PROGRAMMAZIONE LINEARE

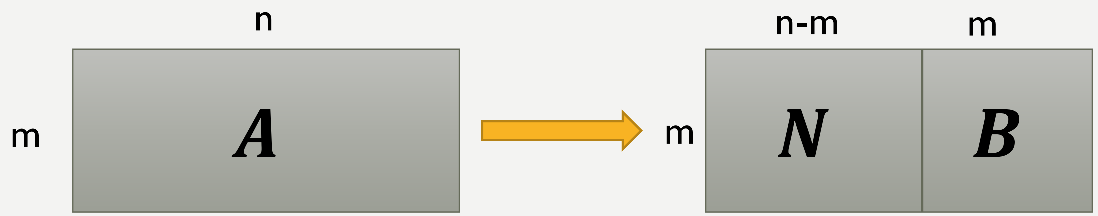
METODO DEL SIMPLESSO: FORMA MATRICIALE

Matrice di base e non di base

- Assumiamo che:
  - il numero di righe di ***A*** sia strettamente minore del numero di colonne $(m < n)$
  - il rango di ***A*** *sia m*

- È sempre possibile scegliere tra le *n* colonne di A, un sottoinsieme costituito da m colonne tra loro linearmente indipendenti, ovvero una sottomatrice quadrata $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertibile (ovvero esiste B^{-1})

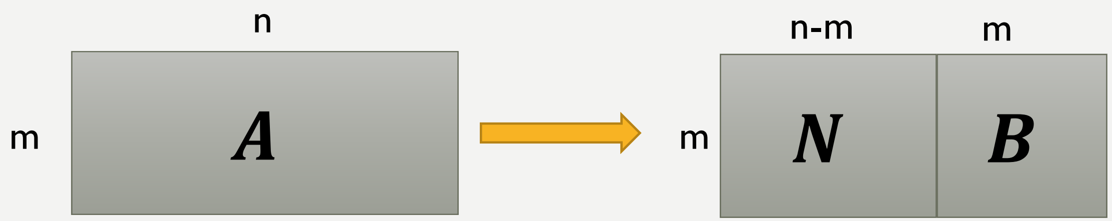
- Le restanti n-m colonne formano una sottomatrice **N**$\in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$



  - $\boldsymbol{B}$ è chiamata **matrice di base**
  - $\boldsymbol{N}$ è chiamata **matrice non di base**

Numero massimo di matrici di base

- Quante sottomatrici di base possiamo estrarre dalla matrice A?



- **Osservazione**: il massimo numero di modi con cui possiamo formare la matrice B corrisponde a

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Nel secondo esempio $\boldsymbol{B_2}$ non è invertibile, quindi il numero di matrici di base è $2 < \binom{3}{2} = 3$

Esempio

➢ Riscriviamo il modello seguente in forma matriciale

$$\max\left(+\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2\right)$$

- $x_1 + x_2 + s_1 = 10$
- $-\frac{1}{2}x_1 - x_2 - s_2 = 5$
- $-2x_1 + x_2 + s_3 = 0$
- $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

$$\max\left(\begin{bmatrix}1/2 & -1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\-1/2 & -1 & 0 & -1 & 0\\-2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\s_1\\s_2\\s_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\5\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\s_1\\s_2\\s_3\end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

➢ Otteniamo quindi che:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\-1/2 & -1 & 0 & -1 & 0\\-2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}10\\5\\0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix}1/2 & -1/3\end{bmatrix}$$

Esempio-parte due

- Ricaviamo una matrice di base per la matrice $\boldsymbol{A}$

$$\max\left(+\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2\right)$$

- $x_1 + x_2 + s_1 = 10$
- $-\frac{1}{2}x_1 - x_2 - s_2 = 5$
- $-2x_1 + x_2 + s_3 = 0$
- $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- La prima, la seconda e la terza colonna sono linearmente indipendenti

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix}}^{\,B} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

- la prima, la quarta e la quinta colonna sono linearmente indipendenti

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1/2 \\ -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Quindi $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Il numero massimo di matrici di base è $\binom{5}{3} = 10$

Variabili di base

- Dato un problema di PL e una matrice di base $\boldsymbol{B}$ ad esso associata, possiamo dividere il vettore delle variabili di decisione $\boldsymbol{x}$ in due parti:
  - $\boldsymbol{x_B}$: vettore di m componenti chiamate **variabili di base**, dove l'i-esimo elemento è associato all'i-esima colonna di $\boldsymbol{B}$
  - $\boldsymbol{x}_N$: vettore di $(n-m)$ componenti chiamate **variabili non di base**, dove l'i-esimo elemento è associato all'i-esima colonna di $\boldsymbol{N}$

- Possiamo riscrivere il sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ come:

$$[\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{x_B} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

da cui

$$\boldsymbol{N x_N} + \boldsymbol{B x_B} = \boldsymbol{b}$$

- Essendo $\boldsymbol{B}$ invertibile allora possiamo moltiplicare primo e secondo membro dell'equazione per $\boldsymbol{B}^{-1}$ ottenendo:

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N x_N} + \boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

- Infine ponendo $\boldsymbol{x}_N = 0$ si ottiene

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Variabili di base

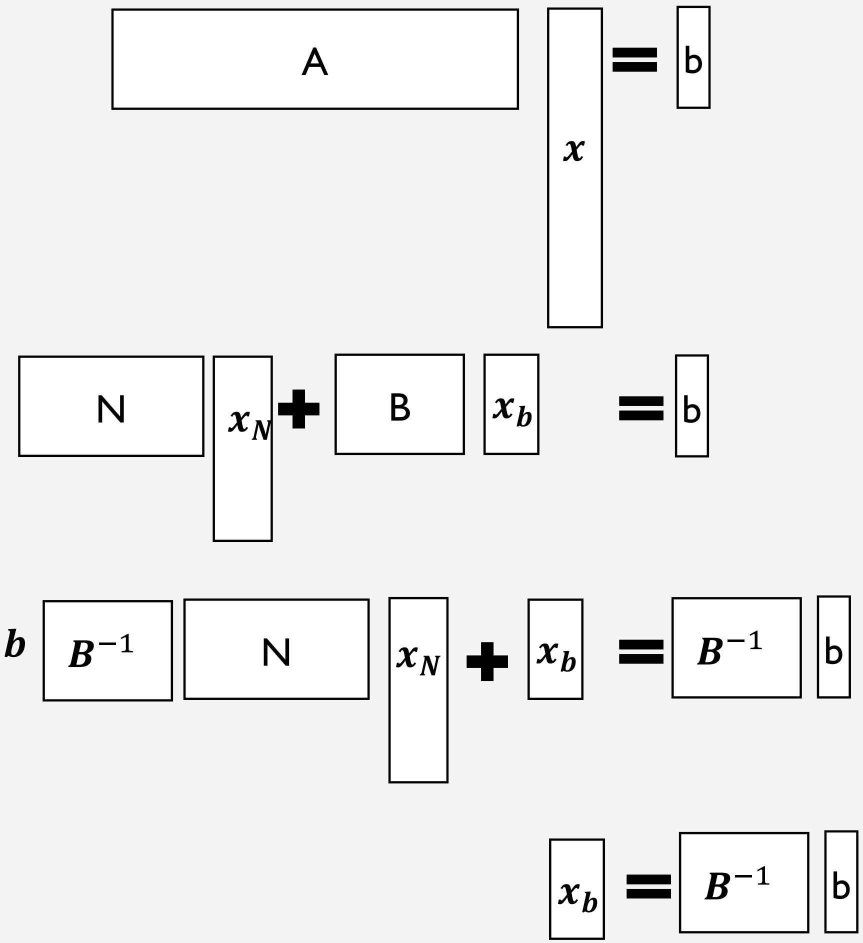
- Possiamo rivedere i passaggi precedenti spiegandolo con dei semplici disegni matriciali

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

$$\mathbf{N}\boldsymbol{x_N + Bx_B = b}$$

$$\boldsymbol{B^{-1}Nx_N + x_B = B^{-1}b}$$

$$\boldsymbol{x_B = B^{-1}b}$$



Soluzioni di base

Definizione Data un insieme di m equazioni lineari linearmente indipendenti in n incognite che formano il sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, sia $\boldsymbol{B}$ una qualsiasi sottomatrice $m \times m$ non singolare di $\boldsymbol{A}$. Ponendo tutte le $n - m$ componenti di $\boldsymbol{x}$ non associate a $\boldsymbol{B}$ uguali a 0, la soluzione del restante insieme di equazioni è detta una **soluzione di base** per il sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ rispetto alla base $\boldsymbol{B}$. Inoltre le componenti di $\boldsymbol{x}$ associate alle colonne di $\boldsymbol{B}$ sono chiamate **variabili di base**. Le soluzioni di base corrispondono a tutti

Esempio

- Consideriamo il seguente sistema di disequazioni
  - $-x_1 + 2x_2 \leq 4$
  - $x_1 + x_2 \leq 4$
- Introducendo delle opportune variabili di slack perveniamo al seguente sistema di equazioni
  - $-x_1 + 2x_2 + s_1 = 4$
  - $x_1 + x_2 + s_2 = 4$
- La matrice associate $\boldsymbol{A}$ ed il vettore dei termini noti $\boldsymbol{b}$ sono $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$
- In base a quanto affermato precedentemente ci sono al più $\binom{4}{2} = 6$ soluzioni di base

Soluzioni di base

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- In particolare si otterranno le seguenti soluzioni:

1. Base: (x_1, x_2): $\rightarrow \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow (x_1, x_2, s_1, s_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\ 0{,}0\right)$

2. Base: (x_1, s_1): $\rightarrow \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow (x_1, x_2, s_1, s_2) = (4{,}0, 8{,}0)$

3. Base: (x_1, s_2): $\rightarrow \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow (x_1, x_2, s_1, s_2) = (-4{,}0\ 0{,}8)$

4. Base: (x_2, s_1): $\rightarrow \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \rightarrow (x_1, x_2, s_1, s_2) = (0{,}4, -4{,}0)$

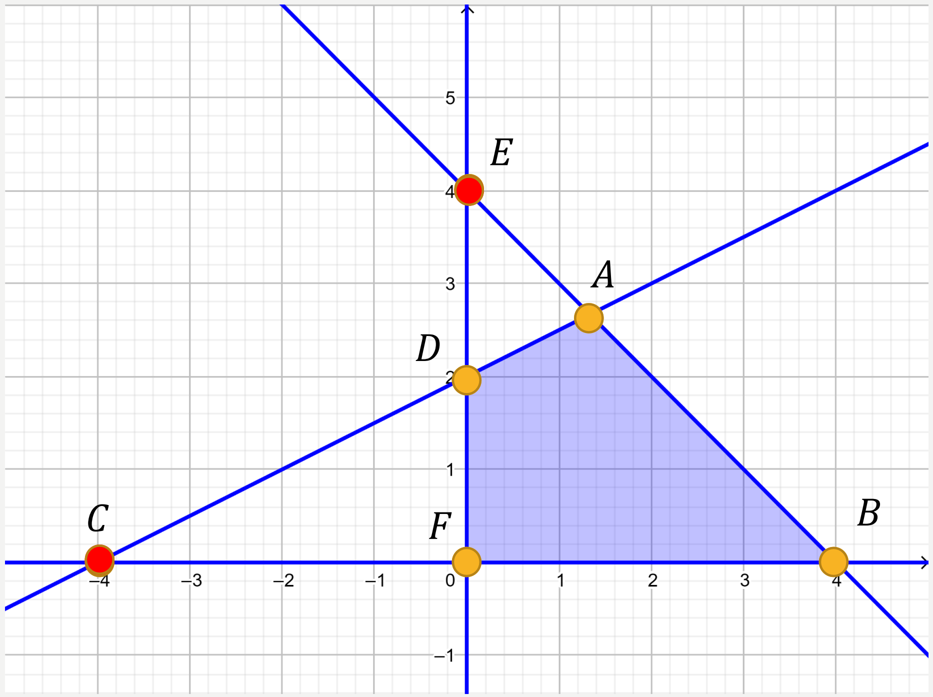
5. Base: (x_2, s_2): $\rightarrow \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow (x_1, x_2, s_1, s_2) = (0{,}2{,}0{,}2)$

6. Base: (s_1, s_2): $\rightarrow \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow (x_1, x_2, s_1, s_2) = (0{,}0\ 4{,}4)$

Soluzioni di base

- Riportiamo le sei soluzioni di base trovate proiettandole sul piano cartesiano Ox_1x_2

1. $\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\, 0{,}0\right) \rightarrow A\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$
2. $(4{,}0, 8{,}0) \rightarrow B(4{,}0)$
3. $(-4{,}0, 0{,}8) \rightarrow C(-4{,}0)$
4. $(0{,}2, 0{,}0) \rightarrow D(0{,}2)$
5. $(0{,}4, -4{,}0) \rightarrow E(0{,}4\,)$
6. $(0{,}0{,}4{,}4) \rightarrow F(0{,}0)$



- Notiamo che le soluzioni di base corrispondenti ai punti C ed E sono fuori dalla regione ammissibile
- Notiamo che una soluzione di base associata ad una matrice di base $\boldsymbol{B}$ risulta all'interno della regione ammissibile se e solo se $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$

Soluzioni di base ammissibili

- Consideriamo un problema PL scritto in forma standard

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

tale che:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

- **Definizione** Un vettore $\boldsymbol{x}$ è risulta essere **ammissibile** se soddisfa i vincoli del problema PL, ovvero se $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$.

- **Definizione** Una soluzione di base $\boldsymbol{x}$ per il sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è detta **soluzione di base ammissibile (SBA)** se soddisfa i vincoli di non negatività. In particolare deve valere che $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$.

- **Definizione** Una soluzione di base $\boldsymbol{x}$ per il sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è detta **soluzione di base degenere** se parte delle componenti della soluzione $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$ è nulla.

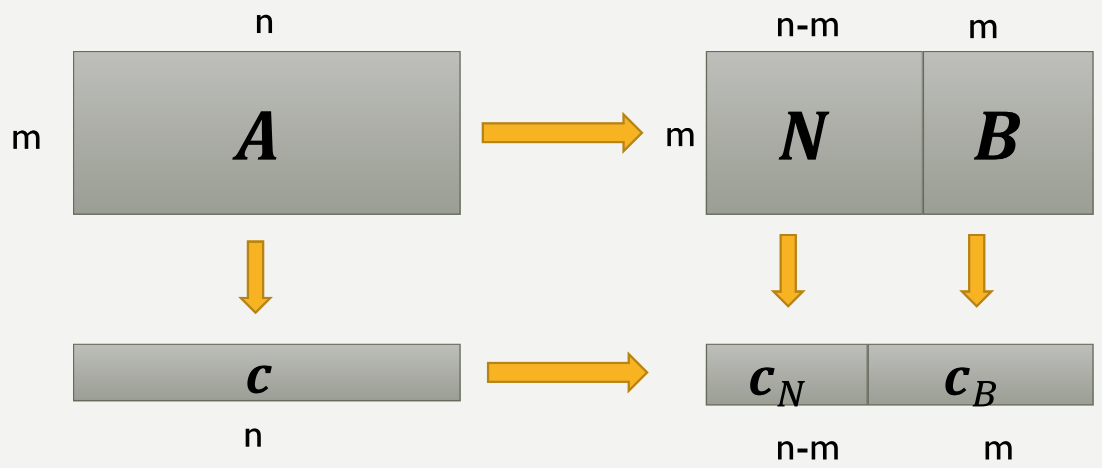
Coefficienti di costo

- Dato un problema PL scritto in forma standard

$$\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
tale che:
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

- Sia $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix}$ una soluzione di base di un problem PL in forma standard, associato ad una matrice di base $\boldsymbol{B}$

- Possiamo dividere il vettore $\boldsymbol{c}$ in due sotto-vettori:
  - $\boldsymbol{c}_B$: sotto-vettore dei coefficienti di costo associati alle variabili di base
  - $\boldsymbol{c}_N$: sotto-vettore dei coefficienti di costo associati alle variabili non di base



Valore di una soluzione di base

Osservazione Consideriamo una soluzione di base ammissibile $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix}$ associata ad matrice di base $\boldsymbol{B}$.
Allora il valore della funzione obiettivo associato a $\boldsymbol{x}$, ovvero $z = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}$, è dato da

$$\boldsymbol{c}_b^t \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Dimostrazione

1. Basta notare che se $\boldsymbol{x}$ è soluzione di base ammissibile, allora $\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

2. Segue allora che $\boldsymbol{cx} = [\boldsymbol{c_B}|\boldsymbol{c_N}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}_b\,\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{c}_N\,\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{c}_b\,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_N\,\boldsymbol{0} = \boldsymbol{c}_b\,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

In forma matriciale abbiamo che

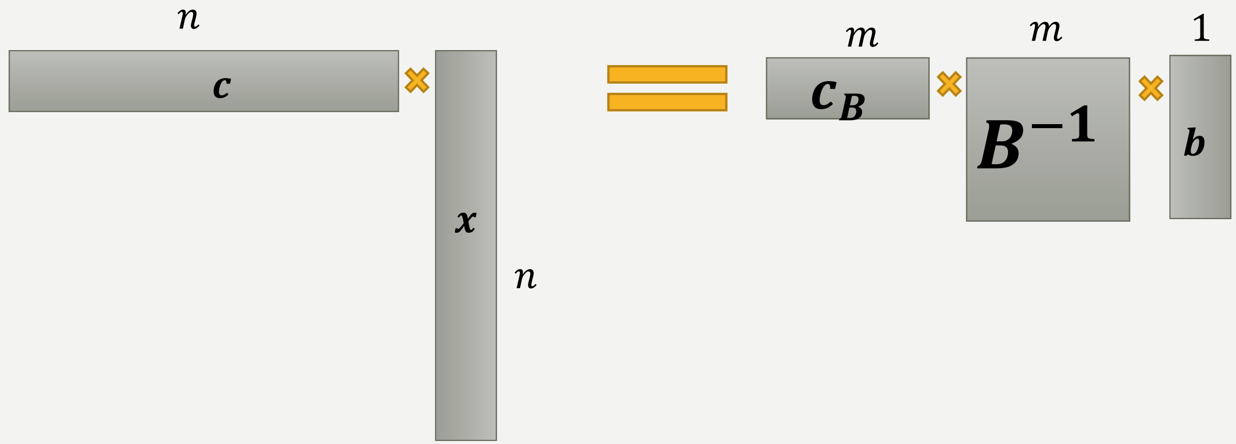


TABLEAU INIZIALE

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

tale che:

$$\mathbf{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

$\mathbf{A}=[N \quad I]$

<table>
<tr><th></th><th>x1</th><th>x2</th><th>x3</th><th>x4</th><th>x5</th></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="2">c</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>b</td><td colspan="2">N</td><td colspan="3">I</td></tr>
</table>

Variabili Slack

TABLEAU INIZIALE

$$\max_{x_1,x_2}(3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$$

soggetto a:

- $x_1 \leq 4$
- $2 \cdot x_2 \leq 12$
- $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$
- $x_1, x_2 \geq 0$

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

tale che:

$$\mathbf{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

	x1	x2	x3	x4	x5
0	-3	-5	0	0	0
4	1	0	1	0	0
12	0	2	0	1	0
18	3	2	0	0	1

TABLEAU RELATIVO ALLA GENERICA BASE B

Forma che vale anche per la base ottima

	x1	x2	x3	x4	x5
$c_b B^{-1} b$	$c_b B^{-1} N - c$		$c_b B^{-1}$		
$B^{-1} b$	$B^{-1} N$		B^{-1}		

Ammissibilità se >=0

TABLEAU FINALE

$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$

tale che:

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

$$B = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{matrix}$$

		x1	x2	x3	x4	x5
$Z^* = c_B B^{-1} b$	36	0	0	0	3/2	1
$X^* = B^{-1} b$	2	0	0	1	1/3	-1/3
	6	0	1	0	1/2	0
	2	1	0	0	-1/3	1/3

B^{-1}