PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA

INTRODUZIONE

Ottimizzazione Intera e Binaria

- Consideriamo un generico problema di programmazione lineare (PL) con n variabili e m vincoli

$$\text{opt}\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \qquad \text{(funzione obiettivo lineare)}$$

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\boldsymbol{x}) \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} 0, i = 1, \dots, m \right\}, \qquad \text{con } g_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i \quad \text{(vincoli lineari)}$$

dove $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ e $\text{opt} = \begin{Bmatrix} \min \\ \max \end{Bmatrix}$

- Se $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ abbiamo un problema di **Programmazione Lineare Intera** (PLI)

- Se $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n$ abbiamo un problema **di Programmazione Lineare Binaria** (PB)

- Se $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$ con $p + q = n$ e $p > 0$ e $q > 0$ abbiamo un problema di **Programmazione Lineare Mista** (PLM) o, in inglese, **Mixed Integer Programming** (MIP)

Il problema della Lombardia Manufactoring Co.

- L'azienda LOMBARDIA MANUFACTORING COMPANY sta considerando la possibilità di espandersi costruendo una nuova fabbrica ed un nuovo magazzino avendo a disposizione un budget di 10 milioni di euro.
- La nuova fabbrica può essere collocata o a Saronno o a Gallarate o in entrambe le località.
- Il nuovo magazzino può essere collocato o a Saronno o a Gallarate.
- Il magazzino deve essere collocato nella città dove verrà costruita la fabbrica
- Nella tabella seguente è riportato Il profitto ottenuto da ciascuna delle seguenti alternative (seconda colonna) ed il capitale necessario (terza colonna)

Domanda sì/no	Valore attuale netto ($)	Capitale richiesto ($)
Costruisco la fabbrica a Saronno?	9	6
Costruisco la fabbrica a Gallarate?	5	3
Costruisco un magazzino a Saronno?	6	5
Costruisco un magazzino a Gallarate?	4	2

- **Qual è la città dove si può collocare la fabbrica ed il magazzino affinché si massimizzi il valore attuale netto rispettando i vincoli di budget?**

Le variabili di decisione

- Tutte le **variabili decisionali** del problema sono variabili **binarie** del tipo

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ se la decisione è si} \\ 0 \text{ se la decisione è no} \end{cases} \qquad j = 1,2,3,4$$

x_1: Costruiamo una fabbrica a Saronno? Si (x_1=1) o No (x_1=0)

x_2: Costruiamo una fabbrica a Gallarate? Si (x_2=1) o No (x_2=0)

x_3: Costruiamo un magazzino a Saronno? Si (x_3=1) o No (x_3=0)

x_4: Costruiamo un magazzino a Gallarate? Si (x_4=1) o No (x_4=0)

Domanda sì/no	Variabile decisionale	Valore attuale netto ($)	Capitale richiesto ($)
Costruisco la fabbrica a Saronno?	x_1	9	6
Costruisco la fabbrica a Gallarate?	x_2	5	3
Costruisco il magazzino a Saronno?	x_3	6	5
Costruisco il magazzino a Gallarate?	x_4	4	2

I vincoli

- *«avendo a disposizione un budget di 10 milioni di euro»* rappresenta un **vincolo di budget** ovvero

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

- *«Il nuovo magazzino può essere* collocato o a Saronno o a Gallarate» rappresenta un **vincolo di mutua esclusione** tra le variabili x_3 e x_4 ovvero

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

Domanda sì/no	Variabile decisionale	Valore attuale netto ($)	Capitale richiesto ($)
Costruisco la fabbrica a Saronno?	x_1	9	6
Costruisco la fabbrica a Gallarate?	x_2	5	3
Costruisco il magazzino a Saronno?	x_3	6	5
Costruisco il magazzino a Gallarate?	x_4	4	2

I vincoli

- *«Il magazzino deve essere collocato nella città dove verrà costruita la fabbrica»* rappresenta una **condizione di contingenza**.
  - Se costruisco la fabbrica a Gallarate, costruisco il magazzino a Gallarate (e non lo costruisco a Pioltello)
  - Se costruisco la fabbrica a Saronno, costruisco il magazzino a Saronno (e non lo costruisco a Gallarate)

- Questa decisione di contingenza si traduce nella seguente coppia di vincoli

$x_3 \leq x_1$ $\longrightarrow$ Se $x_1 = 0$ allora $x_3 = 0$

$x_4 \leq x_2$ $\longrightarrow$ Se $x_2 = 0$ allora $x_3 = 0$

Domanda sì/no	Variabile decisionale	Valore attuale netto ($)	Capitale richiesto ($)
Costruisco la fabbrica a Saronno?	x_1	9	6
Costruisco la fabbrica a Gallarate?	x_2	5	3
Costruisco il magazzino a Saronno?	x_3	6	5
Costruisco il magazzino a Gallarate?	x_4	4	2

La funzione obiettivo

- Se viene deciso di costruire una certa fabbrica (cosicché la corrispondente variabile decisionale assume valore 1) il profitto stimato di questo investimento è quello riportato in tabella.

- Se l'investimento non viene fatto il profitto (cosicché la corrispondente variabile decisionale assume valore 0) è 0

- Pertanto la funzione obiettivo (da massimizzare) relativo al profitto totale è data da

$$Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Domanda sì/no	Variabile decisionale	Valore attuale netto ($)	Capitale richiesto ($)
Costruisco la fabbrica a Saronno?	x_1	9	6
Costruisco la fabbrica a Gallarate?	x_2	5	3
Costruisco il magazzino a Saronno?	x_3	6	5
Costruisco il magazzino a Gallarate?	x_4	4	2

Il modello matematico

- Il modello matematico di questo problema è di tipo lineare con variabili binarie

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_3 \leq x_1 \\ x_4 \leq x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

- Notiamo che abbiamo 4 variabili e 4 vincoli

- Quante sono le possibili soluzioni ?
  → essendo solo variabili binarie, il numero di soluzione è $2^4 = 16$

Un regalo di compleanno ottimizzato

- Scegliere tra i sei giochi che più ci piacciono, avendo 150 euro di budget e 150GB si spazio su pc corrisponde a:

$$\max(2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 5x_6)$$

soggetto a:

- $39{,}99 \cdot x_1 + 39{,}99 \cdot x_2 + 59{,}99 \cdot x_3 + 59{,}99 \cdot x_4 + 19{,}99 \cdot x_5 + 29{,}99 \cdot x_6 \leq 150$
- $30 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 46 \cdot x_4 + 12 \cdot x_5 + 72 \cdot x_6 \leq 150$
- $x_i \in \{0,1\},\ \forall\, i \in \{1, \dots, 6\}$

- Il modello matematico è lineare a variabili binarie (PB) avente $2^6 = 64$ soluzioni possibili

						
Costo	39,99€	39,99€	59,99€	59,99€	19,99€	29,99€
Spazio	30 GB	40 GB	12 GB	46 GB	12 GB	72 GB
Gradimento	2	5	2	5	3	5

Altri problemi PLI visti ad esercitazione

Una società di consulenza

La società EtaBeta vuole costruire un portfolio di contratti per l'approvvigionamento dei propri negozi a partire da cinque offerte commerciali. Ogni offerta richiede un costo di acquisto fisso, al quale corrisponde un ritorno economico. I nomi dei contratti, i profitti p_i ed i costi w_i in migliaia di euro sono riportati nella tabella. Si formuli un opportuno modello di programmazione matematica che massimizzi il profitto totale soggetto al vincolo di spesa totale pari a 30 K €.

Offerta commerciale	w_i	p_i
F_1	10	20
F_2	5	8
F_3	4	3
F_4	23	23
F_5	5	15

- Il modello matematico di tale problema è stato fornito ad Esercitazione e corrisponde ad un modello PB

$$\max(20x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 23x_4 + 15x_5)$$

soggetto ai seguenti vincoli:

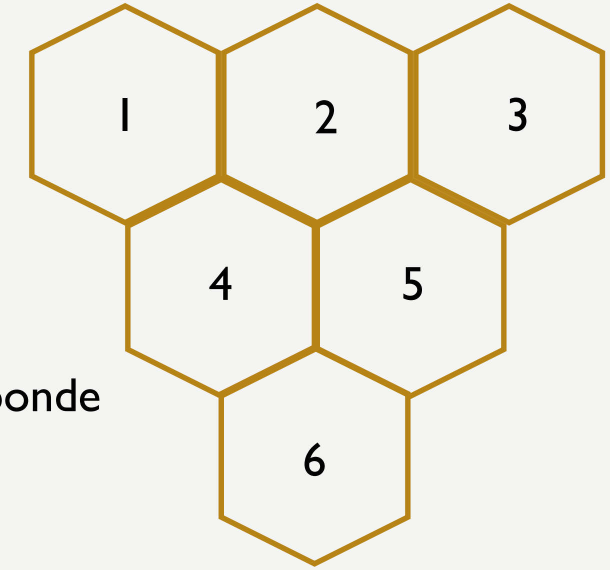
- $10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 23x_4 + 5x_5 \leq 30$
- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}$

- Tale modello è noto in letteratura come il **problema dello zaino**

Altri problemi visti ad esercitazione

Localizzazione delle farmacie

L'amministrazione di una città ha bisogno di decidere la localizzazione delle farmacie. La città è formata da 6 quartieri, come illustrato nella figura. Una farmacia può essere costruita in qualsiasi quartiere ed è in grado di servire il quartiere dove viene realizzata ed i quartieri adiacenti. Formulare un modello di programmazione lineare che permetta di determinare il numero minimo di farmacie al fine di servire tutti i quartieri della città.



- Il modello matematico di tale problema è stato fornito ad Esercitazione e corrisponde ad un modello PB

$$\min \sum_{i=1}^{6} x_i$$

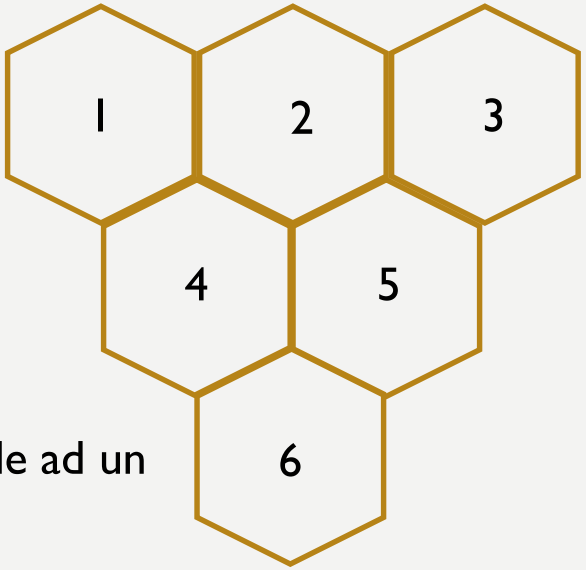
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0,1\} \end{cases}$$

- Tale modello è noto in letteratura come il **problema del set covering**

Problemi PB visti ad esercitazione

Localizzazione delle caserme dei pompieri

L'amministrazione della stessa città è alle prese con un problema simile. Deve decidere la localizzazione delle caserme dei pompieri. Una caserma può essere costruita in qualsiasi quartiere ed è in grado di servire il quartiere dove viene realizzata ed i quartieri adiacenti. Tuttavia non sono ammesse situazioni di quartieri serviti da più di una caserma dei pompieri. Formulare un modello di programmazione lineare che permetta di determinare il numero minimo di caserme dei pompieri al fine di servire tutti i quartieri della città.



- Il modello matematico di tale problema è stato fornito ad Esercitazione e corrisponde ad un modello PB

$$\min \sum_{i=1}^{6} x_i$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0,1\} \end{cases}$$

- Tale modello è noto in letteratura come il **problema del set partitioning**

Altri possibili usi delle variabili binarie

- Le variabili binarie permettono di introdurre condizioni logiche:

Vincoli di tipo «either-or»

Consideriamo il caso in cui, dati due vincoli, almeno uno di questi deve essere soddisfatto

(*) $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ oppure $x_1 + 4x_2 \leq 16$

Sia M un numero positivo molto grande e $y \in \{0,1\}$

La formulazione (*) risulta equivalente al seguente insieme di vincoli

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 + My \\ x_1 + 4x_2 \leq 16 + \mathrm{M}(1 - \mathrm{y}) \end{cases}$$

Infatti:

- se $y = 0$ allora $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ rimane mentre $x_1 + 4x_2 \leq 16 + \mathrm{M}$ è sempre soddisfatto per M molto grande quindi può essere eliminato.
- se $y = 1$ allora $x_1 + 4x_2 \leq 16$ rimane mentre $3x_1 + 2x_2 \leq 18 + M$ è sempre soddisfatto per M molto grande quindi può essere eliminato

Altri possibili usi delle variabili binarie

- Le variabili binarie permettono di introdurre condizioni logiche:

Dati $\boldsymbol{n}$ vincoli, solo $\boldsymbol{k}$ di questi sono presenti

Consideriamo il caso in cui un modello includa N vincoli tali se solo K devono essere soddisfatti (con $K < N$)

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_1 \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_2 \\
\dots \\
f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_N
\end{gathered}
$$

Consideriamo N variabili binarie $y_i \in \{0,1\}$ per $i = 1, \dots, N$ ed M un numero positivo molto grande.

Abbiamo la seguente formulazione equivalente al requisito che solo K di questi N vincoli devono essere soddisfatti

$$
\begin{cases}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_1 + My_1 \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_2 + My_2 \\
\dots \\
f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_N + My_N \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{N} y_i = N - K
\end{cases}
$$

Altri possibili usi delle variabili binarie

- Le variabili binarie permettono di introdurre condizioni logiche:

Il problema del costo fisso

Supponiamo che si voglia intraprendere un attività j il cui costo sia caratterizzato dalla seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} k + cx & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$$

dove $k > 0$ denota il **costo fisso**, $x \geq 0$ è il livello di attività e c è il costo per ogni unità incrementale

La minimizzazione di tale funzione può essere espressa attraverso il seguente modello PLI

$$\min z = (ky + cx)$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} x - My \leq 0 \\ y \in \{0,1\} \text{ e } x \geq 0 \end{cases}$$

dove M denota un numero molto grande. Notiamo che:

- se $y = 0$ allora si ha $x \leq 0$ → $x = 0$ e $z = 0$
- se $y = 1$ allora $x \leq M$ sempre e $z = k + cx$

Alcune considerazioni sui problemi PLI

- Apparentemente i problemi di PLI potrebbero risultare più facili da risolvere rispetto ai problemi PL
- Un possibile ragionamento potrebbe essere:
  - I problemi PL possono essere risolti efficientemente tramite il metodo del Simplesso
  - un problema PLI è simile ad un problema PL eccetto che Il numero di soluzione di un problema PLI è molto minore
  - Inoltre, i problemi PLI con regione ammissibile limitata hanno un numero finito di soluzioni ammissibili

- Quindi i problemi PLI sono facili da risolvere?

Assolutamente no!!!

Alcune considerazioni sui problemi PLI

1. Il fatto di avere un numero finito di soluzioni ammissibili non assicura che un problema PLI sia facilmente risolvibile

   Nel caso di un PLI con n variabili binarie, ho 2^n soluzioni possibili da considerare, ovvero il numero di soluzioni **cresce esponenzialmente** con il numero di variabili da considerare

Esempio
Se ho $n = 20$ variabili ho più di un milione di soluzione possibili!!!

2. La rimozione di alcune soluzioni ammissibili (quelle non intere) da un problema PL non lo rende più semplice.

   Nel metodo del simplesso risulta fondamentale che le variabili possano assumere valori continui. Altrimenti non è possibile garantire l'esistenza di vertici ammissibili e, quindi di soluzioni ammissibili di base

Esempio

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$

- La soluzione ottima del problema è $\left(0, \frac{20}{3}, \frac{50}{3}\right)$ (non intera)
- Non è possibile utilizzare il metodo del simplesso restringendosi al caso di variabili intere

Il metodo del rilassamento lineare

- Per un qualsiasi problema PLI è possibile formulare il corrispettivo problema PL, ovvero lo stesso problema senza i vincoli di interezza. Tale problema prende il nome di **rilassamento lineare**

Esempi

max $z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$\Rightarrow$

max $z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

max $z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in \{0,1\}. \end{cases}$$

$\Rightarrow$

max $z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, x_3 \leq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Il metodo del rilassamento lineare

- In generale, dato un generico problema PLI:

  - una variabile intera può essere rilassata sostituendo $x \in \mathbb{N}$ con x variabile continua tale che $x \geq 0$

  - una variabile binaria può essere rilassata sostituendo $x \in \{0,1\}$ con x variabile continua tale che:
    - $x \geq 0$ (vincolo di non negatività)
    - $x \leq 1$ (nuovo vincolo funzionale)

  - una variabile intera non negativa con un vincolo del tipo $x \leq M$ può essere rilassata sostituendo $x \in \{0, M\}$ con x variabile continua tale che:

    - $x \geq 0$ (vincolo di non negatività)

    - $x \leq M$ (nuovo vincolo funzionale)

Il metodo del rilassamento lineare

- Quando si affronta un problema PLI è comune partire risolvendo il suo rilassamento lineare allo scopo di verificare se la soluzione ottima trovata sia intera ed in caso contrario si ottiene un upper/lower bound rispettivamente per problemi di max/min
- In generale, la soluzione ottima di un problema PLI non corrisponde all'ottimo del suo rilassamento lineare

Esempio

$$\max z = x_2$$

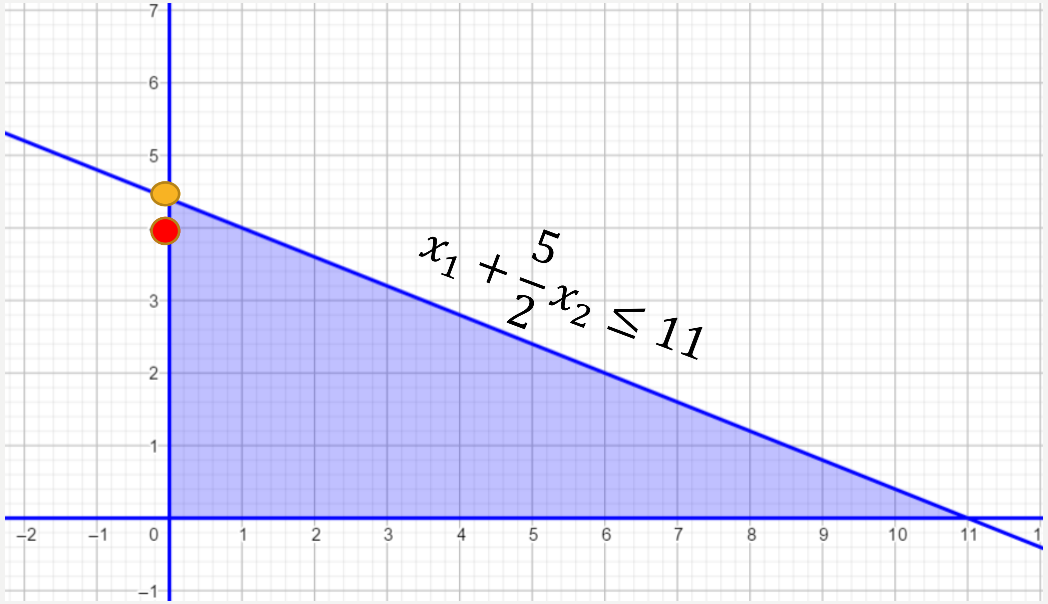
$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{2}x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ottimo del rilassamento lineare

$$\left(0, \frac{22}{5}\right)$$

Soluzione approssimata

$$(0,4)$$



Una tentazione da evitare

- Per risolvere un problema PLI si potrebbe tentare il seguente metodo di approssimazione:
  - Si passa dal problema PLI al suo rilassamento lineare
  - Si risolve il problema PL tramite il metodo del simplesso
  - Si approssimano le componenti non intere nella soluzione ottima ottenuta con l'intero più vicino.

Esempio

$$\max z = x_1 + 5x_2$$

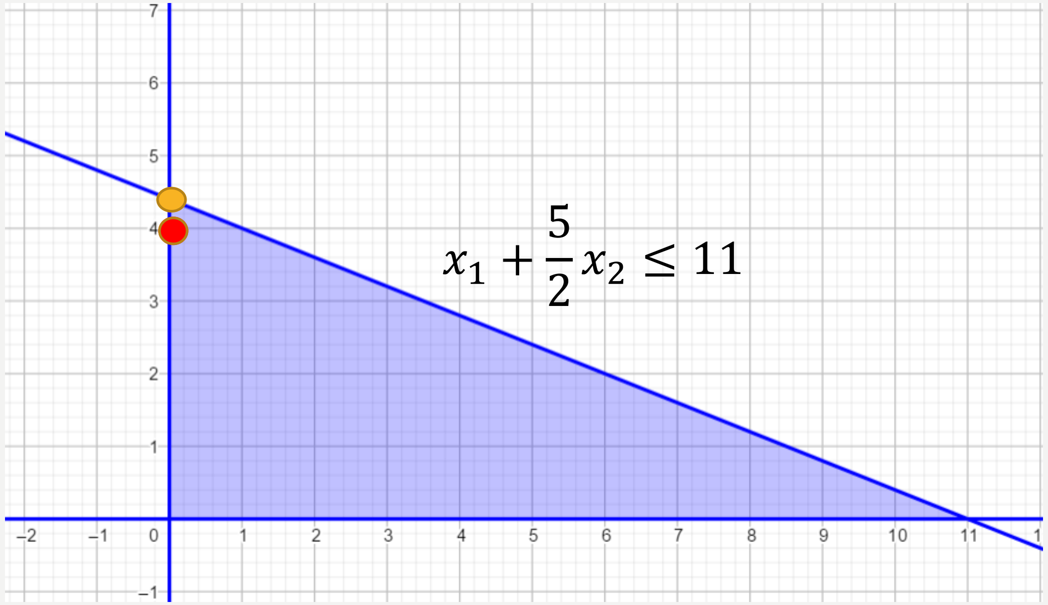
$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{2}x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ottimo del rilassamento lineare

$$\left(0, \frac{22}{5}\right)$$

Soluzione approssimata

$$(0,4)$$



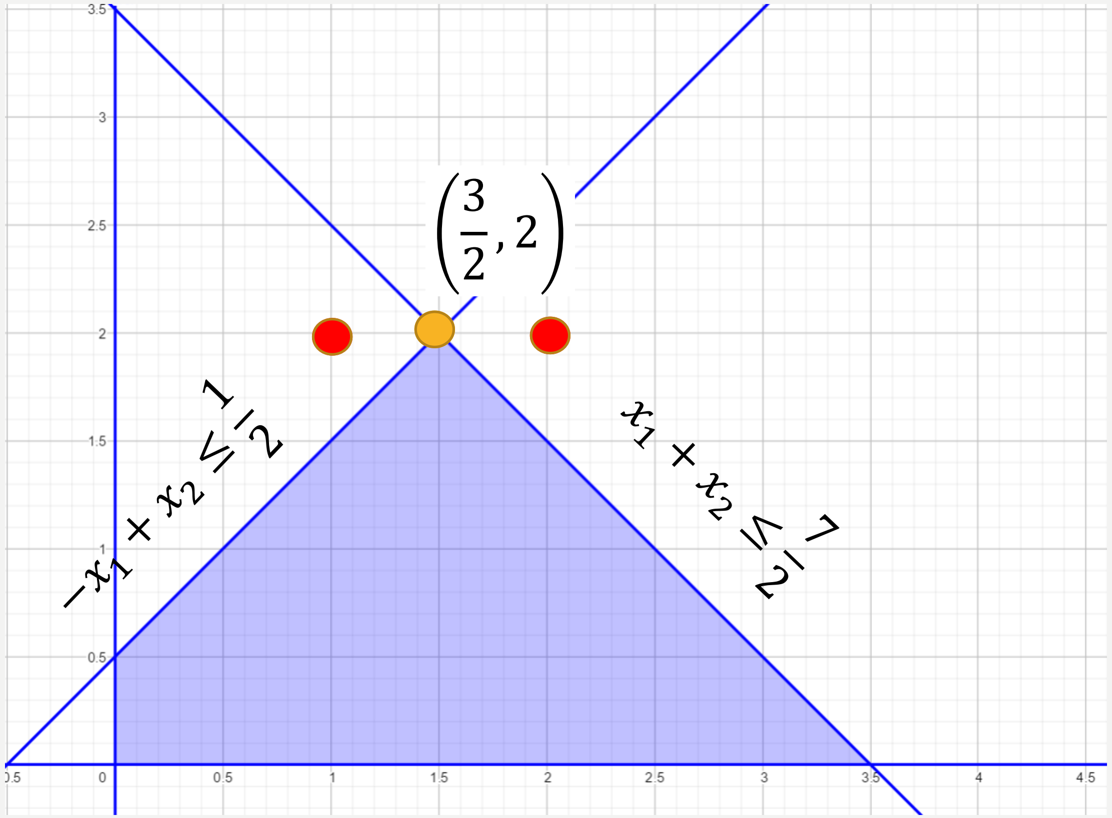
- Sfortunatamente tale approccio non è generalmente valido

Contro-esempi

- Una soluzione ottima di un problema PL non è necessariamente ammissibile dopo l'arrotondamento

Esempio

$$\max z = x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_1 + x_2 \leq \frac{7}{2} \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$



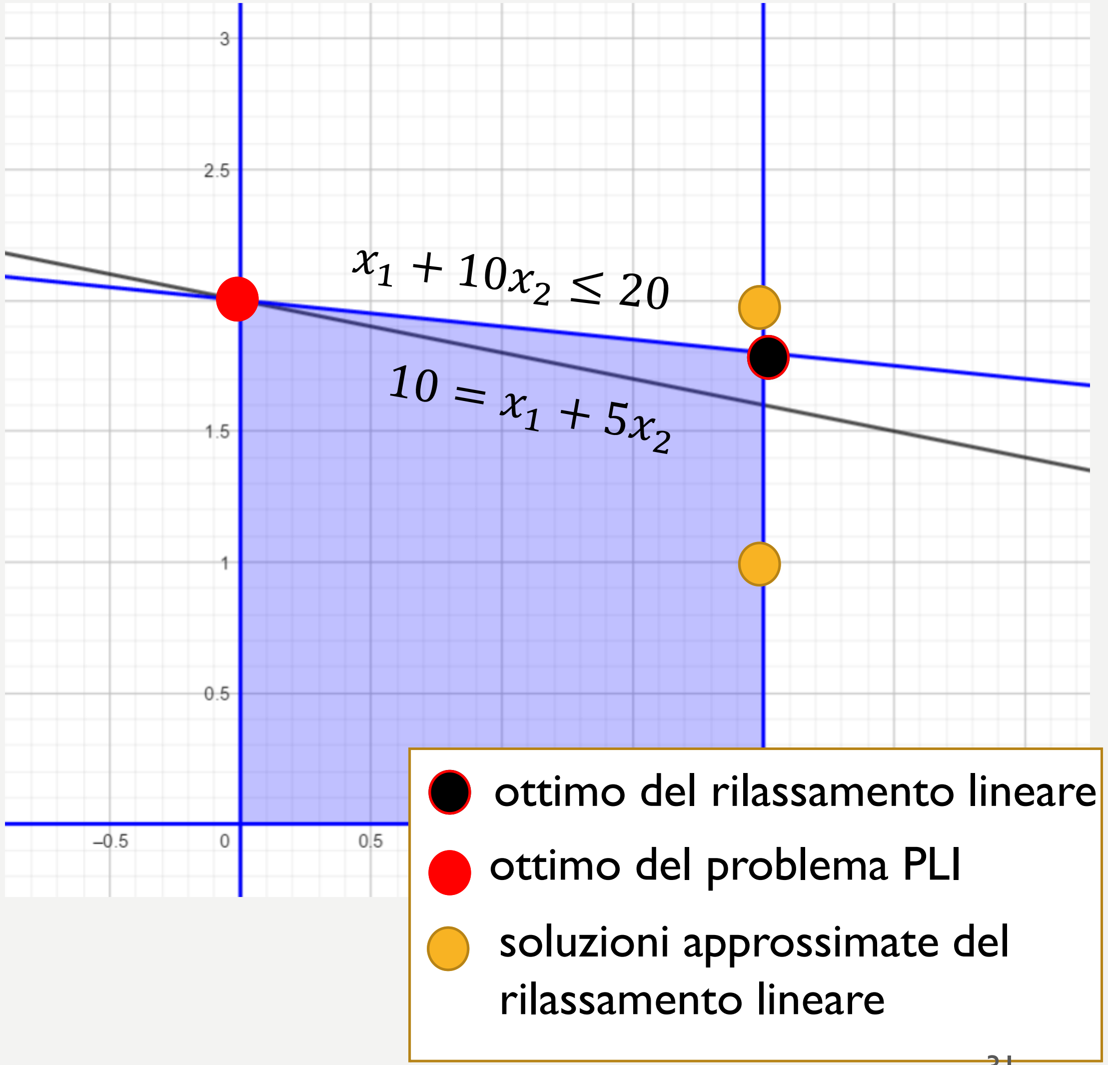
- La soluzione ottima del rilassamento lineare è il punto $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$
- Le soluzioni ottenute approssimando $x_1 = \frac{3}{2}$ all'intero più vicino sono entrambe non ammissibili

Contro-esempi

- Non vi è nessuna garanzia che la soluzione ottima di un problema PLI corrisponda alla soluzione approssimata del rilassamento lineare

Esempio

$$\max z = x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$



- La soluzione ottima del rilassamento lineare è $\left(2, \frac{9}{5}\right)$

- La soluzione intera ottenuta approssimando $\left(2, \frac{9}{5}\right)$ alle soluzione intera più vicine sono $(2,2)$ e $(2,1)$

- La soluzione ottima del problema PLI è $(0,2)$