR GLASS & Co. vi sono:

- 8 vertici
- 5 vertici ammissibili
- 3 vertici non ammissibili

Il vertice C è ammissibile ed è dato dall'intersezione della frontiera $2x_1 = 12$ con $3x_1 + 2 = 18$

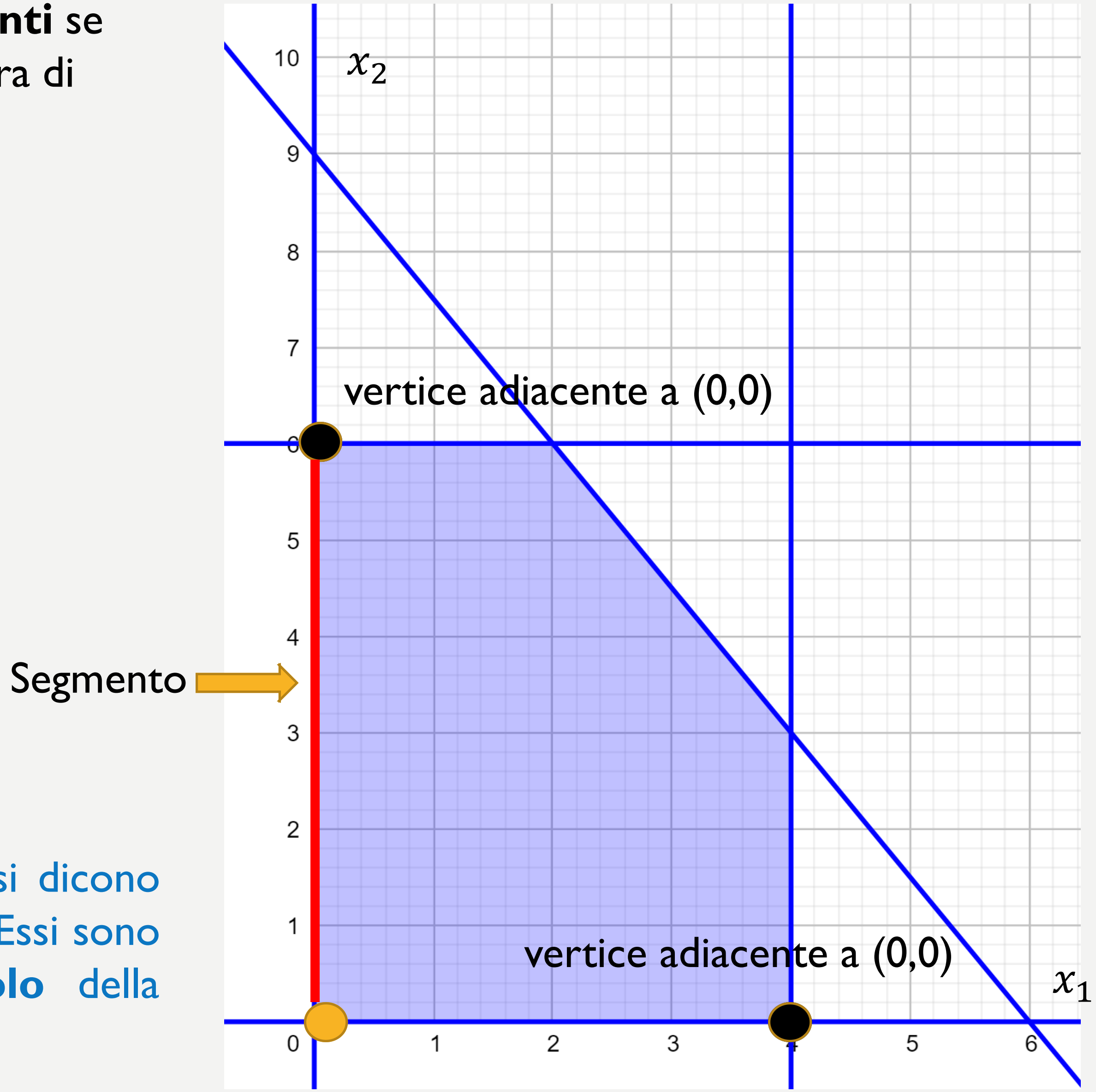


Concetti geometrici del metodo del simplesso

- In un problema PL 2D, due vertici si dicono **adiacenti** se sono vertici di un medesimo **segmento** (la frontiera di uno dei vincoli) della regione ammissibile

Esempio

Vertici	Vertici Adiacenti
(0,0)	(0,6) ; (4,0)
(0,6)	(2,6) ; (0,0)
(2,6)	(4,3) ; (0,6)
(4,3)	(4,0) ; (2,6)
(4,0)	(0,0) ; (4,3)

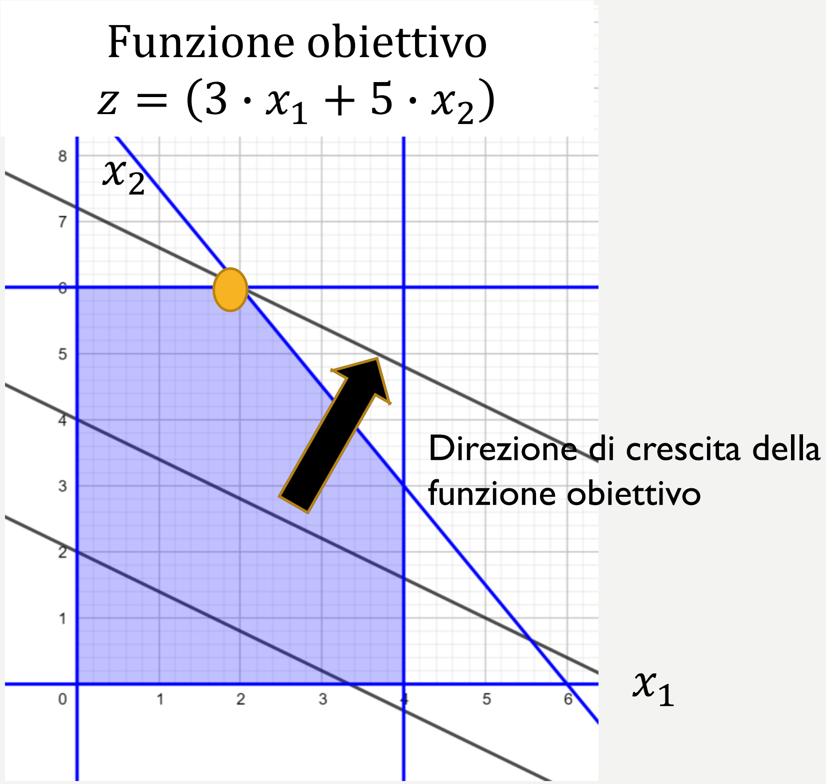


(Per un problema di PL con n variabili, due vertici si dicono adiacenti se condividono le frontiere di $n-1$ vincoli. Essi sono collegati attraverso un segmento, chiamato **spigolo** della regione ammissibile)

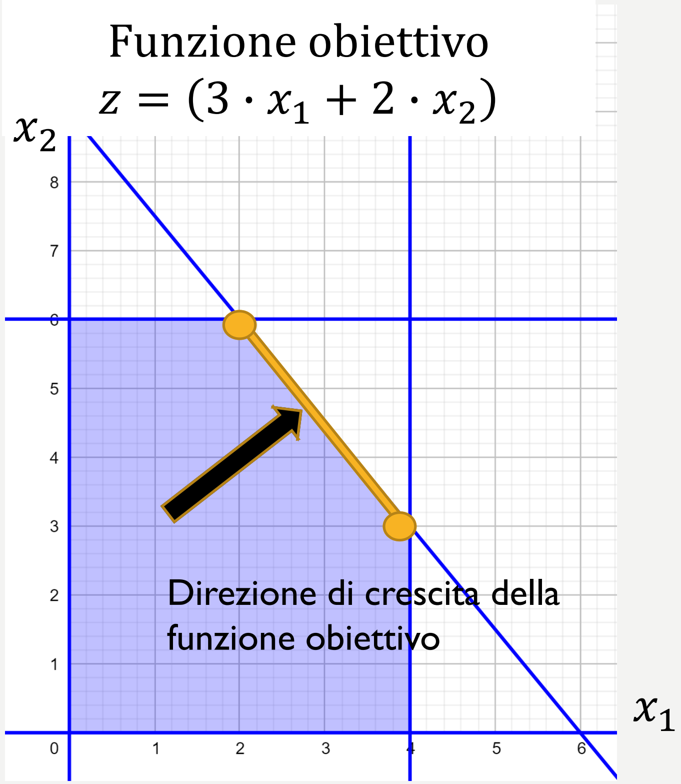
Teorema fondamentale della PL

Dato un generico problema PL:

1. Se esiste una sola soluzione ottima (i.e., se X è non vuoto e limitato), allora deve essere un vertice ammissibile
2. Se esistono soluzioni ottime multiple e la regione ammissibile è limitata, allora almeno due soluzioni ottime sono vertici adiacenti ammissibili



La soluzione del problema ha esattamente una soluzione (x_1, x_2)=(2,6), che corrisponde ad un vertice ammissibile



Il problema ha infinite soluzioni ottime. Due di queste sono due vertici adiacenti ammissibili

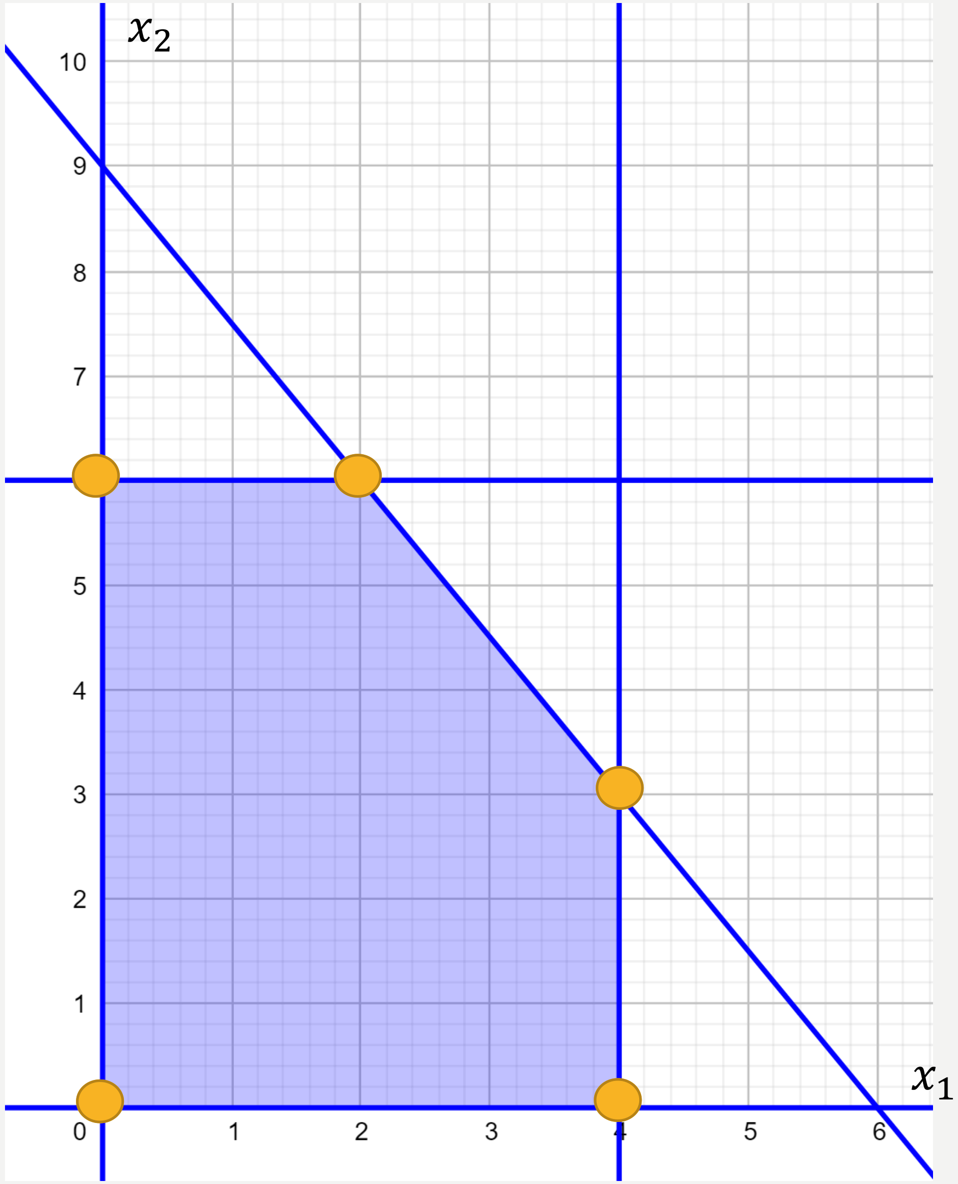
Vertici ammissibili

- Il numero di vertici ammissibili è finito

- Nel caso in esame, questo è una conseguenza del fatto che ogni vertice è l'intersezione di 2 delle 5 frontiere del problema e, quindi, il numero **massimo** di combinazioni differenti di 5 equazioni considerate 2 alla volta è dato da:

$$\binom{5}{2} = 10$$

(Nel nostro esempio abbiamo 8 vertici di cui 5 ammissibili)



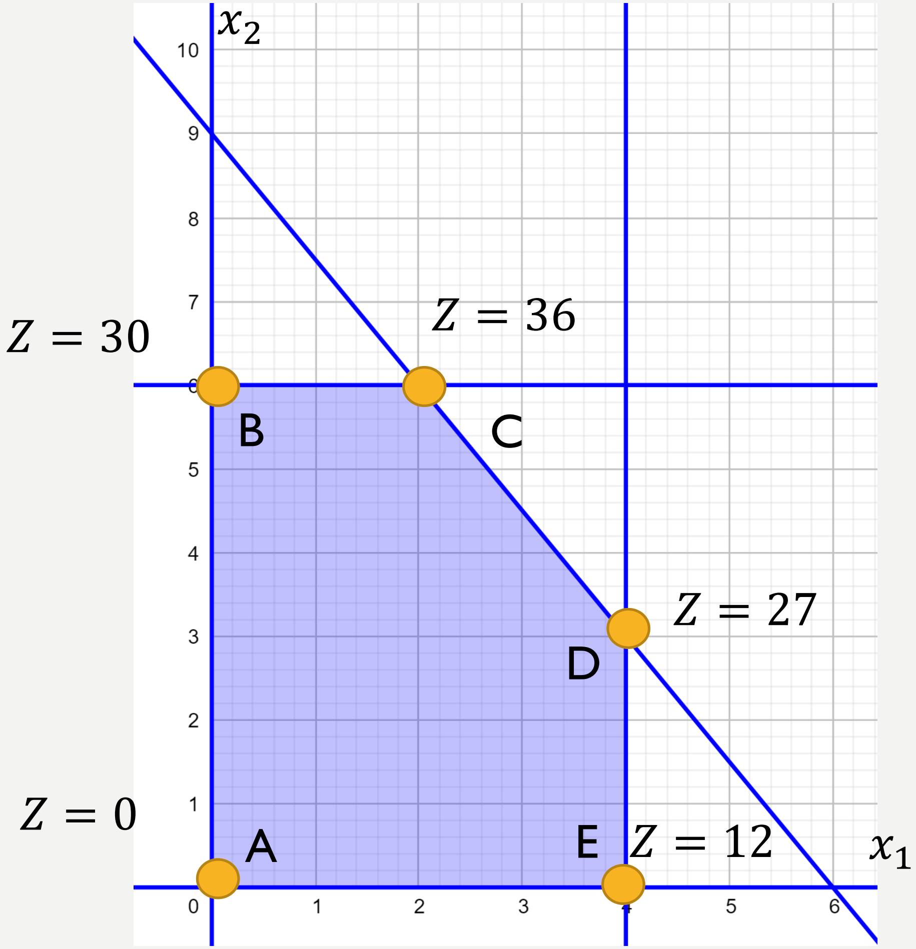
Test di ottimalità

- Si consideri un qualunque problema di PL che possieda almeno una soluzione ottima (ad esempio se X è non vuoto e limitato)
- Se un vertice ammissibile non ha nessun vertice adiacente migliore (in termini di funzione obiettivo) , allora tale vertice è la soluzione ottima

Nell'esempio si ha che:

- il vertice A ha i due vertici adiacenti B ed E che sono migliori.
  →A non è soluzione ottima del problema

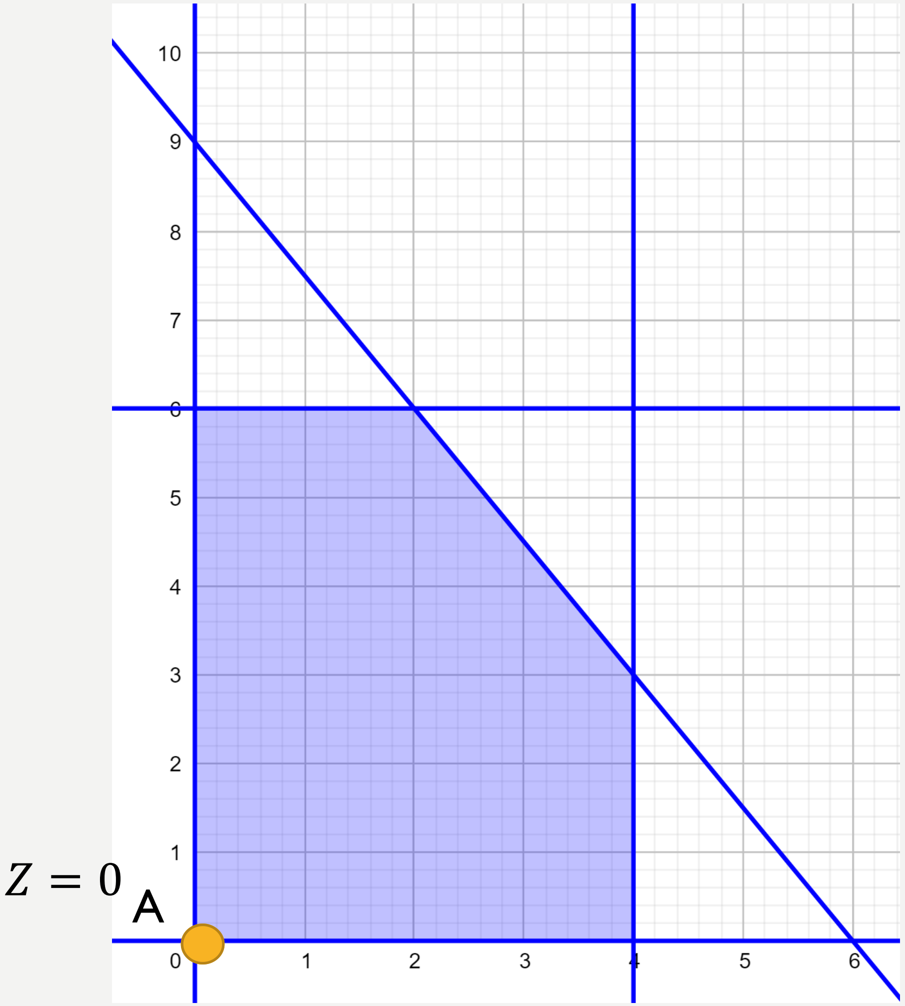
- il vertice C ha i due vertici adiacenti B e D peggiori,
  →C è la soluzione ottima del problema



Come opera il metodo del simplesso?

Come funziona il metodo del simplesso da un punto di vista geometrico ?

1. **Inizializzazione**: scegliere (0,0) come vertice iniziale

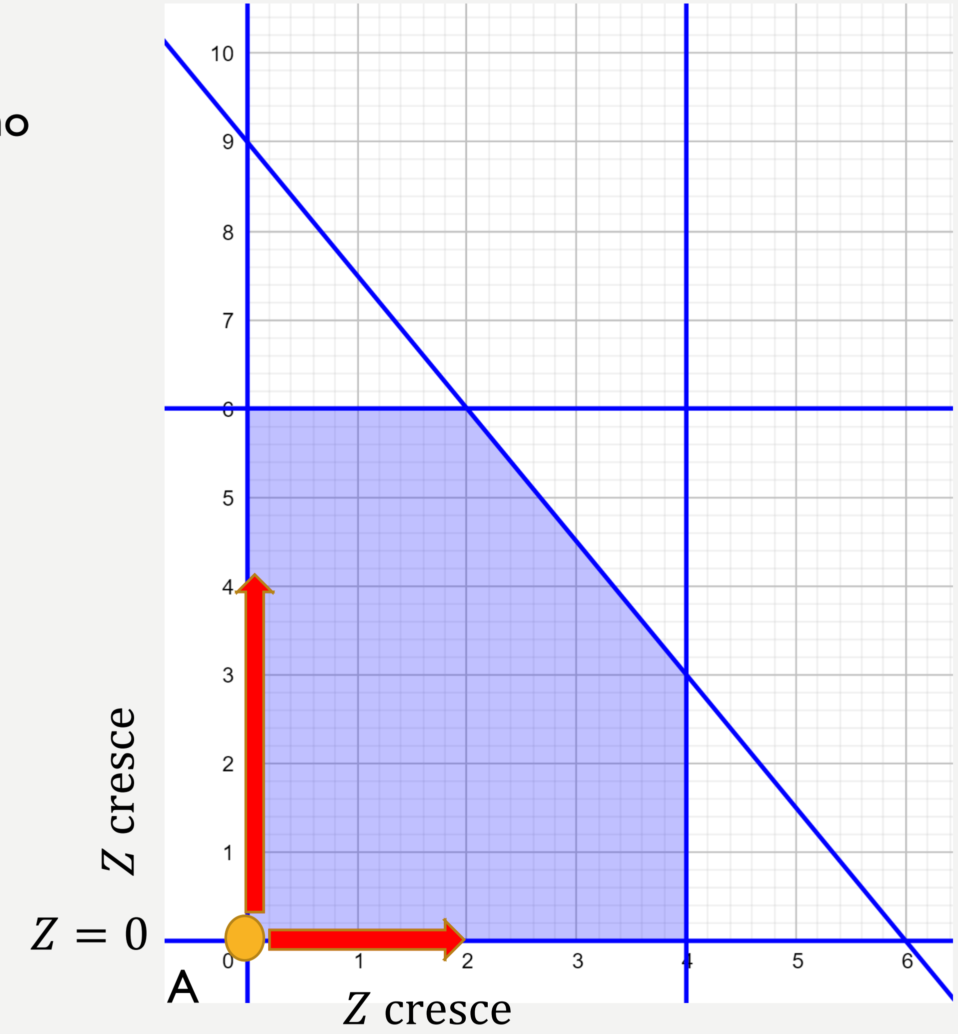


Come opera il metodo del simplesso?

Una descrizione a grandi linee di come opera il metodo del simplesso da un punto di vista geometrico è il seguente

1. **Inizializzazione**: scegliere (0,0) come vertice iniziale

2. **Test di ottimalità**: (0,0) non è soluzione ottimale. Esistono soluzioni adiacenti migliori



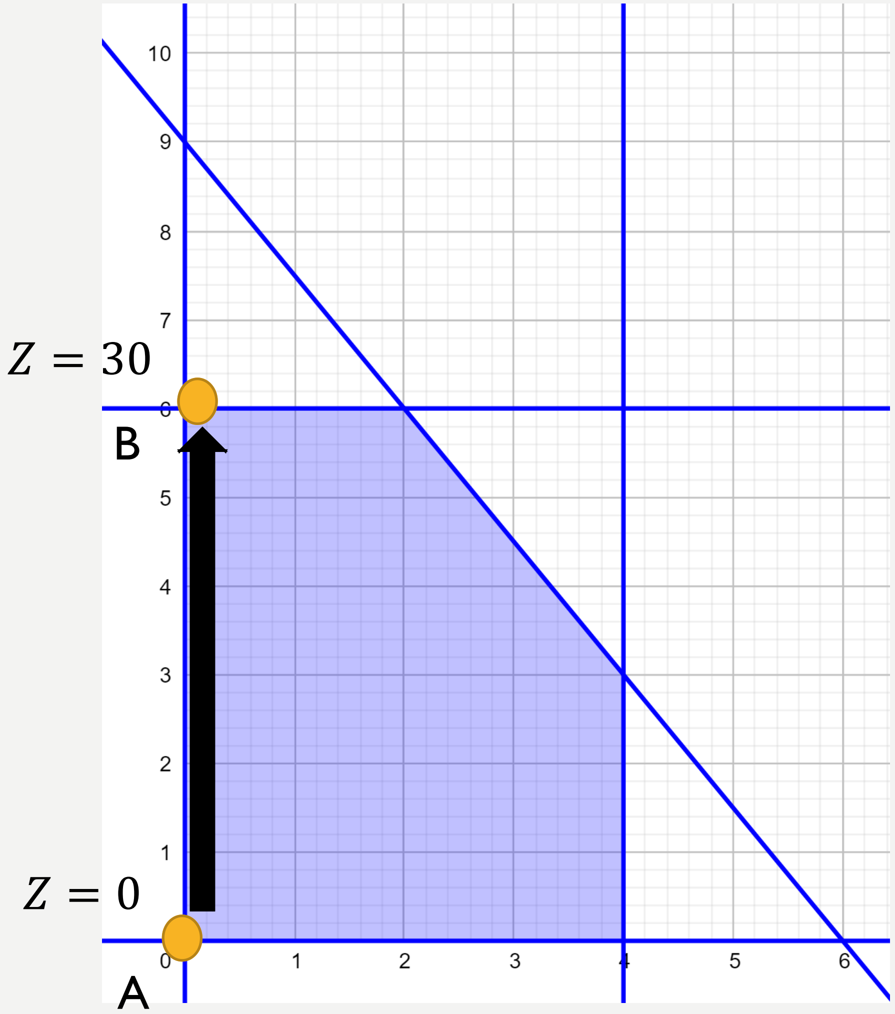
Come opera il metodo del simplesso?

Una descrizione a grandi linee di come opera il metodo del simplesso da un punto di vista geometrico è il seguente

1. **Inizializzazione**: scegliere (0,0) come vertice iniziale

2. **Test di ottimalità**: (0,0) non è soluzione ottimale. Esistono soluzioni adiacenti migliori

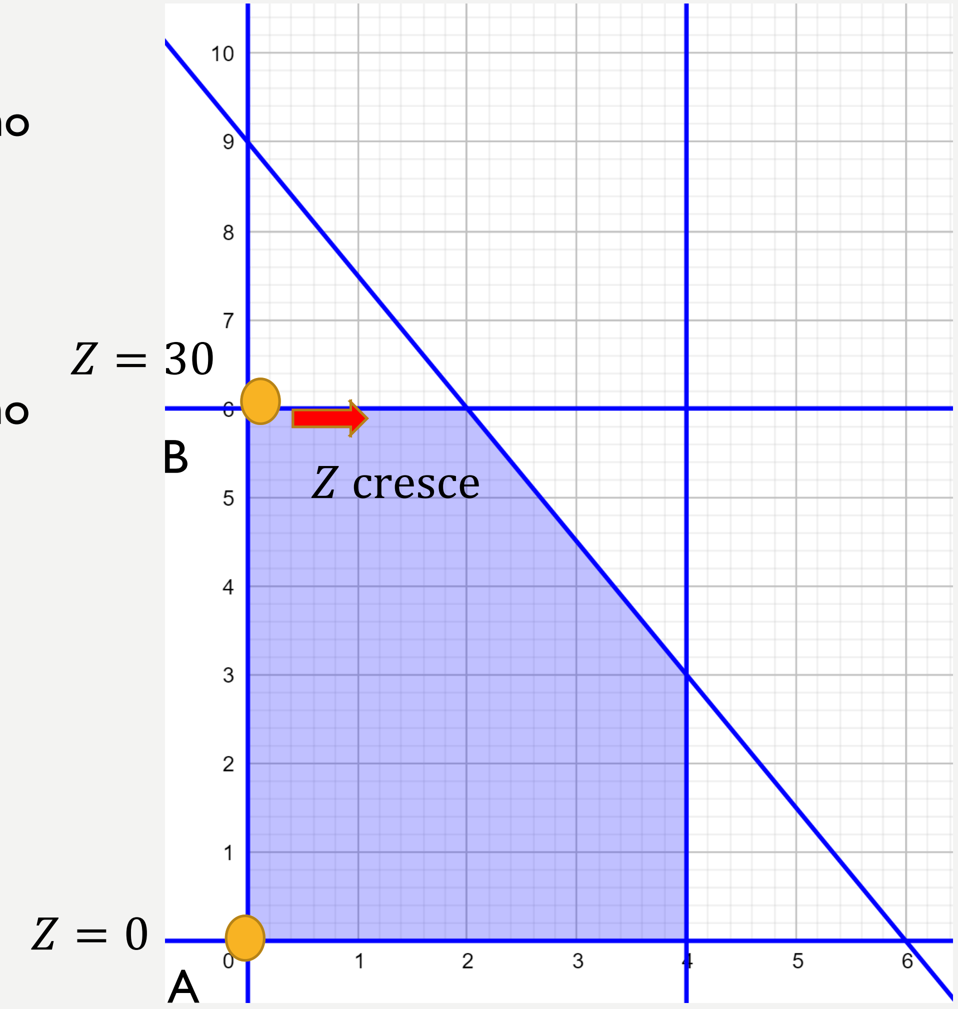
3. **Iterazione 1:** mi sposto su (0,6)



Come opera il metodo del simplesso?

Una descrizione a grandi linee di come opera il metodo del simplesso da un punto di vista geometrico è il seguente

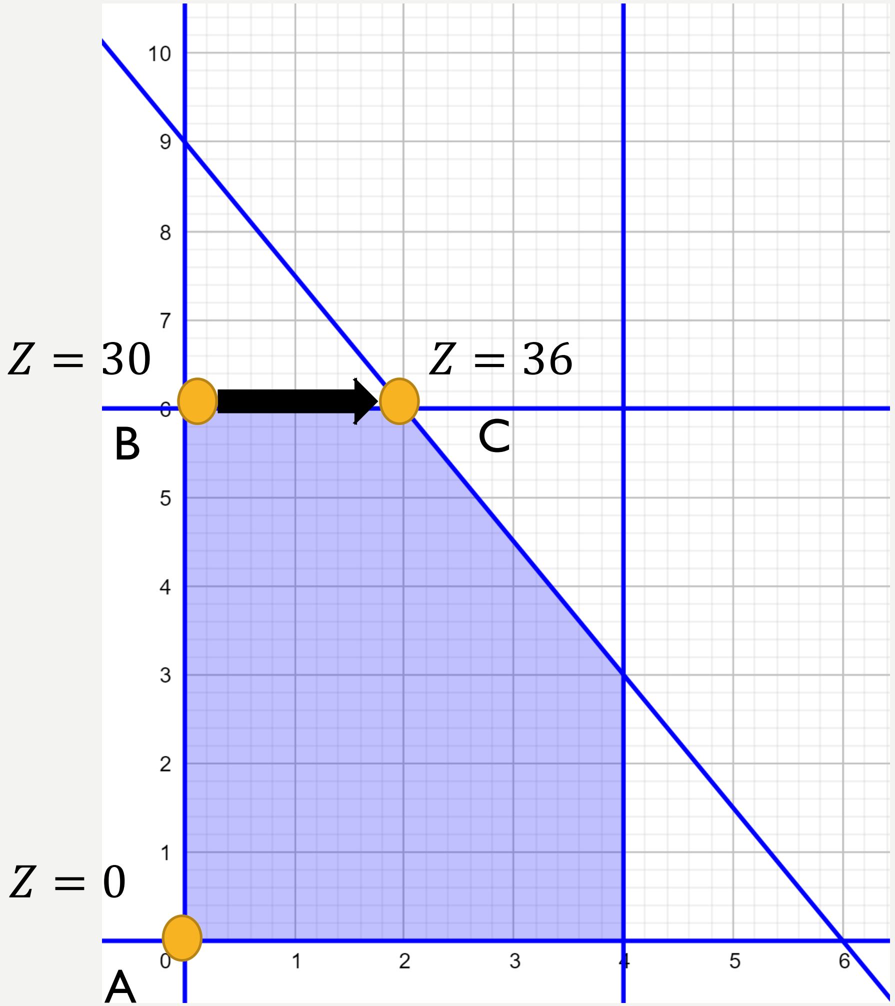
1. **Inizializzazione**: scegliere (0,0) come vertice iniziale
2. **Test di ottimalità**: (0,0) non è soluzione ottimale. Esistono soluzioni adiacenti migliori
3. **Iterazione 1:** mi sposto su (0,6)
4. **Test di ottimalità**: (0,6) non è soluzione ottimale. Esistono soluzioni adiacenti migliori



Come opera il metodo del simplesso?

Una descrizione a grandi linee di come opera il metodo del simplesso da un punto di vista geometrico è il seguente

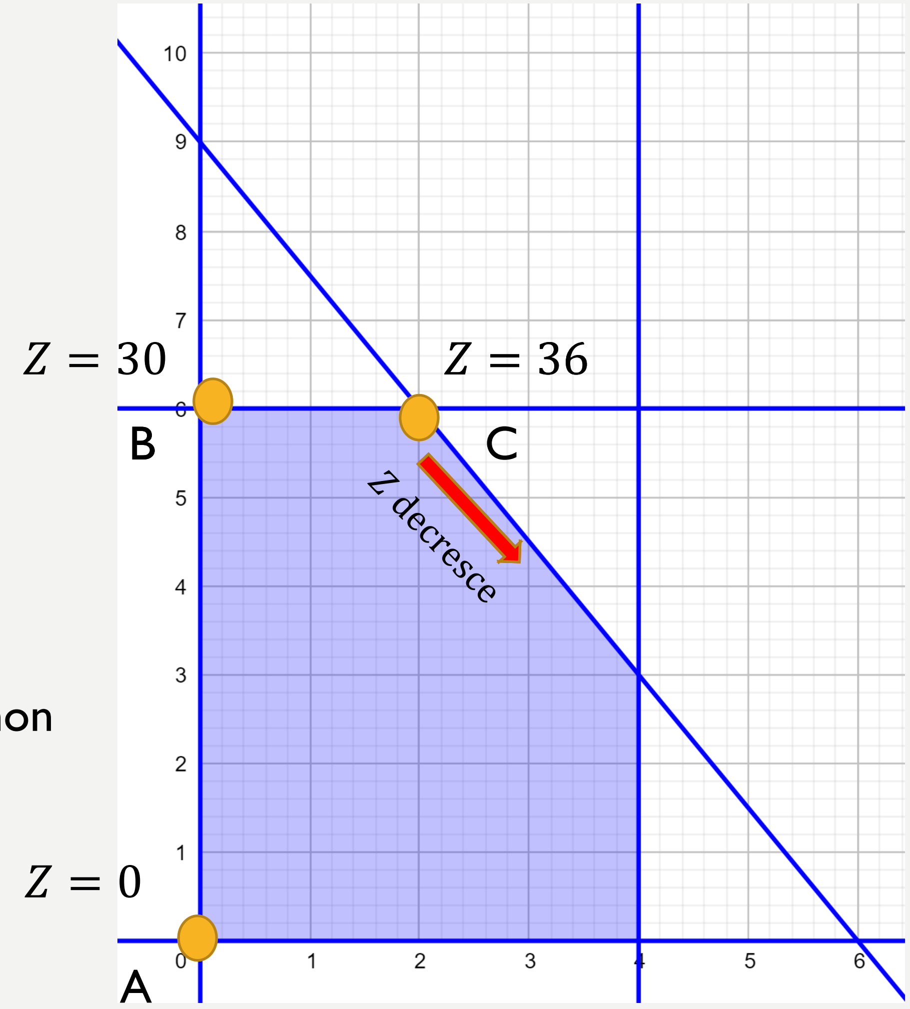
1. **Inizializzazione**: scegliere (0,0) come vertice iniziale
2. **Test di ottimalità**: (0,0) non è soluzione ottimale. Esistono soluzioni adiacenti migliori
3. **Iterazione 1:** mi sposto su (0,6)
4. **Test di ottimalità**: (0,6) non è soluzione ottimale. Esistono soluzioni adiacenti migliori
5. **Iterazione 2**: mi sposto su (2,6)



Come opera il metodo del simplesso?

Una descrizione a grandi linee di come opera il metodo del simplesso da un punto di vista geometrico è il seguente

1. **Inizializzazione**: scegliere (0,0) come vertice iniziale
2. **Test di ottimalità**: (0,0) non è soluzione ottimale. Esistono soluzioni adiacenti migliori
3. **Iterazione 1:** mi sposto su (0,6)
4. **Test di ottimalità**: (0,6) non è soluzione ottimale. Esistono soluzioni adiacenti migliori
5. **Iterazione 2**: mi sposto su (2,6)
6. **Test di ottimalità:** $(2,6)$ è la soluzione ottimale in quanto non esistono vertici adiacenti migliori

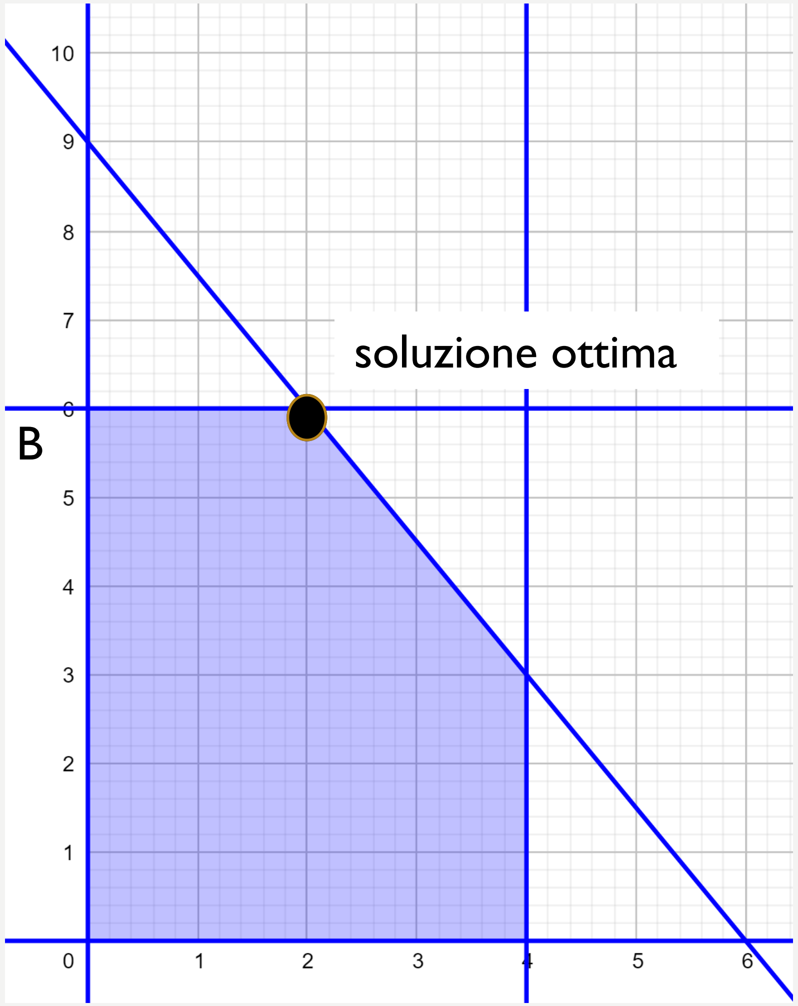


Come opera il metodo del simplesso?

Una descrizione a grandi linee di come opera il metodo del simplesso da un punto di vista geometrico è il seguente

1. **Inizializzazione**: scegliere (0,0) come vertice iniziale
2. **Test di ottimalità**: (0,0) non è soluzione ottimale. Esistono soluzioni adiacenti migliori
3. **Iterazione 1:** mi sposto su (0,6)
4. **Test di ottimalità**: (0,6) non è soluzione ottimale. Esistono soluzioni adiacenti migliori
5. **Iterazione 2**: mi sposto su (2,6)
6. **Test di ottimalità:** (2,6) è la soluzione ottimale in quanto non esistono vertici adiacenti migliori
7. **Fine procedura**

(Notiamo che il metodo ci ha messo solo 2 iterazioni visitando solo 3 vertici su 5!!)



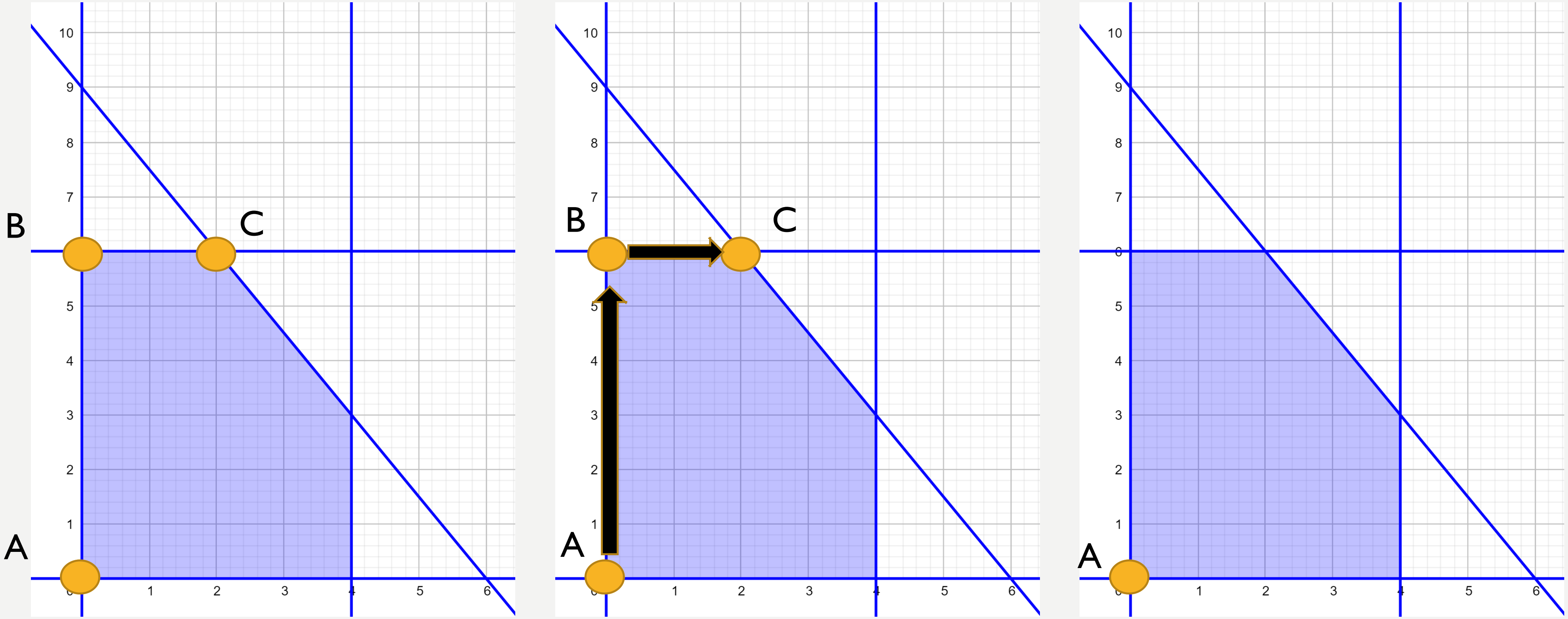
Caratteristiche del metodo del simplesso

1. Il metodo del simplesso concentra la sua attenzione solo sui vertici

2. Il metodo del simplesso opera in modo iterativo

3. Se possibile, si sceglie come vertice iniziale l'origine

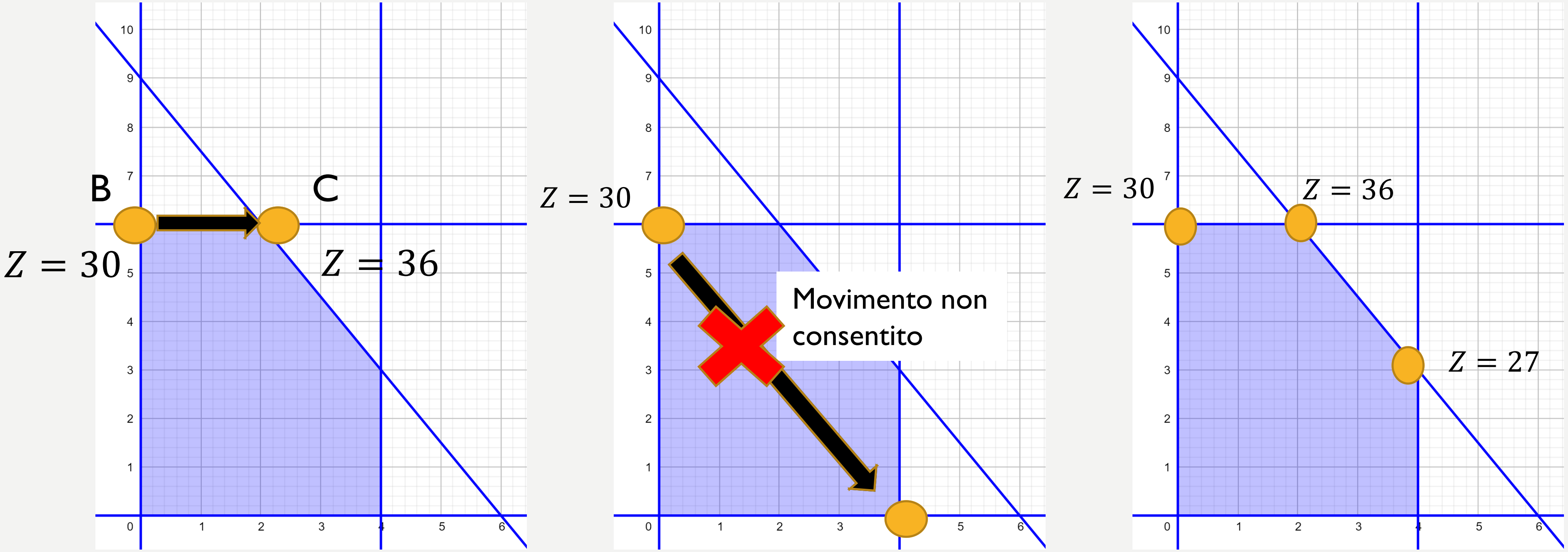
(nel caso in cui i vincoli siano tutti della forma $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ e$\boldsymbol{x} \geq 0$ è sempre possibile)



Caratteristiche del metodo del simplesso

4. Un'iterazione del metodo del simplesso corrisponde a muoversi dal vertice corrente ad uno adiacente migliore

5. Il metodo del simplesso si ferma nel momento in cui non vi sono più vertici adiacenti migliori



PROGRAMMAZIONE LINEARE

METODO DEL SIMPLESSO: FORMA ALGEBRICA

Concetti algebrici del metodo del simplesso

- La procedure algebrica per il metodo del simplesso, prevede di scrivere il problema PL in forma standard
- Consideriamo nuovamente il problema della società WYNDOR GLASS & Co

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:
- $2 \cdot x_2 \leq 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$
- $x_1 \leq 4$
- $x_1 , x_2 \geq 0$

$\mathbf{N}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:
- $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1 , x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

- La nuova formulazione del modello prende anche il nome di **forma aumentata** in quanto sono state introdotte le nuove variabili s_1, s_2, s_3
- Notiamo che in questo modo si è ottenuta una scrittura del tipo $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dove $\boldsymbol{A}$ è una matrice 3x5, relativa a 3 vincoli e 5 variabili (2 originali+3 di slack)

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(in generale se ho m vincoli e n variabili nel problema originale la forma aumentata avrà $n - m$ variabili di slack)

Concetti algebrici del metodo del simplesso

Definizione Una **soluzione aumentata** è una soluzione per la quale alle variabili originali sono aggiunte le variabili di slack

- Una soluzione aumentata corrisponde ad una soluzione del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
- Possiamo sempre fissare due valori di variabili e risolvere il sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$)

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

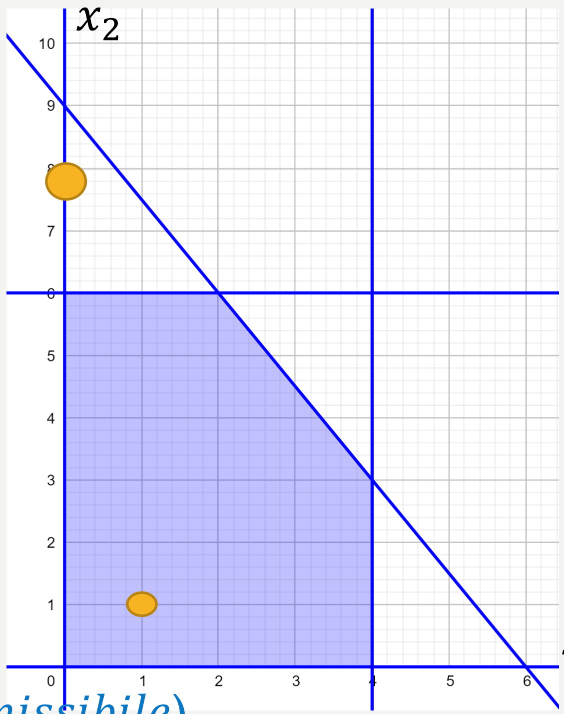
Esempio

Se consideriamo la soluzione $(1,1)$ nella formulazione originale del problema, la soluzione aumentata è data da

- $2 \cdot 1 + s_1 = 12$
- $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + s_2 = 18$
- $1 + s_3 = 4$

- $s_1 = 10$
- $s_2 = 13$
- $s_3 = 3$

Ovvero la soluzione aumentata corrisponde a $(1, 1, 10, 13, 3)$



Esempio

Se considero la soluzione $(0,8)$ nella formulazione originale del problema, la soluzione aumentata è data da

- $2 \cdot 8 + s_1 = 12$
- $3 \cdot 0 + 2 \cdot 8 + s_2 = 18$
- $0 + s_3 = 4$

- $s_1 = -6$
- $s_2 = 0$
- $s_3 = 4$

Ovvero la soluzione aumentata corrisponde a $(0, 8, -6, 0{,}4)$ (fuori da X, *non ammissibile*)

Concetti algebrici del metodo del simplesso

Definizione Una **soluzione di base** è un vertice della regione ammissibile a cui sono aggiunti i corrispondenti valori della variabili di slack

- Una soluzione di base nel caso 2D corrisponde ad una soluzione del Sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ed in cui due della variabili sono nulle

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1 , x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Esempio

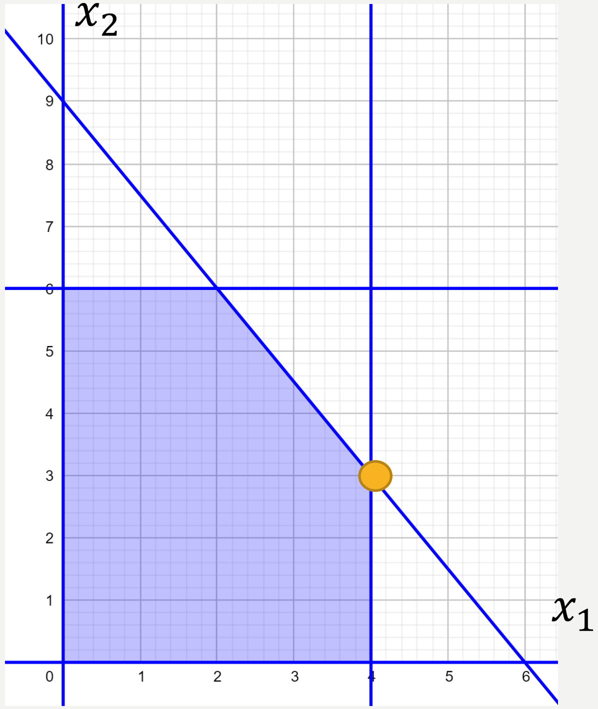
Se consideriamo il vertice $(4{,}3)$ nella formulazione originale del problema, la soluzione aumentata è data da

- $2 \cdot 3 + s_1 = 12$
- $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + s_2 = 18$
- $4 + s_3 = 4$

$\Rightarrow$

- $s_1 = 6$
- $s_2 = 0$
- $s_3 = 0$

Ovvero la soluzione di base corrisponde a $(4, 3, 6, 0, 0)$



In un problema (in forma aumentata) con n variabili ed m vincoli una soluzione di base corrisponde ad una soluzione del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, in cui n-m della variabili sono nulle.

Concetti algebrici del metodo del simplesso

Definizione Una **soluzione di base ammissibile** è un vertice ammissibile a cui sono aggiunti i corrispondenti valori della variabili di slack
(Una soluzione di base corrisponde ad una soluzione del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ tale che $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$)

$$\max_{x_1, x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

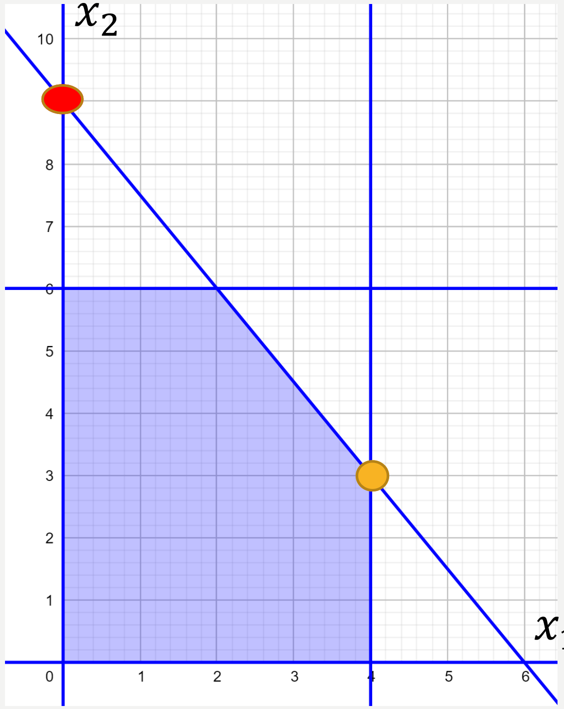
- $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1 \, , x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Esempio

- Se consideriamo il vertice $(4{,}3)$ → è ammissibile e la soluzione di base ammissibile corrispondente è $(4, 3, 6, 0, 0)$

- Se consideriamo il vertice $(0{,}9)$ → non è ammissibile e la soluzione di base corrispondente data da $(0, 9, -6, 0, 0)$ non è ammissibilie

(Infatti viene violato il vincolo di non negatività della variabile di slack s_1)



Esempio

- Cerchiamo tutte le soluzioni di base ammissibili

Vertici ammissibili	Soluzioni di base ammissibili
(0,0)	(0,0,12,18,4)
(0,6)	(0,6,0,6,4)
(2,6)	(2,6,0,0,2)
(4,3)	(4,3,6,0,0)
(4,0)	(4,0,12,6,0)

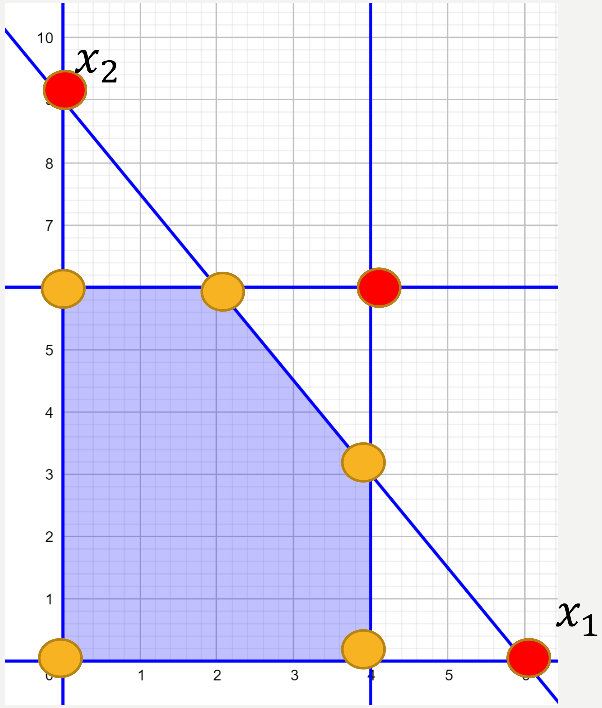
- Cerchiamo tutte le soluzioni di base non ammissibili

Vertici non ammissibili	Soluzioni di base non ammissibili
(0,9)	$(0,9,-6,0,4)$
(4,6)	$(4,6,0,-6,0)$
(6,0)	$(6,0,12,,0,-2)$

$$\max_{x_1,x_2}(3\cdot x_1 + 5\cdot x_2)$$

soggetto a:

- $2\cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$



Concetti algebrici del metodo del simplesso

- Una soluzione di base ha m **variabili di base** (≥ 0) e le rimanenti $n - m$ sono chiamate **variabili non di base** (=0)
  - dove m è il numero dei vincoli del problema ed n è il numero di variabili della forma aumentata ($m \leq \mathrm{n}$)

- In una soluzione di base le variabili non di base sono nulle e i valori delle variabili di base sono ottenuti risolvendo il sistema di m equazioni
- Se una delle variabili di base è nulla, si parla di **soluzione di base degenere**

Esempio

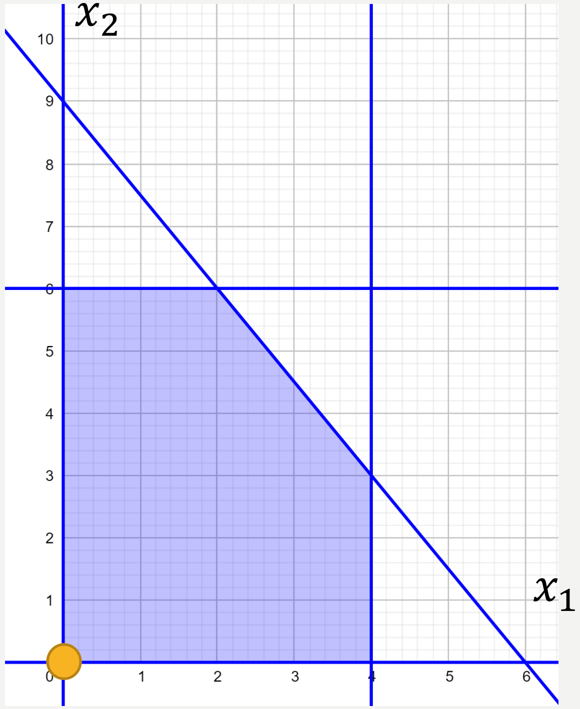
- Consideriamo la soluzione di base associata a $(0{,}0)$ ovvero $(0{,}0{,}12{,}18{,}4)$

- Le variabili in base sono s_1, s_2 e s_3. Le variabili fuori base sono x_1 e x_2

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$



Concetti algebrici del metodo del simplesso

- **Definizione** In un problema PL due soluzioni di base si dicono **adiacenti** se tutte le variabili non di base tranne una sono uguali.

(Questo implica che le variabili di base tranne una sono le stesse, anche se con valori numerici differenti)

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1 \,, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Esempio

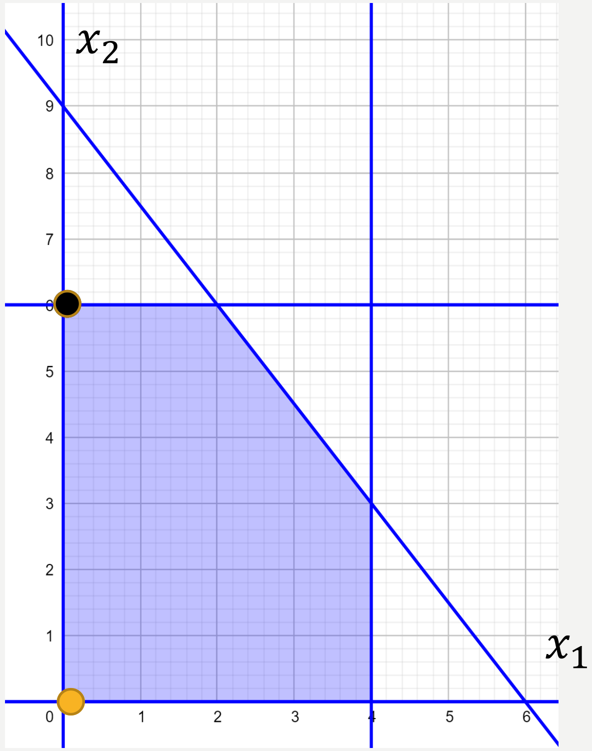
- Consideriamo la soluzione di base associata a $(0{,}0)$ ovvero $(0{,}0{,}12{,}18{,}4)$

(variabili in base s_1, s_2 e s_3, non in base x_1 e x_2)

- Una soluzione di base adiacente è data, ad esempio considerando x_2 come variabile di base al posto di s_1

(variabili in base x_2, s_2 e s_3, non in base s_1 e x_2)

- Annullando s_1 al posto di x_2 si ottiene (quindi $x_1 = 0$ e $s_1 = 0$)



- $2 \cdot x_2 + 0 = 12$
- $3 \cdot 0 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $0 + s_3 = 4$

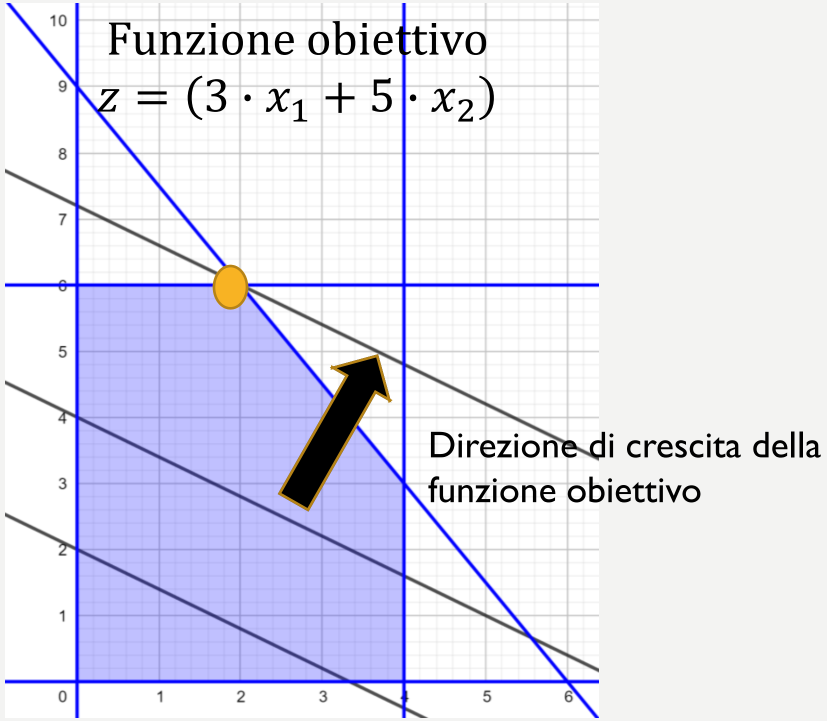
- $x_2 = 6$
- $s_2 = 6$
- $s_3 = 4$

- La nuova soluzione di base ottenuto è $(0{,}6{,}0{,}6{,}4)$ che corrisponde al vertice adiacente $(0{,}6)$

Teorema fondamentale della PL

Dato un generico problema PL:

1. Se esiste una sola soluzione ottima (i.e, se X è non-vuoto e limitato), allora deve essere una soluzione di base ammissibile
2. Se esistono soluzioni ottime multiple e la regione ammissibile è limitata, allora almeno due soluzioni ottime sono soluzioni di base adiacenti ammissibili



La soluzione del problema ha esattamente una soluzione (x_1, x_2)=(2,6), che corrisponde alla soluzione di base ammissibile(2,6,0,0,2)

Il problema ha infinite soluzioni ottime. Due di queste sono due vertici adiacenti ammissibili che corrispondono a due soluzioni di base ammissibili ovvero (4,3,6,0,0) e (2,6,0,0,2)

Generazione di soluzioni di base

- Il sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ha 5 variabili e 3 vincoli, lasciando 2 gradi di libertà nella risoluzione del problema

- Possiamo sempre fissare il valore di 2 variabili e risolvere il sistema di 3 variabili e 3 equazioni

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

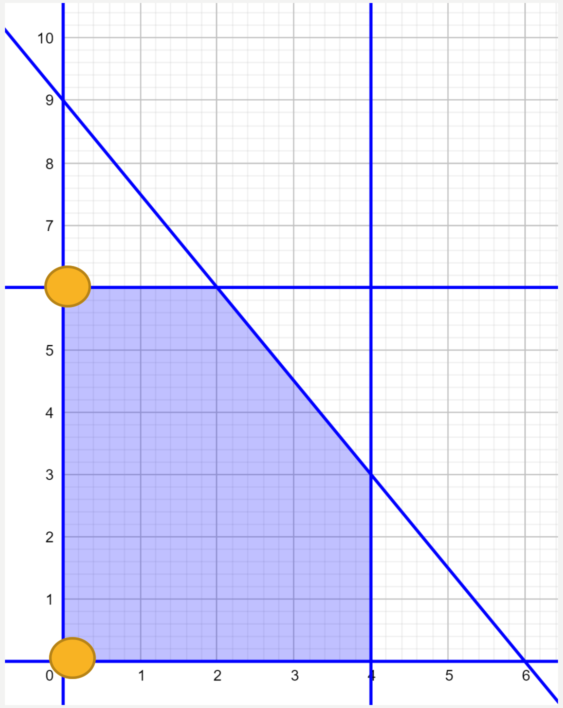
soggetto a:

- $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1 , x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Esempio
Fissiamo il valore di 2 variabili a 0 e risolviamo il sistema di tre variabili e 3 equazioni.

- $(0, 0,12,18,4) \rightarrow$ vertice $(0,0)$ e $z = 0$

- $(0, 6, 0, 6, 4) \rightarrow$ vertice $(0,6)$ e $z = 30$



Nel caso di n variabili ed m vincoli dobbiamo annullare $n - m$ variabili corrispondenti al numero dei gradi di libertà

Soluzioni di base ammissibili

- Il numero di soluzioni di base ammissibili è finito

- Nel caso in esame, questo è una conseguenza del fatto che ogni soluzione di base è l'intersezione di 2 delle 5 equazioni del sistema, quindi il numero **massimo** di combinazioni differenti di 5 equazioni considerate 2 alla volta è dato da:

$$\binom{5}{2} = 10$$

(Nel nostro esempio abbiamo 8 soluzioni di base di cui 5 ammissibili)

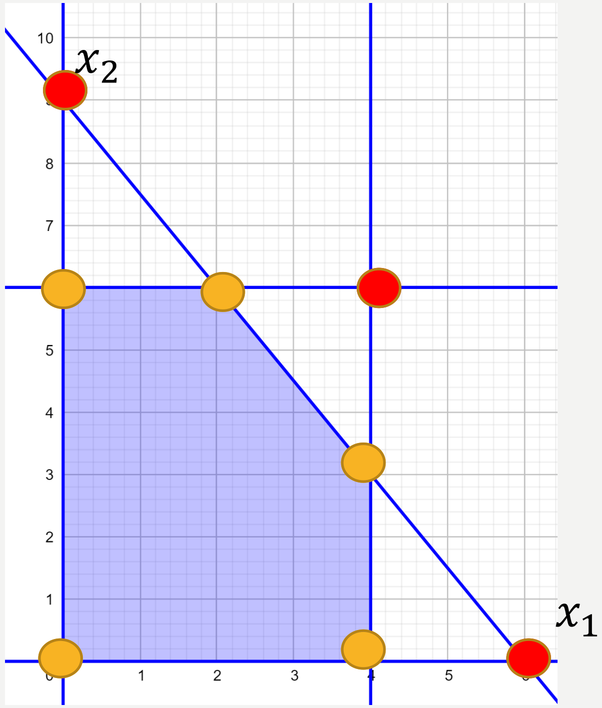
- In generale, se abbiamo n variabili ed m vincoli, il numero massimo di combinazioni differenti considerate m alla volta è dato da:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$



Tassi di miglioramento

- Consideriamo la funzione obiettivo e la soluzione di base $(0,0,12,18,4)$

- Il valore della funzione obiettivo per questa soluzione di base è

$$z = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$$

- Nella funzione obiettivo le *variabili di base* (s_1, s_2, s_3) hanno coefficiente zero, mentre i coefficienti delle *variabili non in base* (x_1 e x_2) indicano il **tasso di miglioramento** prodotto da un eventuale aumento del valore di tali variabili dai valori correnti, ovvero:

  - Tasso di miglioramento di x_1 : 3
  - Tasso di miglioramento di x_2 : 5

- I tassi di miglioramento sono entrambi **positivi**, quindi la soluzione individuata non è ottimale

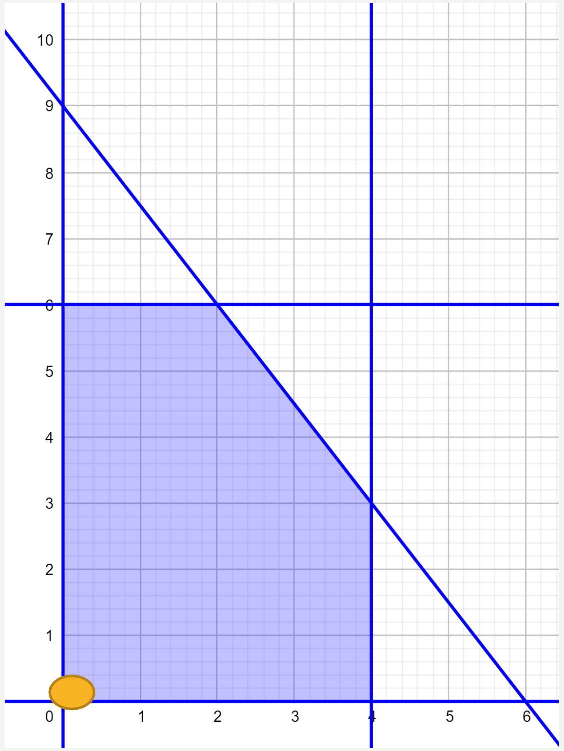
(Il problema è di massimo quindi muovendoci lungo x_1 o x_2 possiamo ottenere una soluzione di base migliore)

Se abbiamo n variabili ed m vincoli, solo $n - m$ tassi di miglioramento possono essere diversi da zero

$$\max_{x_1, x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$



Test di ottimalità

- Si consideri un qualunque problema di PL che possieda almeno una soluzione di base ottima (ad esempio se X è non vuoto e limitato)
- Per ogni soluzione di base è possibile esprimere il valore della funzione obiettivo in funzione delle variabili non in base.

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Esempio

- Consideriamo la soluzione di base$(2,6,0,0,2)$
- Per questa soluzione le variabili non in base sono s_1 e s_2

  - $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
  - $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
  - $x_1 + s_3 = 4$

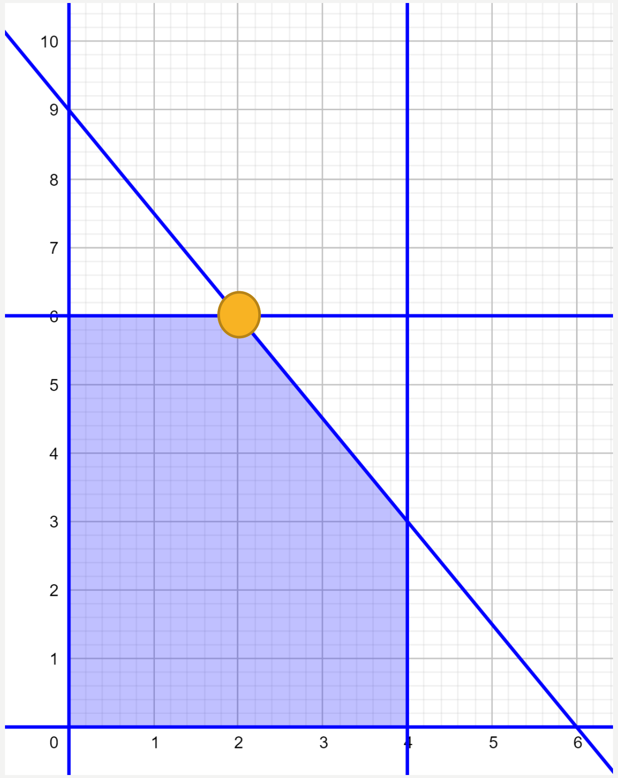
  $\Rightarrow$

  - $x_1 = 2 - \frac{1}{3} s_2 + \frac{1}{3} s_1$
  - $x_2 = 6 - \frac{1}{2} s_1$

- Calcolo la funzione obiettivo espressa in funzione di s_1 e s_2 :

$$z = 36 - \frac{3}{2} s_1 - s_2$$

- Notiamo che con questa trasformazione posso leggere i tassi di miglioramento $-\frac{3}{2}$ e -1 delle variabili fuori base s_1 e s_2



Test di ottimalità

Se i tassi di miglioramento relativi alle variabili non in base sono tutti negativi allora la soluzione di base considerata è ottima

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

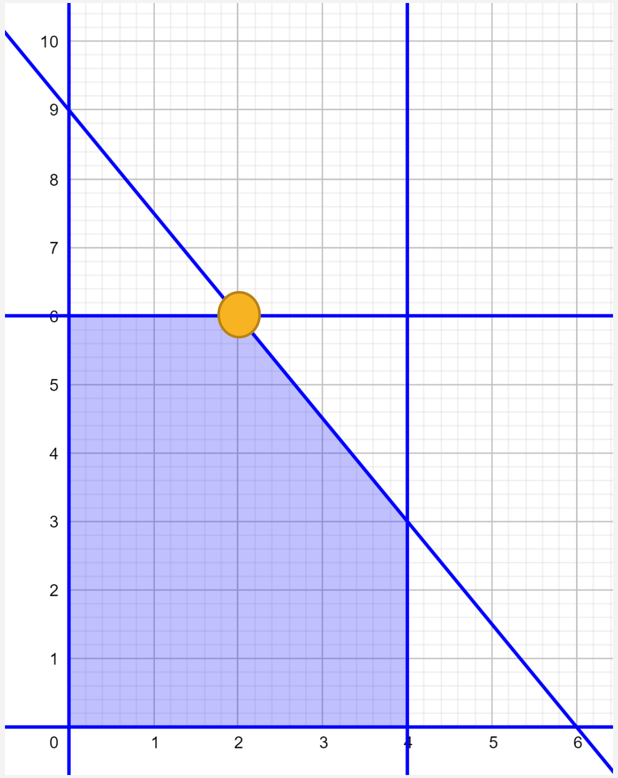
- $2 \cdot x_2 + s_1 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 18$
- $x_1 + s_3 = 4$
- $x_1 , x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Esempio

- Riprendendo l'esempio della slide precedente, abbiamo che

$$z = 36 - \frac{3}{2} s_1 - s_2$$

I nuovi tassi di crescita sono entrambi negativi.
La soluzione di base è ottima



Se aumento s_1 o s_2 peggioro la funzione obiettivo diminuisce !

Algoritmo del simplesso

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $2 \cdot x_2 + x_3 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 18$
- $x_1 + x_5 = 4$
- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Inizializzazione Si fissa 0 il valore di m variabili (variabili non di base) e si trova il valore delle restanti variabili (variabili di base)

- $2 \cdot x_2 + x_3 = 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 18$
- $x_1 + x_5 = 4$

Pongo $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ →

- $x_3 = 12$
- $x_4 = 18$
- $x_5 = 4$

Dove: x_3, x_4, x_5 sono le variabili di slack rinominate per essere conformi alla notazione del Libro di testo

Test di ottimalità: (0,0,12,18,4) non è soluzione ottimale in quanto la funzione obiettivo espressa in funzione delle variabili non in base è data da $z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$, quindi i tassi di miglioramento relativi a x_1 e x_2 sono entrambi positivi

Scelta della variabile entrante in Base

Cerchiamo una soluzione di base adiacente a quella corrente che migliori la funzione obiettivo

Le variabili x_1 e x_2 sono non di base,

- Tasso di miglioramento di x_1 : 3
- Tasso di miglioramento di x_2 : 5

Siccome 5 > 3 la variabile x_2 è candidata ad *entrare in base*

Facciamo entrare in base la variabile non in base con il più alto tasso di miglioramento, ovvero x_2

Scelta della variabile uscente - Test del minimo rapporto

- Facendo entrare in base x_2 dobbiamo scegliere quale variabile fare uscire
- Aumentando x_2 (nuova variabile di base) aumenta Z ma determina cambiamenti nelle variabili di base
- Faccio uscire la variabile di base che mi consente il maggior aumento per x_2

$$\begin{aligned}
&Z - 3x_1 - 5x_2 = 0 \\
&2x_2 + x_3 = 12 \\
&3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18 \\
&x_1 + x_5 = 4 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\qquad (x_1 = 0) \qquad
\begin{aligned}
x_3 &= 12 - 2x_2 \\
x_4 &= 18 - 2x_2 \\
x_5 &= 4
\end{aligned}$$

x_2 può essere aumentata fino a 6 (e x_3 scende a 0)

Osservazione: Se una **variabile** non di base presenta un tasso di miglioramento positivo e può crescere indefinitamente senza violare alcun vincolo allora il problema **è illimitato**

IMPORTANTE

Nuova soluzione di base

- Nella nuova soluzione di base facciamo entrare x_2 in base e facciamo uscire x_3 $(x_3 = 0)$

$$
\left.\begin{aligned}
&Z - 3x_1 - 5x_2 = 0\\
&2x_2 + x_3 = 12\\
&3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18\\
&x_1 + x_5 = 4\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\begin{array}{l}
x_1 = 0;\ x_3 = 0;\ x_2 = 6\\
x_4 = 6;\ x_5 = 4;
\end{array}
$$

- Per aggiornare l'equazione relativa a Z (funzione obiettivo) eliminiamo la variabile x_2

Come?

Nuova soluzione di base

- Le equazioni vengono aggiornate mediante procedure di **eliminazione di Gauss** in modo tale che le variabili di base siano presenti in un solo vincolo.

- Sommiamo la seconda equazione moltiplicata per 5/2 all'equazione relativa alla funzione obiettivo

- Dopo questa trasformazione **nella funzione obiettivo sono presenti soltanto le variabili non in base** (ovvero x_1 e x_3)

$$
\begin{aligned}
Z - 3x_1 - 5x_2 & & &= 0 \\
2x_2 + x_3 & & &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 & + x_4 & &= 18 \\
x_1 & & + x_5 &= 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z - 3x_1 \quad + (5/2)x_3 & & &= 30 \\
x_2 + (1/2)x_3 & & &= 6 \\
3x_1 + \quad - x_3 & + x_4 & &= 6 \\
x_1 & & + x_5 &= 4
\end{aligned}
$$

Test di ottimalità

- Consideriamo la funzione obiettivo espressa in funzione delle nuove variabili non in base

$$z = 30 + 3x_1 - \frac{5}{2}x_3$$

Tasso di miglioramento di x_1 : 3

Tasso di miglioramento di x_3 : -5/2

Il tasso di miglioramento di x_1 è positivo quindi la soluzione individuata non è ottimale

➡ **la variabile x_1 è candidata ad *entrare in base***

Individuazione della variabile di base uscente

- Nella nuova soluzione di base facciamo entrare x_1 in base e facciamo uscire x_4

$$\boxed{\begin{array}{llllr} Z - 3x_1 + & (5/2)x_3 & & & = 30 \\ & x_2 + (1/2)x_3 & & & = 6 \\ 3x_1 + & -x_3 & + x_4 & & = 6 \\ x_1 & & & + x_5 & = 4 \end{array}}$$

$(x_3 = 0)$

$$x_2 = -(1/2)x_3 + 6$$

$$x_4 = 6 - 3x_1$$

$$x_5 = 4 - x_1$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = 6;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 2;$$

x_1 può essere aumentata fino a 2 (e x_4 scende a 0)

Nuova soluzione di base

- Nella nuova soluzione di base facciamo entrare x_1 in base e facciamo uscire x_4 (ovvero pongo $x_4 = 0$)

$$
\begin{array}{l}
Z - 3x_1 \quad + (5/2)x_3 \qquad = 30 \\
\qquad x_2 + (1/2)x_3 \qquad = 6 \\
3x_1 \quad - x_3 \quad + x_4 \qquad = 6 \\
x_1 \qquad + x_5 \quad = 4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
Z \qquad + (3/2)x_3 + \ x_4 \qquad = 36 \\
\qquad x_2 + (1/2)x_3 \qquad = 6 \\
x_1 \qquad - 1/3x_3 \quad + 1/3x_4 \qquad = 2 \\
\qquad (1/3)x_3 - (1/3)x_4 + x_5 = 2
\end{array}
$$

La nuova soluzione di base è (2,6,0,0,2) e x_3 e x_4 sono le variabili fuori base

Test di ottimalità

- Considero la funzione obiettivo espressa in funzione delle nuove variabili non in base

$$z = 36 - \frac{3}{2}x_3 - x_4$$

Tasso di miglioramento di x_3 : $-\frac{3}{2}$

Tasso di miglioramento di x_4 : -1

- I tassi di miglioramento sono entrambi negativi

⇨ La soluzione di base ottenuta è ottima!!

Casi particolari

- **Regola di Bland** per evitare il cycling. Per determinare la variabile uscente, nel caso in cui ci siano più variabili candidate ad uscire, viene selezionata quella con l'indice più piccolo

- **Soluzioni ottime multiple** Ogni qual volta un problema ha più di una base ottima, almeno una delle variabili non di base ha un coefficiente nullo nella riga della funzione obiettivo)

Generalizzazioni

- La procedura del simplesso appena vista è stata applicata all'esempio della società WYNDOR GLASS & Co

- Tale procedura può essere applicata in modo simile per tutti i modelli di programmazione lineare in cui la regione ammissibile è esprimibile come N$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$, ponendo:

$$[\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{I}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x_s}\end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

  - $\boldsymbol{I}$ è una matrice identità di dimensione $m \times m$
  - $\boldsymbol{x_s}$ sono m variabili di slack

e scegliendo come soluzione di base iniziale $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ ovvero ponendo a zero le variabili del problema originale e $\boldsymbol{x_s} = \boldsymbol{b}$

PROGRAMMAZIONE LINEARE

METODO DEL SIMPLESSO: FORMA TABELLARE

Forma tabellare

- La forma tabellare del metodo del simplesso rappresenta la forma più conveniente per poter svolgere i calcoli in modo ottimale
- La forma tabellare (o **tableau**) memorizza solo le informazioni necessarie, ovvero:
  - I coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo ($\boldsymbol{c}$) **cambiati di segno**
  - I termini noti delle equazioni ($\boldsymbol{b}$)
  - I coefficienti della variabili nei vincoli (N)
  - Il valore della funzione obiettivo $\boldsymbol{Z}$

Coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{t}}$

Funzione obiettivo Z

	x1	x2	x3	x4	x5
0	-3	-5	0	0	0
4	1	0	1	0	0
12	0	2	0	1	0
18	3	2	0	0	1

Termini noti $\boldsymbol{b}$

Matrice N

- Il Tableau qui rappresentato è quello relativo al modello del WYNDOW GLASS and Co. (slide 11)

Soluzione iniziale e test di ottimalità

- Poniamo come variabili di base le variabili di slack ($x_3 = 12, x_4 = 18, x_5 = 4$) e come variabili non in base le variabili del problema originale ($x_1 = 0, x_2 = 0$).
- Sulla riga 0 leggiamo i tassi di miglioramento relative alle due variabili non in base (entrambi negativi)
- I tassi di miglioramento cambiati di segno sono entrambi negativi → la soluzione non è ottimale

Tassi di miglioramento

	x1	x2	x3	x4	x5
0	-3	-5	0	0	0
4	1	0	1	0	0
12	0	2	0	1	0
18	3	2	0	0	1

Coefficenti delle variabili di slack

Individuazione della variabile entrante

- Nella prima iterazione del metodo del simplesso individuiamo la variabile da far entrare in base (x_2) (quella con il tasso di miglioramento più alto) a cui è associata la **colonna di Pivot**

Variabile entrante

Tasso di miglioramento migliore

Colonna di pivot

	x1	x2	x3	x4	x5
0	-3	-5	0	0	0
4	1	0	1	0	0
12	0	2	0	1	0
18	3	2	0	0	1

Individuazione della variabile uscente

- Individuiamo la variabile uscente tramite il **test del minimo rapporto**:
  1. Individuiamo nella colonna di pivot ogni coefficiente strettamente positivo
  2. Calcoliamo il rapporto tra i termini noti a sinistra e questi coefficienti positivi
  3. Individuiamo la riga (**riga di pivot**) con il più piccolo di questi rapporti detto **elemento di pivot**

Elemento di pivot

Riga di pivot

	x1	x2	x3	x4	x5
0	-3	-5	0	0	0
4	1	0	1	0	0
12	0	2	0	1	0
18	3	2	0	0	1

Individuazione della nuova soluzione di base

- **Dividiamo** la riga di pivot per l'elemento di pivot

	x1	x2	x3	x4	x5
0	-3	-5	0	0	0
4	1	0	1	0	0
6	0	1	0	1/2	0
18	3	2	0	0	1

2° /2

Individuazione della nuova soluzione di base

- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente negativo** nella colonna di pivot, **aggiungiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente in valore assoluto e la nuova riga di pivot
- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente positivo** nella colonna di pivot, **sottraiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente e la nuova riga di pivot

		x1	x2	x3	x4	x5
0° + 5 *2°	30	-3	0	0	5/2	0
	4	1	0	1	0	0
	6	0	1	0	1/2	0
3° - 2 *2°	6	3	0	0	-1	1

Individuazione dei nuovi tassi di miglioramento

- Sulla nuova riga zero leggiamo il nuovo valore della funzione obiettivo ed il nuovo valore dei tassi di miglioramento delle variabili fuori base

Nuovi tassi di miglioramento cambiati di segno

Nuovo valore della funzione obiettivo

Riga di pivot

	x1	x2	x3	x4	x5
$\boxed{30}$	$\boxed{-3}$	0	0	$\boxed{5/2}$	0
4	1	0	1	0	0
6	0	1	0	1/2	0
6	3	0	0	-1	1

Test di ottimalità

- Leggendo la nuova riga dei coefficienti abbiamo che il coefficiente di x_1 è negativo → la soluzione non è ottimale

Il tasso di miglioramento cambiato di segno è negativo

	x1	x2	x3	x4	x5
30	$\boxed{-3}$	0	0	5/2	0
4	1	0	1	0	0
6	0	1	0	1/2	0
6	3	0	0	-1	1

Individuazione della variabile entrante ed uscente

- Nella seconda iterazione del metodo del simplesso individuiamo la variabile da far entrare in base (x_1), la riga di pivot (la 3°) tramite il test del minimo rapporto e l'elemento di pivot (3)

Variabile entrante

Colonna di pivot

Elemento di pivot

Riga di pivot

	x1	x2	x3	x4	x5
30	-3	0	0	5/2	0
4	1	0	1	0	0
6	0	1	0	1/2	0
6	3	0	0	-1	1

Individuazione della nuova soluzione di base

- Dividiamo la riga di pivot per l'elemento di pivot

	x1	x2	x3	x4	x5
30	-3	0	0	5/2	0
4	1	0	1	0	0
6	0	1	0	1/2	0
2	1	0	0	-1/3	1/3

3° /3

Individuazione della nuova soluzione di base

- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente negativo** nella colonna di pivot, **aggiungiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente in valore assoluto e la nuova riga di pivot
- Per ogni altra riga che ha un **coefficiente positivo** nella colonna di pivot, **sottraiamo** a questa riga il prodotto tra questo coefficiente e la nuova riga di pivot

		x1	x2	x3	x4	x5
0° +3*3°	36	0	0	0	3/2	1
1° -3°	2	0	0	1	1/3	-1/3
	6	0	1	0	1/2	0
	2	1	0	0	-1/3	1/3

Individuazione dei nuovi tassi di miglioramento

- Sulla nuova riga zero leggiamo il nuovo valore della funzione obiettivo ed il nuovo valore dei tassi di miglioramento delle variabili fuori base

Nuovi tassi di miglioramento cambiati di segno

Nuovo valore della funzione obiettivo

	x1	x2	x3	x4	x5
36	0	0	0	3/2	1
2	0	0	1	1/3	-1/3
6	0	1	0	1/2	0
2	1	0	0	-1/3	1/3

Test di ottimalità

- Leggendo la nuova riga 0 abbiamo che i coefficienti di x_4e x_5 sono positivi → la soluzione è ottimale

Il tasso di miglioramento cambiati di segno sono positivi

	x1	x2	x3	x4	x5
36	0	0	0	3/2	1
2	0	0	1	1/3	-1/3
6	0	1	0	1/2	0
2	1	0	0	-1/3	1/3