# PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA

L'ALGORITMO DEL BRANCH AND BOUND

# Metodo del Branch and Bound (B &B)

- È una tecnica generale per la risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria (ovvero con spazio di soluzioni finito)

- Proposto da A.H. Land e A.G. Doig nel 1960 (*) per risolvere problemi di PLI

- Inizialmente venne sviluppato per risolvere modelli di programmazione lineare intera per il trasporto e lo stoccaggio di petrolio

- La tecnica del Branch and Bound è una tecnica di **enumerazione implicita**, ovvero
  - «prova» tutte le soluzioni possibili fino a trovare quella ottima.
  - scarta alcune di queste soluzioni a priori, dimostrando la loro non ottimalità.
  - si basa sul concetto di *dividi et impera*


- Ancora oggi il metodo del Branch and Bound rappresenta una delle tecniche più usate per risolvere i problemi di PL intera, binaria e mista

(*) Land, A. H., & Doig, A. G. (2010). An automatic method for solving discrete programming problems. In *50 Years of Integer Programming 1958-2008* (pp. 105-132). Springer, Berlin, Heidelberg.

# Come funziona il B & B

- Supponiamo di avere un problema PLI:

$$\max z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \qquad \text{(funzione obiettivo lineare)}$$

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n : g_i(\boldsymbol{x}) \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} 0, i = 1, \dots, m \right\}, \qquad \text{con } g_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - b_i \quad \text{(vincoli lineari)}$$

dove $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

- Indichiamo tale problema come **problema completo**

- Un problema PLI rappresenta un **sotto-problema** del problema completo se:
    - presenta la **medesima funzione obiettivo** ma ha un sottoinsieme proprio di $X$ come regione ammissibile

- Sia $z^* = f(x^*)$ la soluzione ottima del problema completo e $\tilde{z} = f(\tilde{x})$ la soluzione ottima di un sotto-problema , allora si ha che $\tilde{z} \leq z^*$, ovvero $\mathrm{f}(\tilde{\mathrm{x}}) \leq \mathrm{f}(\mathrm{x}^*)$
- Basta solo notare che tra le soluzioni ammissibili del problema completo vi è anche $\tilde{x}$ e che per definizione di ottimo $f(\tilde{x}) \leq f(x^*)$

- (per un problema di min vale il contrario)

# Esempi

➢ Consideriamo i tre seguenti problemi PLI

$P_0$

$$\max z = x_2$$

- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$P_1$

$$\max z = x_2$$

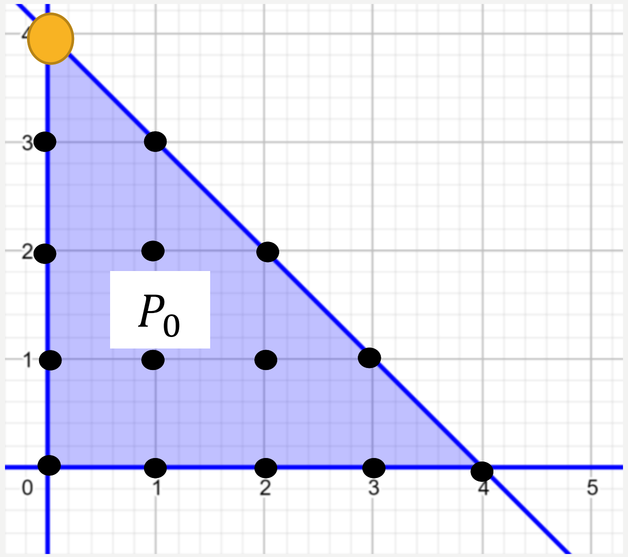
- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$
- $x_1 \leq 1$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$P_2$

$$\max z = x_2$$

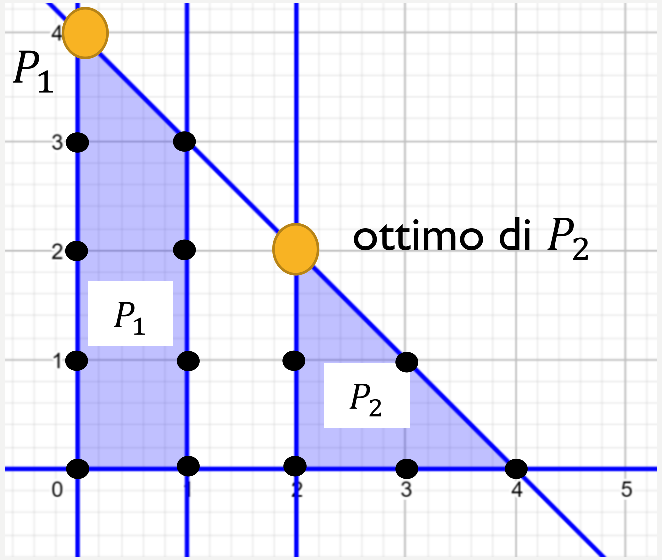
- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$
- $x_1 \geq 2$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

ottimo di $P_0$




ottimo di $P_1$

ottimo di $P_2$




- Il problema $P_1$ è un sotto-problema di $P_0$ e la soluzione ottima di $P_1$ è la stessa di $P_0$
- Il problema $P_2$ è un sotto-problema di $P_0$ e la soluzione ottima di $P_2$ NON è la stessa di $P_1$

# Esempi

- Consideriamo i tre seguenti problemi PLI

$P_0$

$$\max z = x_2$$

- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$P_1$

$$\max z = x_2$$

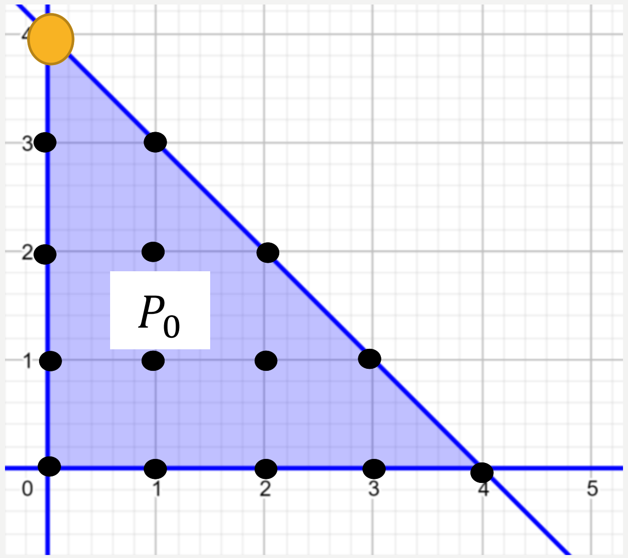
- $5x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

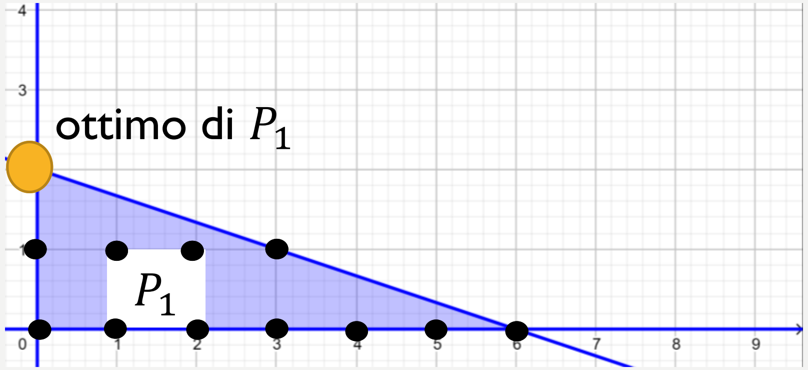
$P_2$

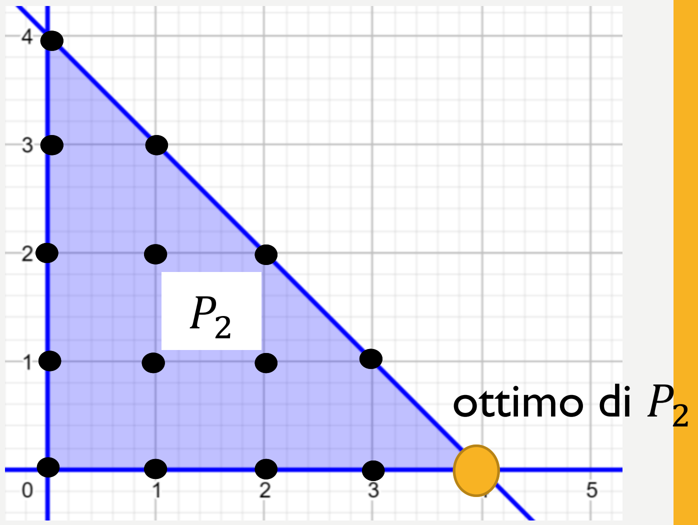
$$\max z = x_1$$

- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

ottimo di $P_0$




- Il problema $P_1$ NON è un sotto-problema di $P_0$ poiché la regione ammissibile di $P_1$ non è contenuta in quella di $P_0$
- Il problema $P_2$ NON è un sotto-problema di $P_0$ in quanto hanno funzioni obiettivo differenti

# Come funziona il B & B

- Il B & B fa uso delle tre seguenti tecniche per risolvere un generico problema PLI:

  - la partizione, o **branching**
  - la determinazione di un limite superiore (**bounding)**
  - l’eliminazione (**fathoming**)

# Il branching

- La tecnica del branching è utilizzata per dividere un problema PLI $P_0$ in $K$ sotto-problemi, $P_1, P_2, \dots, P_K$, di modo che l'unione delle regioni ammissibili $X_1, X_2, \dots, X_K$ dia la regione ammissibile del problema originale $X$, ovvero $\bigcup_{i=1}^{K} P_k = P_0$

**Esempio**

$P_0$

$$\max z = -x_1 + x_2$$

- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$P_0 = P_1 \cup P_2$

$P_1$

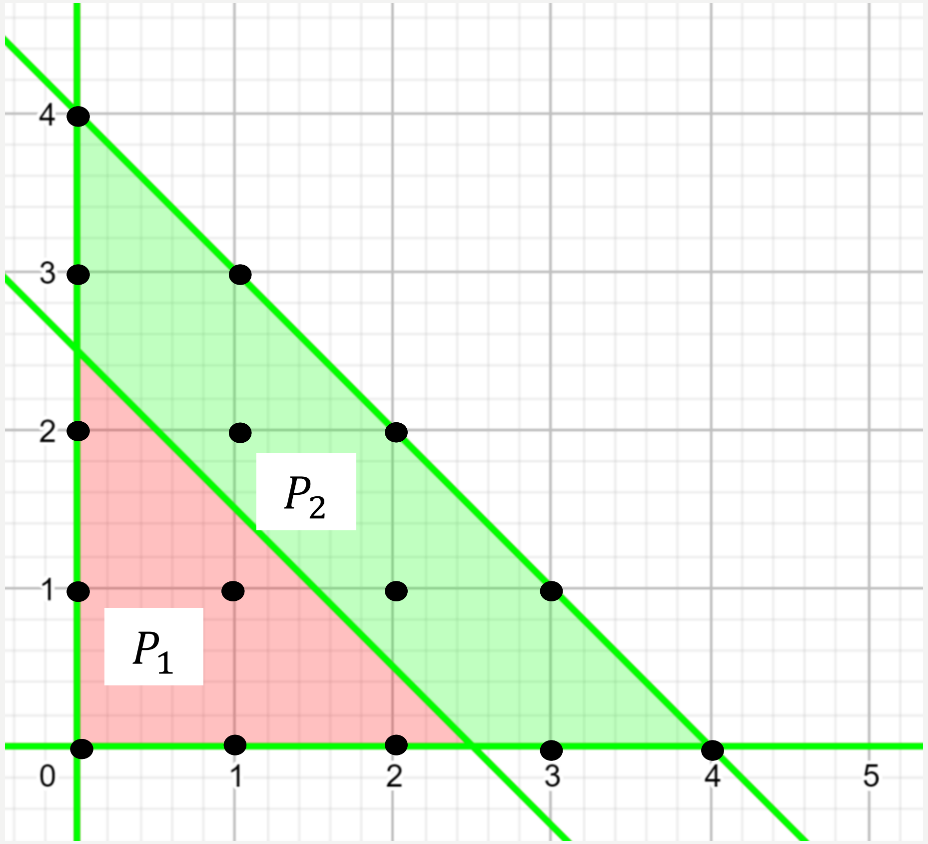
$$\max z = -x_1 + x_2$$

- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 2$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$P_2$

$$\max z = -x_1 + x_2$$

- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \geq 2$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$




- Tale suddivisione viene utilizzata per analizzare le soluzioni di $P_0$ tramite l'analisi delle soluzioni di $P_1, P_2, \dots, P_K$

# L'albero delle soluzioni

- La suddivisione di un problema tramite branching genera una struttura ad albero, chiamato **albero delle soluzioni**, con i rami (archi) dal nodo padre (corrispondente al problema originale $P_0$) ai nodi figli (corrispondenti ai vari sotto-problemi)

**Esempio**

$P_0$
(problema completo)

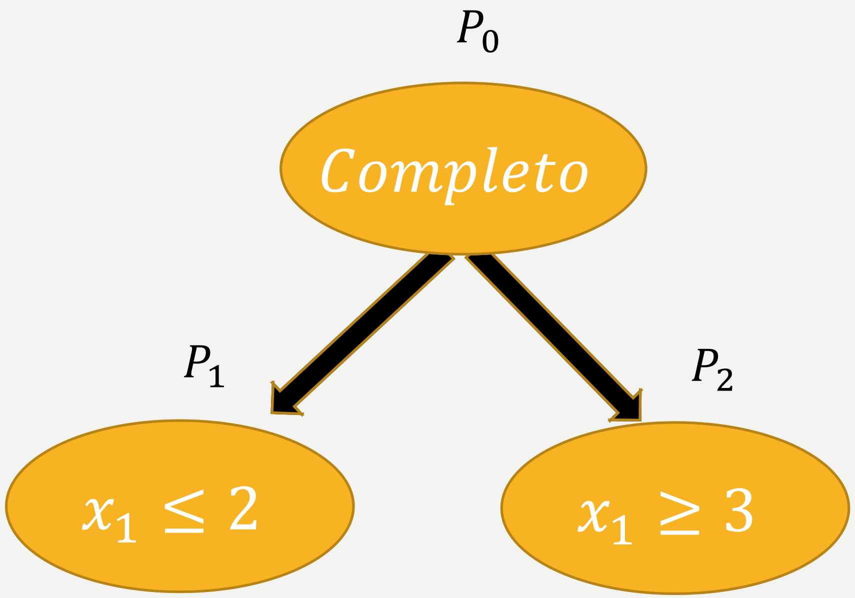
$\max z = -x_1 + x_2$
- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \geq 0$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$P_1$

$\max z = -x_1 + x_2$
- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 \leq 2$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$P_2$

$\max z = -x_1 + x_2$
- $x_1 + x_2 \leq 4$
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 \geq 3$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$



# L'albero delle soluzioni

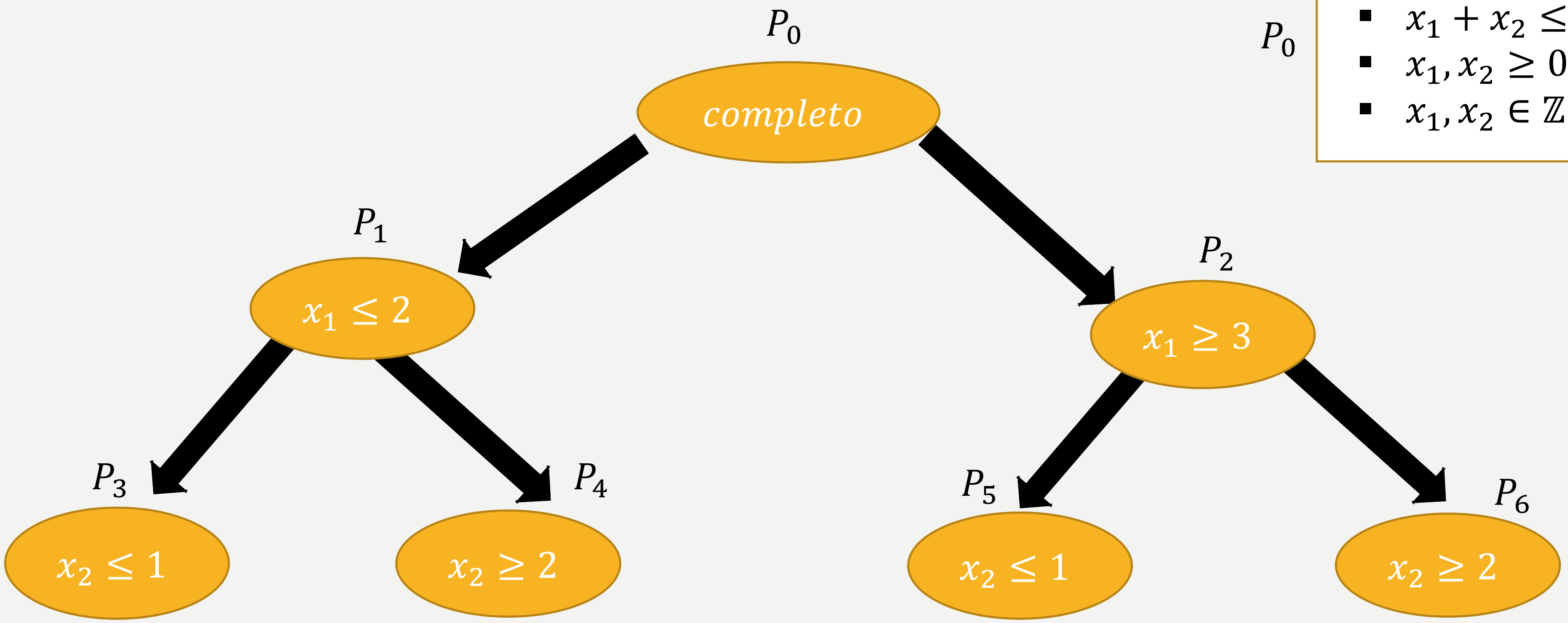
- Tale albero può ulteriormente ramificarsi attraverso un processo iterativo che suddivida via via i sotto-problemi

**Esempio**

$P_0$

$$\max z = -x_1 + x_2$$

- $x_1 + x_2 \le 4$
- $x_1, x_2 \ge 0$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$




- Notiamo che le soluzioni di $P_0 = P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6$ ma anche, ad esempio, $P_0 = P_1 \cup P_5 \cup P_6$ oppure $P_0 = P_3 \cup P_4 \cup P_2$

# Il branching per problemi PB

- Nel caso di problemi a variabili binarie (PB), il modo più semplice per dividere l'insieme delle soluzioni ammissibili in sottoinsiemi è fissare il valore di una delle variabili, per esempio $x_1 = 0$, per un sottoinsieme e a $x_1 = 1$ per l'altro sottoinsieme

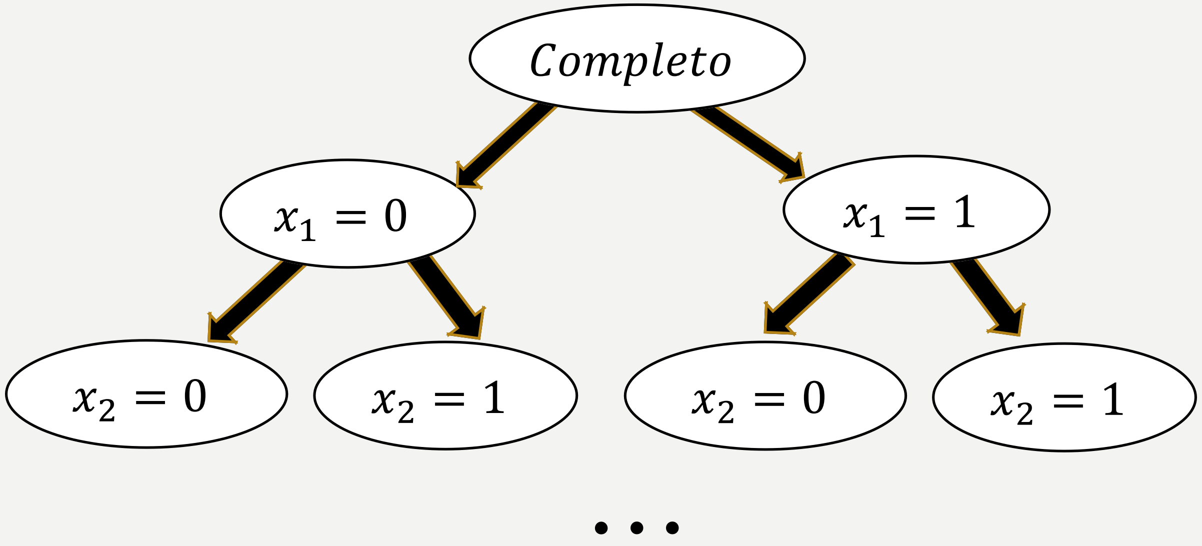
- La variabile che viene utilizzata per eseguire questa suddivisione ad ogni iterazione è chiamata **variabile di branching**

- Per selezionare ad ogni iterazione la variabile di branching si può utilizzare l'ordinamento naturale delle variabili $x_1, x_2, \ldots$

**Esempio**

$P_0$

$\max z = -x_1 + 2x_2 + 4x_3$
- $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$
- $x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$




- Notiamo che, nel caso binario, ad ogni branching generiamo due nuovi sotto-problemi

# Il branching per problemi PLI

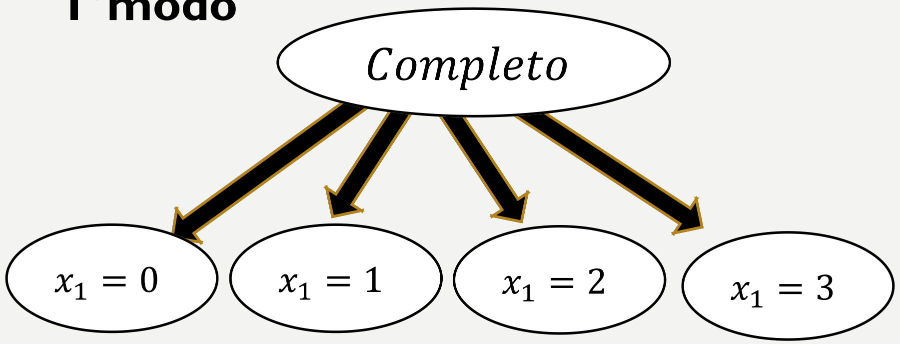
- Nel caso di problemi a variabili intere (PLI), il modo più semplice per dividere l'insieme delle soluzioni ammissibili in sottoinsiemi è fissare il valore di una delle variabili, per esempio $x_1$:
  - **1°modo**: fissando il valore di $x_1$ a tutti i suoi possibili diversi valori
    - (se x non è limitata dovrei generare infiniti sottoproblemi !!!)
  - **2°modo**: specificando un insieme di valori per ogni nuovo sotto-problema che si vuole generare

**Esempio**

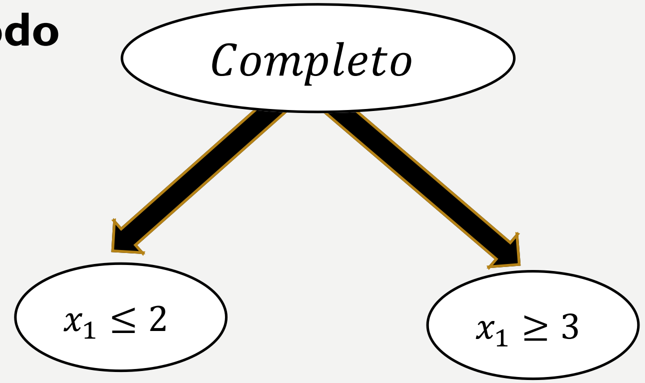
$P_0$

$\max \mathrm{z} = -x_1 + 2x_2 + 4\mathrm{x}_3$
- $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$
- $x_1 \in \{0,1,2,3\}, x_2, x_3 \in \{0,1\}$

**1°modo**




**2°modo**



# Il branching per problemi PLM

- Nel caso di problemi a variabili miste (PLM), il modo più semplice per dividere l'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema $P_0$ in sotto-problemi è il seguente:
  - calcolare la soluzione ottima del rilassamento lineare di $P_0$
  - scegliere come variabile di branching una variabile $x_j$ che NON abbia valore intero nella soluzione ottima del rilassamento lineare
  - dividere il problema $P_0$ in due sotto-problemi $P_1$ e $P_2$ specificando i due seguenti intervalli di valori per $x_j$:
    - $P_1$: $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$
    - $P_2$: $x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1$

**Esempio**

Consideriamo il seguente problema PLM

$P_0$

$$\max z = 4x_1 - 2x_2$$

soggetto ai seguenti vincoli:

- $x_1 \leq 5$
- $x_2 \leq 6$
- $3x_1 + 2x_2 \leq 20$
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 \in \mathbb{Z}$

Il problema ha $x_1$ come variabile intera e $x_2$ come variabile continua

# Il branching per problemi PLM

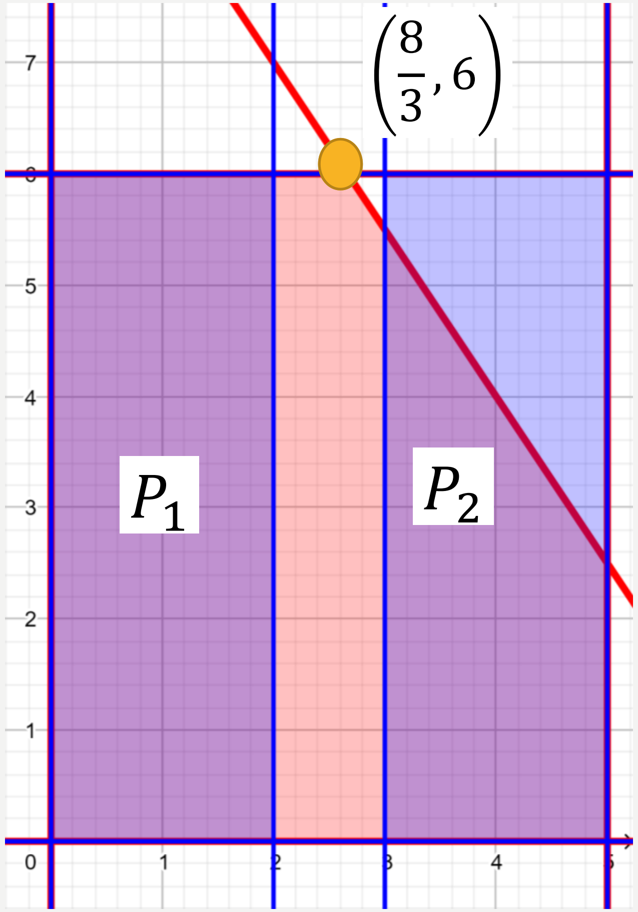
Calcoliamo l'ottimo del problema $P_0$ rilassato (ovvero assumendo $x_1$ continua)

$P_0$ rilassato

$$\max z = 4x_1 - 2x_2$$

- $x_1 \leq 5$
- $x_2 \leq 6$
- $3x_1 + 2x_2 \leq 20$
- $x_1, x_2 \geq 0$

ottimo in $\mathrm{x}_1 = \frac{8}{3}$ e $x_2 = 6$




La variabile $x_1$ non ha valore intero nella soluzione ottima, quindi possiamo considerare il seguente branching:

- $P_1$: problema $P_0$ con l'aggiunta del vincolo $x_1 \leq \left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor = 2$
- $P_2$: problema $P_0$ con l'aggiunta del vincolo $x_1 \geq \left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor + 1 = 3$

# Il bounding

- Dato un generico problema PLI $P_0$ ed un albero di decisioni ad esso associato $P_0, P_1, \dots, P_K$ si può associare ad ogni sotto-problema $P_1, \dots, P_K$ un limite (**bound**) $z_1, \dots, z_K$ su quanto buona può essere la soluzione migliore per ogni sotto-problema
- Dato un sotto-problema $P_i$, il modo più semplice di ottenere un bound $Z_i$ consiste nel risolvere il **rilassamento lineare associato**

**Esempio**

Consideriamo il seguente problema PLI

$P_0$

$\max \mathrm{z} = -x_1 + 2x_2 + 4\mathrm{x}_3$
- $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3$
- $x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$

Possiamo utilizzare il branching per suddividere $P_0$ nei due seguenti problemi $P_1$ e $P_2$

$P_1$

$\max \mathrm{z} = -x_1 + 2x_2 + 4\mathrm{x}_3$
- $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3$
- $x_2, x_3 \in \{0,1\}$
- $x_1 = 0$

$P_2$

$\max \mathrm{z} = -x_1 + 2x_2 + 4\mathrm{x}_3$
- $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3$
- $x_2, x_3 \in \{0,1\}$
- $x_1 = 1$

# Il bounding

- Possiamo stimare un bound per ciascuno dei due sotto-problemi risolvendo il rilassamento lineare associato

$P_1$

$\max z = 2x_2 + 4x_3$
- $x_2 + 2x_3 \leq 3$
- $x_2, x_3 \in \{0,1\}$
- $x_1 = 0$

$P_1$ rilassato

$\max z = 2x_2 + 4x_3$
- $x_2 + 2x_3 \leq 3$
- $x_2, x_3 \leq 1$
- $x_2, x_3 \geq 0$

$P_2$

$\max z = -1 + 2x_2 + 4x_3$
- $x_2 + 2x_3 \leq 2$
- $x_2, x_3 \in \{0,1\}$
- $x_1 = 1$

$P_2$ rilassato

$\max z = -1 + 2x_2 + 4x_3$
- $x_2 + 2x_3 \leq 2$
- $x_2, x_3 \leq 1$
- $x_2, x_3 \geq 0$

- Per il sottoproblema rilassato $P_1$ otteniamo la soluzione ottima $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$, ottenendo come bound $z_1 = 6$
- Per il sottoproblema rilassato $P_2$ otteniamo la soluzione ottima $x_2 = 1$ e $x_3 = \frac{1}{2}$, ottenendo come bound $z_2 = 3$

- Notiamo che:
  - la soluzione ottima del rilassamento di $P_1$ coincide con la soluzione ottima (intera) di $P_1$
  - la soluzione ottima del rilassamento di $P_2$ NON è la soluzione ottima di $P_2$ ma è un suo upper bound

# Il bounding nell'albero delle decisioni

- Il valore di bounding e dell'ottimo del problema rilassato per ogni sotto-problema può essere riportato nella struttura dell'albero delle decisioni

$P_0$

$\max z = -x_1 + 2x_2 + 4x_3$

- $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3$
- $x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$

$P_1$

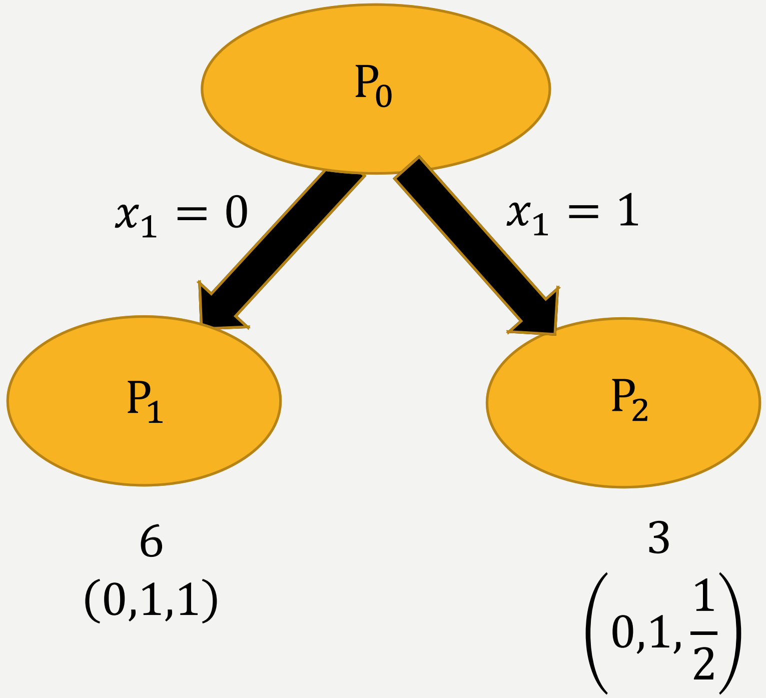
$\max z = 2x_2 + 4x_3$

- $x_2 + 2x_3 \leq 3$
- $x_2, x_3 \in \{0,1\}$
- $x_1 = 0$

$P_2$

$\max z = -1 + 2x_2 + 4x_3$

- $x_2 + 2x_3 \leq 2$
- $x_2, x_3 \in \{0,1\}$
- $x_1 = 1$



# Soluzione incombente

- Dato un generico problema PLI $P_0$ ed un albero di soluzioni ad esso associato $P_0, P_1, \dots, P_K$ chiamiamo **soluzione incombente** per $P_0$ la migliore soluzione ammissibile (quindi intera) trovata finora per il problema originario $P_0$ insieme al suo valore di funzione obiettivo

$$\mathbf{z}^* = valore\ di\ z\ per\ la\ soluzione\ imcombente$$

**Esempio**

Consideriamo il precedente problema PLI

$P_0$

$$\max \mathrm{z} = -x_1 + 2x_2 + 4\mathrm{x}_3$$

- $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3$
- $x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$

Prima del branching possiamo, ad esempio, porre $z^* = -\infty$

Dopo il branching otteniamo per il problema $P_1$ una nuova soluzione incombente

$z^* = 6$ e la nuova soluzione incombente è $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$

# Fathoming (per problemi di max)

- Consideriamo un generico problema PLI $P_0$ ed un albero di decisioni ad esso associato $P_0, P_1, \dots, P_K$.

- Un sotto-problema $P_i$ con $i > 0$ può essere tagliato via (**fathoming**) e quindi escluso da ogni ulteriore considerazione nel caso in cui:

**F(1)** il suo upper bound è $\leq z^*$

Dato che il bound di $P_i$ non è migliore della migliore soluzione incombente trovata finora, non sarà possibile ottenere dal problema $P_i$ o da eventuali suoi branching delle soluzioni ammissibili migliori, quindi può essere escluso (**fathomed**)

**F(2)** il suo rilassamento lineare non ha soluzioni ammissibili

Infatti se il rilassamento lineare di $P_i$ non ha soluzioni ammissibili allora non potrà avere alcuna soluzione ammissibile intera e quindi può essere escluso (**fathomed**)

**F(3)** la soluzione ottima del rilassamento lineare è intera

In questo caso non è necessario procedere ad ulteriore branching del sotto-problema $P_i$. Infatti se questa soluzione è migliore di quella incombente essa diventa la nuova soluzione incombente.

N.B. Nel caso di problemi PLM, il terzo criterio è meno restrittivo e basta solo che le componenti relative alle variabili intere della soluzione ottima siano intere

# B & B per problemi con variabili binarie

- Sfruttando i concetti di branching, bounding e fathoming possiamo arrivare a formulare il seguente **algoritmo di Branch and Bound** per risolvere problemi a variabili binarie

**Inizializzazione**: Porre $z^* = -\infty$. Applicare il passo di bounding, il passo di fathoming ed il test di ottimalità descritti sotto all'intero problema. Se non tagliato via, classificare questo problema come sotto-problema ed eseguire la **prima iterazione** del metodo del Branch and Bound

**Iterazione del Branch and Bound**

1. **Branching**:
   1. tra i sotto-problemi rimanenti (unfathomed), selezionarne uno (per esempio quello che è stato generato più recentemente).
   2. Generare a partire da questo nodo due nuovi sotto-problemi fissando la successiva variabile di branching a 0 oppure 1

2. **Bounding**: per ogni nuovo sotto-problema, ottenere un bound applicando il metodo del simplesso al suo rilassamento lineare

3. **Fathoming**: per ogni nuovo sotto-problema, applicare i tre criteri di fathoming prima descritti e scartare quei sotto-problemi che soddisfano uno dei criteri

**Test di ottimalità**: arrestarsi quando non rimangono più sotto-problemi; la soluzione incombente è ottima. Altrimenti eseguire un'altra iterazione

# B & B per problemi con variabili miste

- Sfruttando i medesimi concetti possiamo arrivare a formulare il seguente **algoritmo di Branch and Bound** per risolvere problemi a variabili miste

**Inizializzazione**: Porre $z^* = -\infty$. Applicare il passo di bounding, il passo di fathoming ed il test di ottimalità descritti sotto all'intero problema. Se non tagliato via, classificare questo problema come sotto-problema ed eseguire la prima iterazione completa seguente

**Passo per ciascuna iterazione**

1. **Branching**:
   1. tra i sotto-problemi rimanenti (unfathomed), selezionarne uno (per esempio quello che è stato generato più recentemente).
   2. Tra le variabili intere che non hanno valore intero nella soluzione ottima del rilassamento lineare associato, sceglierne una come variabile di branching (per esempio la prima nell'ordine naturale o la più distante da un valore intero). Se $x_j$ è tale variabile e $x_j^*$ il relativo valore nella soluzione ottima, genero due nuovi sotto-problemi aggiungendo rispettivamente i vincoli $x_j \leq [x_j^*]$ e $x_j \geq [x_j^*] + 1$

2. **Bounding**: per ogni nuovo sotto-problema, ottenere un bound applicando il metodo del simplesso al suo rilassamento.

3. **Fathoming**: per ogni nuovo sotto-problema, applicare i tre criteri di fathoming prima descritti e scartare quei sotto-problemi che soddisfano uno dei criteri

**Test di ottimalità**: arrestarsi quando non rimangono più sotto-problemi; la soluzione incombente è ottima. Altrimenti eseguire un'altra iterazione

# Differenze tra B & B per problemi PB e PLM

- **Scelta della variabile di branching**:
  - scelta della variabile di branching tra quelle che non hanno valore intero (binario) nella soluzione ottima (per esempio la prima nell'ordine naturale o la più distante da un valore intero).

- **Valori assegnati alle variabili di branching**
  - PB: viene assegnato 0 e 1
  - PLM: vengono specificati due intervalli di valori con $x_j \leq [x_j^*]$ e $x_j \geq [x_j^*] + 1$

- **Passo di bounding**
  - PB: se tutti i coefficienti nel problema sono interi allora il bound $z^*$ può essere approssimato per difetto all'intero più vicino (essendo tutte le variabili del problema intere)
  - PLM: il bound $z^*$ non può essere approssimato (se alcune delle variabili sono continue)

- **Terzo criterio di fathoming**
  - PB: la soluzione ottima deve essere o zero o uno
  - PLM: le componenti intere della soluzione ottima devono essere intere

# Uso del B & B per il Lombardia Manufactoring Co.

- Riprendiamo l'esempio del Lombardia Manufactoring Co.

$P_0$

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_3 \le x_1 \\ x_4 \le x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

- Il problema ha quattro variabili binarie

# Inizializzazione

- Poniamo $z^* = -\infty$ e consideriamo il rilassamento lineare del problema originale $P_0$

$P_0$

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_3 \leq x_1 \\ x_4 \leq x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$P_0$ rilassato

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_3 \leq x_1 \\ x_4 \leq x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1 \end{cases}$$

- **bounding**: Usando il metodo del simplesso otteniamo come soluzione $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5}{6}, 1,0,1\right)$ con $z_0 = 16.5$
- **fathoming**: il «sotto-problema» non rispetta nessuno dei tre criteri di fathoming. Infatti:
  - $z_0 = 16.5 \geq z^* = -\infty$
  - il rilassamento lineare ha soluzione ammissibili
  - la soluzione ottima del rilassamento lineare non è intera
- **test di ottimalità**: Ho un sotto-problema (il problema di partenza)
  → test non superato! Devo eseguire un iterazione del B & B

# iterazione 1: branching

- Generariamo a partire dal problema $P_0$ due nuovi sotto-problemi $P_1$ e $P_2$ fissando la variabile di branching $x_1$ a $x_1 = 0$ oppure $x_1 = 1$

$$P_0 \quad \max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_3 \leq x_1 \\ x_4 \leq x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$x_1 = 0$

$$P_1 \quad \max z = 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_3 \leq 0 \\ x_4 \leq x_2 \\ x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$x_1 = 1$

$$P_2 \quad \max z = 9 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 6 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_3 \leq 1 \\ x_4 \leq x_2 \\ x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

# iterazione 1: bounding

- Per ogni nuovo sotto-problema, consideriamo il rispettivo rilassamento lineare…

$P_1$

$$\max z = 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_3 \le 0 \\ x_4 \le x_2 \\ x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$P_1$ rilassato

$$\max z = 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_3 \le 0 \\ x_4 \le x_2 \\ x_2, x_3, x_4 \le 1 \\ x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$P_2$

$$\max z = 9 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 6 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_3 \le 1 \\ x_4 \le x_2 \\ x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$P_2$ rilassato

$$\max z = 9 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 6 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_3 \le 1 \\ x_4 \le x_2 \\ x_2, x_3, x_4 \le 1 \\ x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

- …ed applichiamo il metodo del simplesso per stimare un bound per ogni sotto-problema
  - La soluzione del problema $P_1$ rilassato è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,1,0,1)$ con $z_1 = 9$
  - La soluzione del problema $P_2$ rilassato è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, \frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$ con $z_2 = 16.2$

# iterazione 1 : fathoming

- $\boldsymbol{P_1}$ **rilassato**: La soluzione del problema $P_1$ rilassato è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,1,0,1)$ con $z_1 = 9$
- $\boldsymbol{P_2}$ **rilassato**: La soluzione del problema $P_2$ rilassato è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, \frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$ con $z_2 = 16.2$

➢ Per il sotto-problema 1 abbiamo che:

- la soluzione ottima del suo rilassamento lineare è intera.
- tale soluzione è migliore di quella incombente (infatti $z = 9 > -\infty$), quindi essa diventa la nuova soluzione incombente e poniamo $z^* = 9$

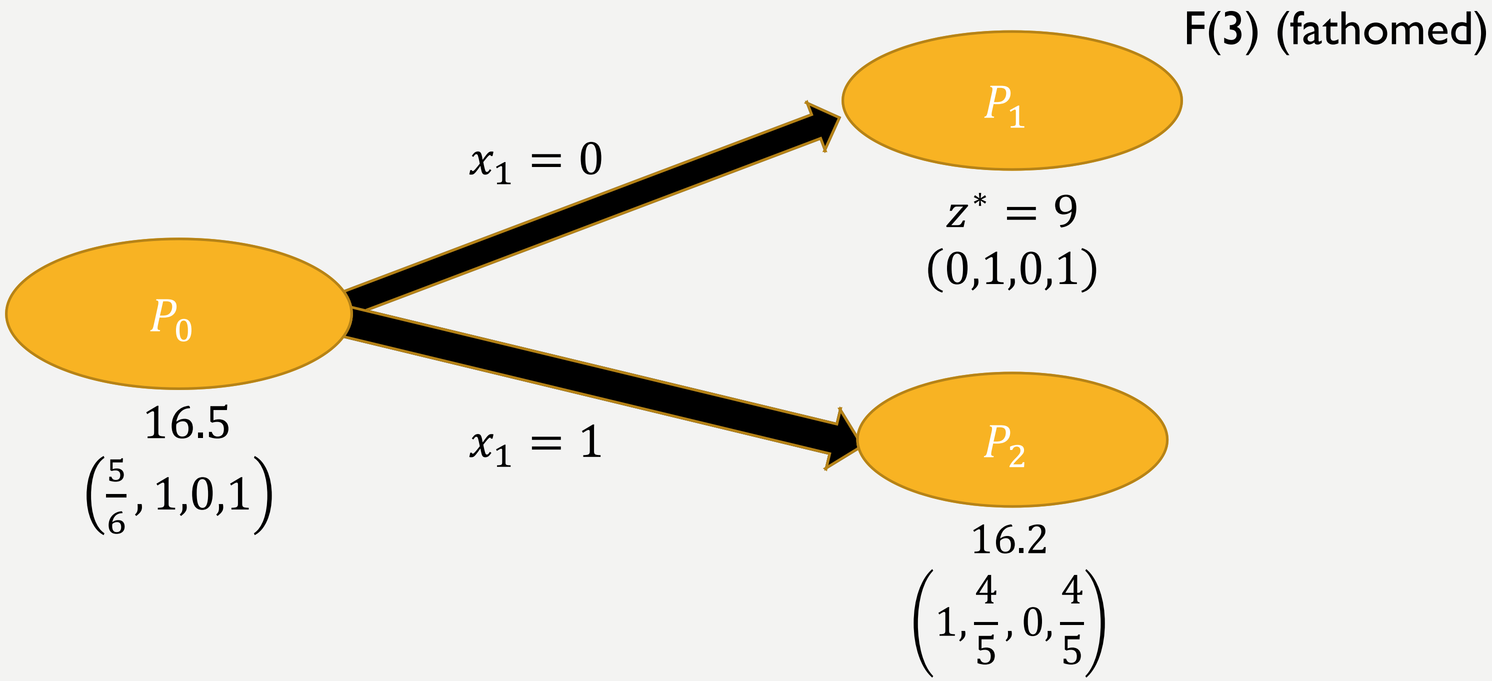
tale sotto-problema può essere tagliato via (fathomed) da ulteriori considerazioni

➢ Per il sotto-problema 2 non viene soddisfatto nessuno dei criteri di fathoming. Infatti:

- $z_2 = 16.2 \geq z^* = 9$
- il rilassamento lineare ha soluzione ammissibili
- la soluzione ottima del rilassamento lineare ha le componenti di $x_2$ e $x_3$ non intere

# albero delle soluzioni e test di ottimalità

- Otteniamo il seguente albero delle soluzioni




- **test di ottimalità**: poiché vi è ancora un sotto-problema (il 2) la soluzione incombente potrebbe non essere ottima e bisogna eseguire un ulteriore iterazione del B & B

# iterazione 2: branching

- Generariamo a partire dal problema $P_2$ due nuovi sotto-problemi $P_3$ e $P_4$ fissando la variabile di branching $x_2$ a $x_2 = 0$ oppure $x_2 = 1$

$P_2$

$$\max z = 9 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 4 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_3 \le 1 \\ x_4 \le x_2 \\ x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$x_2 = 0$

$$\max z = 9 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 5x_3 + 2x_4 \le 10 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_3 \le 1 \\ x_4 \le 0 \\ x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$P_3$

$x_2 = 1$

$$\max z = 14 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 5x_3 + 2x_4 \le 1 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_3 \le 1 \\ x_4 \le 1 \\ x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$P_4$

# iterazione 2: bounding

- Per ogni nuovo sotto-problema, consideriamo il rispettivo rilassamento lineare…

$P_3$

$$\max z = 9 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 5x_3 + 2x_4 \le 10 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_3 \le 1 \\ x_4 \le 0 \\ x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$P_3$ rilassato

$$\max z = 9 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 5x_3 + 2x_4 \le 10 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_4 \le 0 \\ x_3, x_4 \le 1 \\ x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$P_4$

$$\max z = 14 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 5x_3 + 2x_4 \le 1 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_3 \le 1 \\ x_4 \le 1 \\ x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$P_4$ rilassato

$$\max z = 14 + 6x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 5x_3 + 2x_4 \le 1 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ x_3 \le 1 \\ x_4 \le 1 \\ x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

- …ed applichiamo il metodo del simplesso per stimare un bound per ogni sotto-problema
  - La soluzione del problema $P_3$ rilassato è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1{,}0, \frac{4}{5}, 1\right)$ con $z_3 = 13.2$
  - La soluzione del problema $P_4$ rilassato è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1{,}1, 0, \frac{1}{2}\right)$ con $z_4 = 16$

# iterazione 2: fathoming

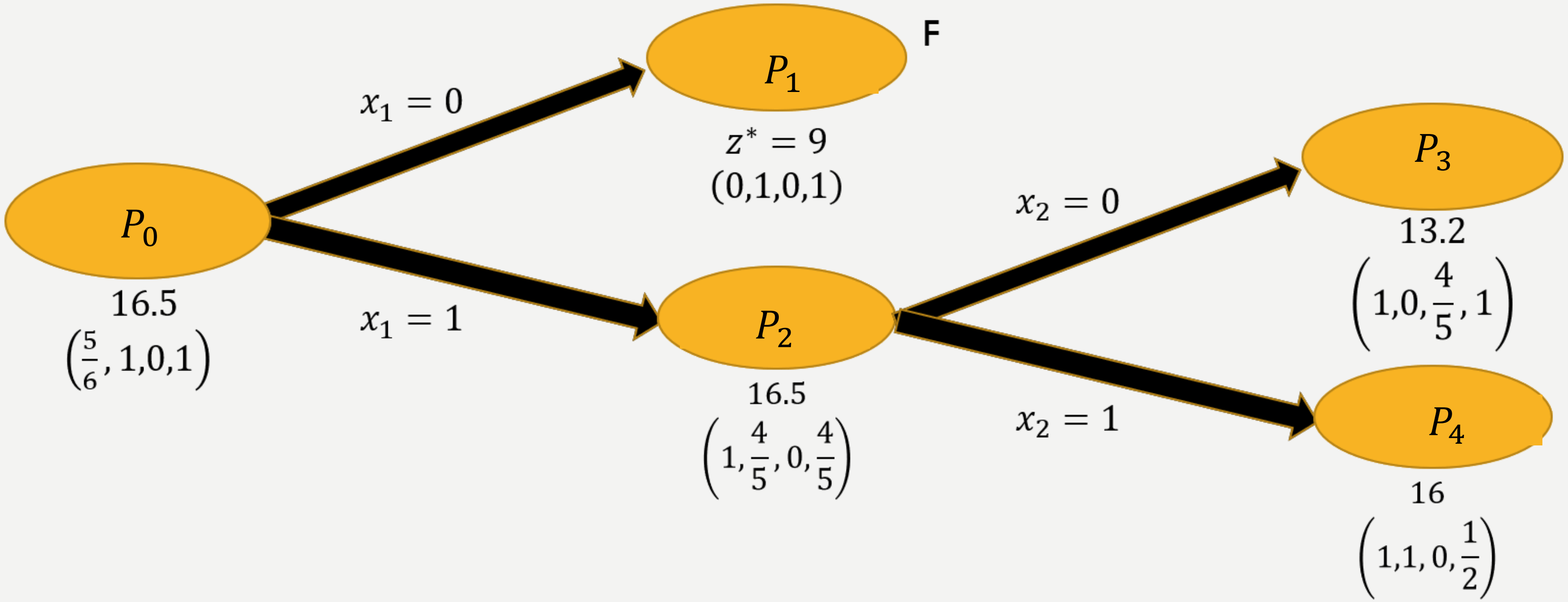
- La soluzione del problema $P_3$ rilassato è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1,0,\frac{4}{5},1\right)$ con $z_3 = 13.2$
- La soluzione del problema $P_4$ rilassato è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1,1,0,\frac{1}{2}\right)$ con $z_4 = 16$

➢ Il sotto-problema 3 non soddisfa nessuno dei criteri di fathoming
  - il bound è maggiore di $z^*$
  - il rilassamento lineare ha soluzioni ammissibili
  - la soluzione ottima del rilassamento lineare non è intera

➢ Il sotto-problema 4 non soddisfa nessuno dei criteri di fathoming
  - il bound è maggiore di $z^*$
  - il rilassamento lineare ha soluzioni ammissibili
  - la soluzione ottima del rilassamento lineare non è intera

# albero delle soluzioni e test di ottimalità

- Otteniamo il seguente albero delle soluzioni




- **test di ottimalità**: poiché vi sono ancora due sotto-problemi (il 3 ed il 4) la soluzione incombente non è ottima e bisogna eseguire un ulteriore iterazione del B & B

# iterazione 3: branching

- I sotto-problemi 3 e 4 sono stati generati contemporaneamente, ma il sotto-problema 4 ha un bound migliore $(16 > 13)$ del sotto-problema 3 $(16 > 13)$

- Generariamo a partire dal problema $P_4$ due nuovi sotto-problemi $P_5$ e $P_6$ fissando la variabile di branching $x_4$ a $x_4 = 0$ oppure $x_4 = 1$ ($x_3$ è già intera!)

$P_4$

$$\max z = 14 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} 5x_3 + 2x_4 \leq 1 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_3 \leq 1 \\ x_4 \leq 1 \\ x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$x_4 = 0$

$P_5$

$$\max z = 14 + 6x_3$$

$$\begin{cases} 5x_3 \leq 1 \\ x_3 \leq 1 \\ x_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$x_4 = 1$

$P_6$

$$\max z = 18 + 6x_3$$

$$\begin{cases} 5x_3 \leq -1 \\ x_3 \leq 0 \\ x_3 \leq 1 \\ x_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

# iterazione 3: bounding

- Per ogni nuovo sotto-problema, consideriamo il rispettivo rilassamento lineare…

$P_5$

$$\max z = 14 + 6x_3$$
$$\begin{cases} 5x_3 \leq 1 \\ x_3 \leq 1 \\ x_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$P_5$ rilassato

$$\max z = 14 + 6x_3$$
$$\begin{cases} 5x_3 \leq 1 \\ x_3 \leq 1 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$P_6$

$$\max z = 18 + 6x_3$$
$$\begin{cases} 5x_3 \leq -1 \\ x_3 \leq 0 \\ x_3 \leq 1 \\ x_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$P_6$ rilassato

$$\max z = 18 + 6x_3$$
$$\begin{cases} 5x_3 \leq -1 \\ x_3 \leq 0 \\ x_3 \leq 1 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- La soluzione del problema $P_5$ rilassato è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,0,0)$ con $z_5 = 14$
- Il problema $P_6$ non ha invece alcuna soluzione ammissibile (essendo $5x_3 \leq -1$e $x_3 \geq 0$)

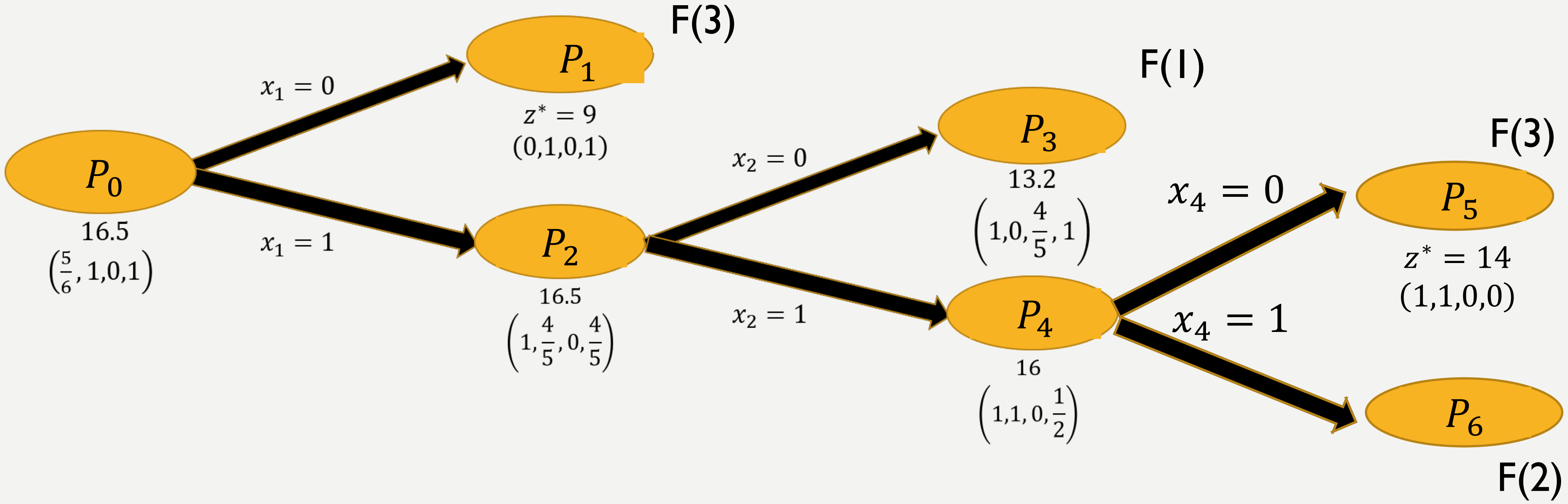
# iterazione 3: fathoming

- La soluzione del problema $P_5$ rilassato è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,0,0)$ con $z_5 = 14$
- Il problema $P_6$ non ha invece alcuna soluzione ammissibile (essendo $5x_3 \leq -1$e $x_3 \geq 0$)

- Il sotto-problema 6 soddisfa uno dei criteri di fathoming. Infatti il rilassamento lineare non ha soluzioni ammissibili
- Il sotto-problema 5 soddisfa uno dei criteri di fathoming
  - la soluzione ottima del suo rilassamento lineare è intera
  - tale soluzione è migliore di quella incombente (infatti $z = 14 > 9$) Quindi essa diventa la nuova soluzione incombente con $z^* = 14$
  - tale sotto-problema può essere tagliato via (fathomed) da ulteriori considerazioni
- Anche il sotto problema 3 ORA soddisfa uno dei criteri di fathoming. Infatti bound=13$\leq z^* = 14$

# albero delle soluzioni e test di ottimalità

- Otteniamo il seguente albero delle soluzioni

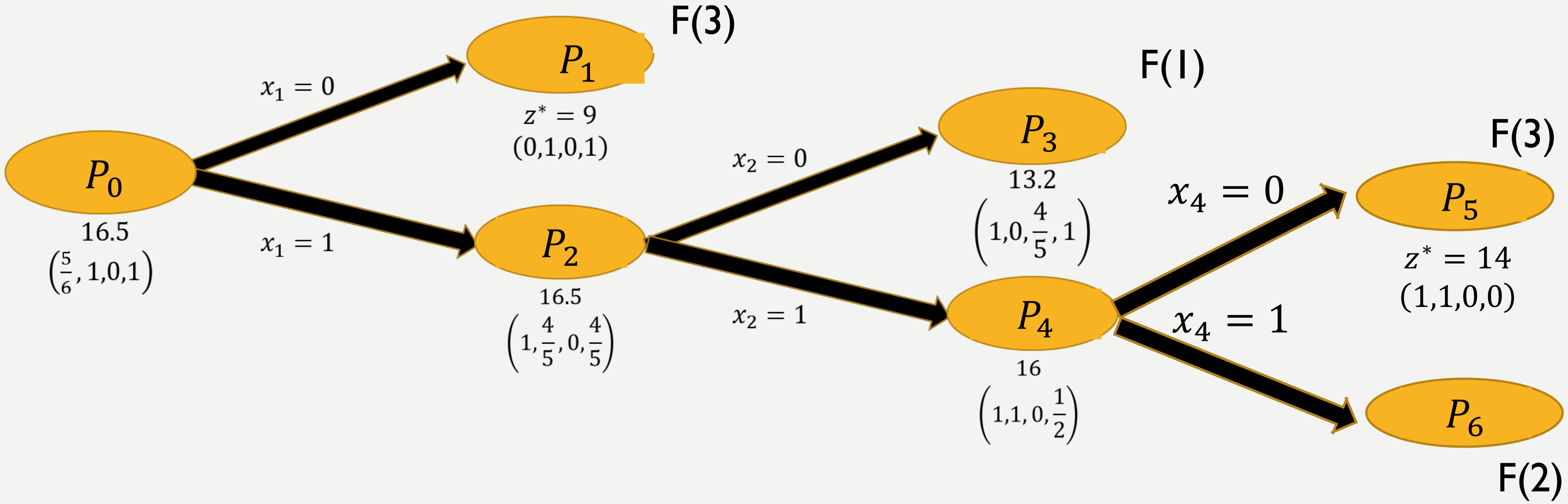



- **test di ottimalità**: non vi sono più sotto-problemi. Quindi la soluzione incombente trovata è ottima
  - La soluzione ottima del problema è $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,0,0)$ con $z = 14$

# Riassumendo…

- 3 iterazioni del metodo del Branch and Bound

- 7 sotto-problemi generati (compreso il problema originale) di cui:
  - 1 sotto-problema è stato tagliato in quanto il suo bound era minore della soluzione incombente F(1)
  - 1 sotto-problema è stato tagliato a causa della non-ammissibilità del rilassamento lineare F(2)
  - 2 sotto-problemi sono stati tagliati in quando la soluzione ottima del problema rilassato era intera F(3)



# B & B per un problema PLM

- Consideriamo il seguente problema PLM

$$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$$

soggetto ai seguenti vincoli:

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$

- Notiamo che abbiamo 4 variabili di cui tre intere ed una sola continua

# Inizializzazione

**Inizializzazione**: Poniamo $z^* = -\infty$. Consideriamo il rilassamento lineare per il problema iniziale $P_0$

$P_0$

$$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$$

soggetto ai seguenti vincoli:

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$

$P_0$ rilassato

$$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$$

soggetto ai seguenti vincoli:

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

- **bounding**: Usando il metodo del simplesso otteniamo la soluzione $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 0\right)$ con $z_0 = 14.5$
- **fathoming**: il «sotto-problema» non rispetta nessuno dei tre criteri di fathoming. Infatti:
  - $z^* = -\infty$
  - il rilassamento lineare ha soluzione ammissibili
  - la soluzione ottima del rilassamento lineare ha le componenti di $x_1, x_2$ e $x_3$ non intere
- **test di ottimalità**: Ho un sotto-problema (il problema di partenza)
  → test non superato! Devo eseguire un iterazione del B & B

# iterazione 1: branching

- La soluzione del rilassamento lineare di $P_0$ è $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 0\right)$ e $x_1, x_2, x_3$ DEVONO essere intere

- Generariamo a partire dal problema $P_0$ due nuovi sotto-problemi $P_1$ e $P_2$ considerando i due seguenti intervalli per la variabile di branching $x_1$:
  - $P_1$: $x_1 \leq \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor \rightarrow x_1 \leq 1$
  - $P_2$: $x_1 \geq \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor + 1 \rightarrow x_1 \geq 2$

$P_0$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$x_1 \leq 1$

$P_1$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \leq 1$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$

$x_1 \geq 2$

$P_2$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \geq 2$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$

# iterazione 1: bounding

- Per ogni nuovo sotto-problema, consideriamo il rispettivo rilassamento lineare…

$P_1$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \leq 1$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$

$P_2$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \geq 2$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$

$P_1$ rilassato

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \leq 1$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$P_2$ rilassato

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_2 \geq 2$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

- …ed applichiamo il metodo del simplesso per stimare un bound per ogni sotto-problema
  - $\boldsymbol{P_1}$ **rilassato**: La soluzione del problema è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, 0\right)$ con $z_1 = 14.2$
  - $\boldsymbol{P_2}$ **rilassato**: Il problema $P_2$ rilassato non ha soluzioni ammissibili

# iterazione 1 : fathoming

- $\boldsymbol{P_1}$ **rilassato**: La soluzione del problema è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, 0\right)$ con $z_1 = 14.2$

- $\boldsymbol{P_2}$ **rilassato**: Il problema $P_2$ rilassato non ha soluzioni ammissibili

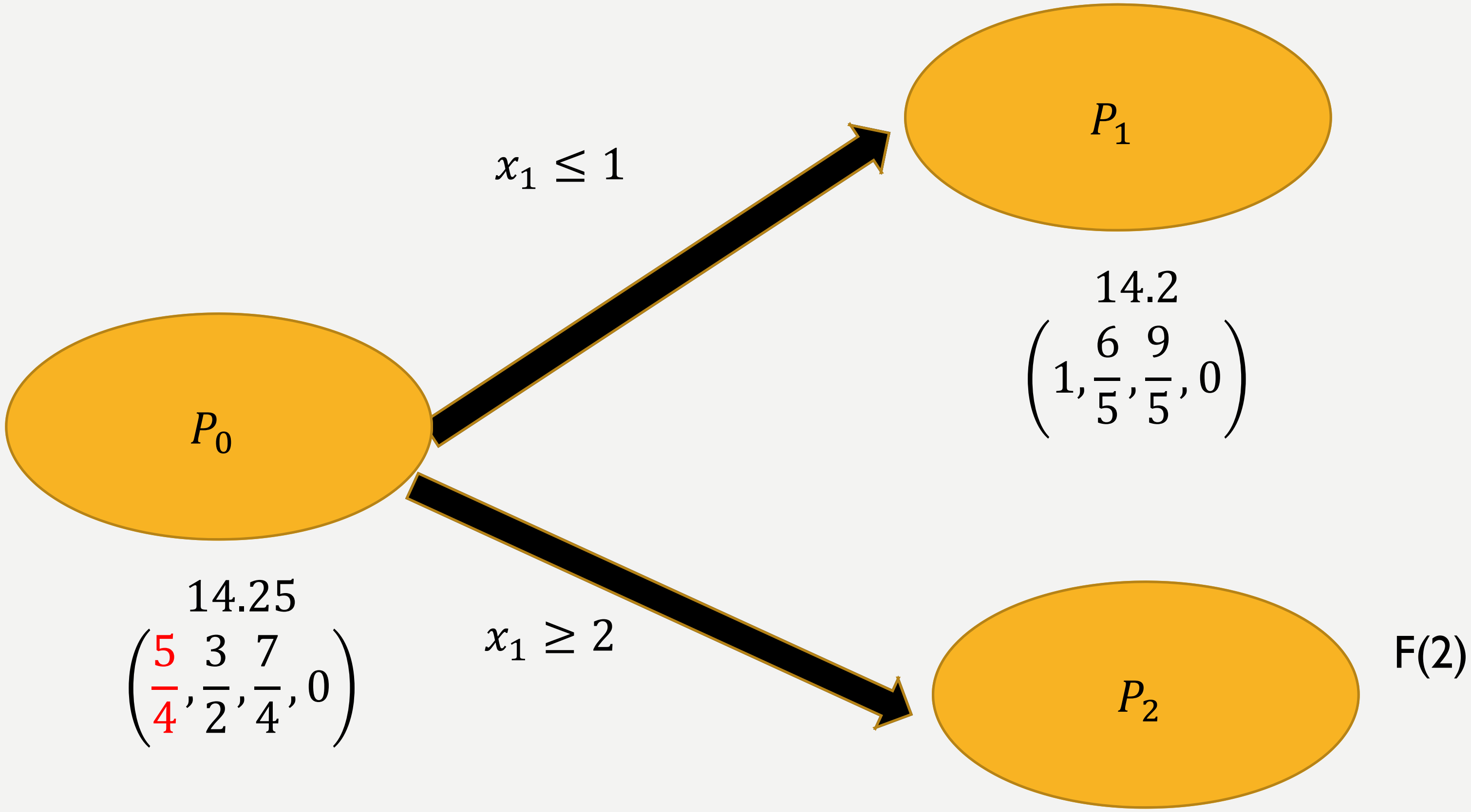
⬇

- ➢ Per il sotto-problema 1 abbiamo che:
  - $z^* = -\infty$
  - il rilassamento lineare ha soluzione ammissibili
  - la soluzione ottima del rilassamento lineare ha le componenti di $x_2$ e $x_3$ non intere

- ➢ Per il sotto-problema 2 abbiamo che il rilassamento lineare non ha soluzioni ammissibili,
  →soddisfa il secondo criterio di fathoming e può essere tagliato via

# Nuovo albero delle soluzioni e test di ottimalità

- Otteniamo il seguente albero delle soluzioni




- **test di ottimalità**: Poiché vi è ancora 1 sotto-problema (il numero 1) la soluzione incombente non è ottima e bisogna eseguire un ulteriore iterazione del B & B

# iterazione 2: branching

- La soluzione del rilassamento lineare di $P_1$ è $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, 0\right)$ e $x_1, x_2, x_3$ DEVONO essere intere

- Selezioniamo $x_2$ come variabile di branching considerando i due seguenti intervalli per generare due nuovi sotto-problemi $P_3$ e $P_4$:
  - $P_3$: $x_3 \leq \left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor \rightarrow x_2 \leq 1$
  - $P_4$: $x_4 \geq \left\lfloor \frac{9}{5} \right\rfloor + 1 \rightarrow x_2 \geq 2$

$P_1$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_2 \leq 1$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$

$x_2 \leq 1$

$P_3$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \leq 1$
- $x_2 \leq 1$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_3 \in \mathbb{Z}$

$x_2 \geq 2$

$P_4$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \geq 2$
- $x_2 \geq 2$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_3 \in \mathbb{Z}$

# iterazione 2: bounding

- Per ogni nuovo sotto-problema, consideriamo il rispettivo rilassamento lineare…

$P_3$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$
- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \leq 1$
- $x_2 \leq 1$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_3 \in \mathbb{Z}$

$P_3$ rilassato

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$
- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \leq 1$
- $x_2 \leq 1$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$P_4$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$
- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \geq 2$
- $x_2 \geq 2$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_3 \in \mathbb{Z}$

$P_4$ rilassato

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$
- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \geq 2$
- $x_2 \geq 2$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

- …ed applichiamo il metodo del simplesso per stimare un bound per ogni sotto-problema
  - **$P_3$ rilassato**: La soluzione del problema è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5}{6}, 1, \frac{11}{5}, 0\right)$ con $z_3 = 14.1\bar{6}$
  - **$P_4$ rilassato**: La soluzione del problema è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5}{6}, 2, \frac{11}{6}, 0\right)$ con $z_3 = 12.1\bar{6}$

# iterazione 2 : fathoming

- $\boldsymbol{P_3}$ **rilassato**: La soluzione del problema è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5}{6}, 1, \frac{11}{5}, 0\right)$ con $z_3 = 14.1\overline{6}$
- $\boldsymbol{P_4}$ **rilassato**: La soluzione del problema è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5}{6}, 2, \frac{11}{6}, 0\right)$ con $z_4 = 12.1\overline{6}$
- Attualmente si ha $z^* = -\infty$

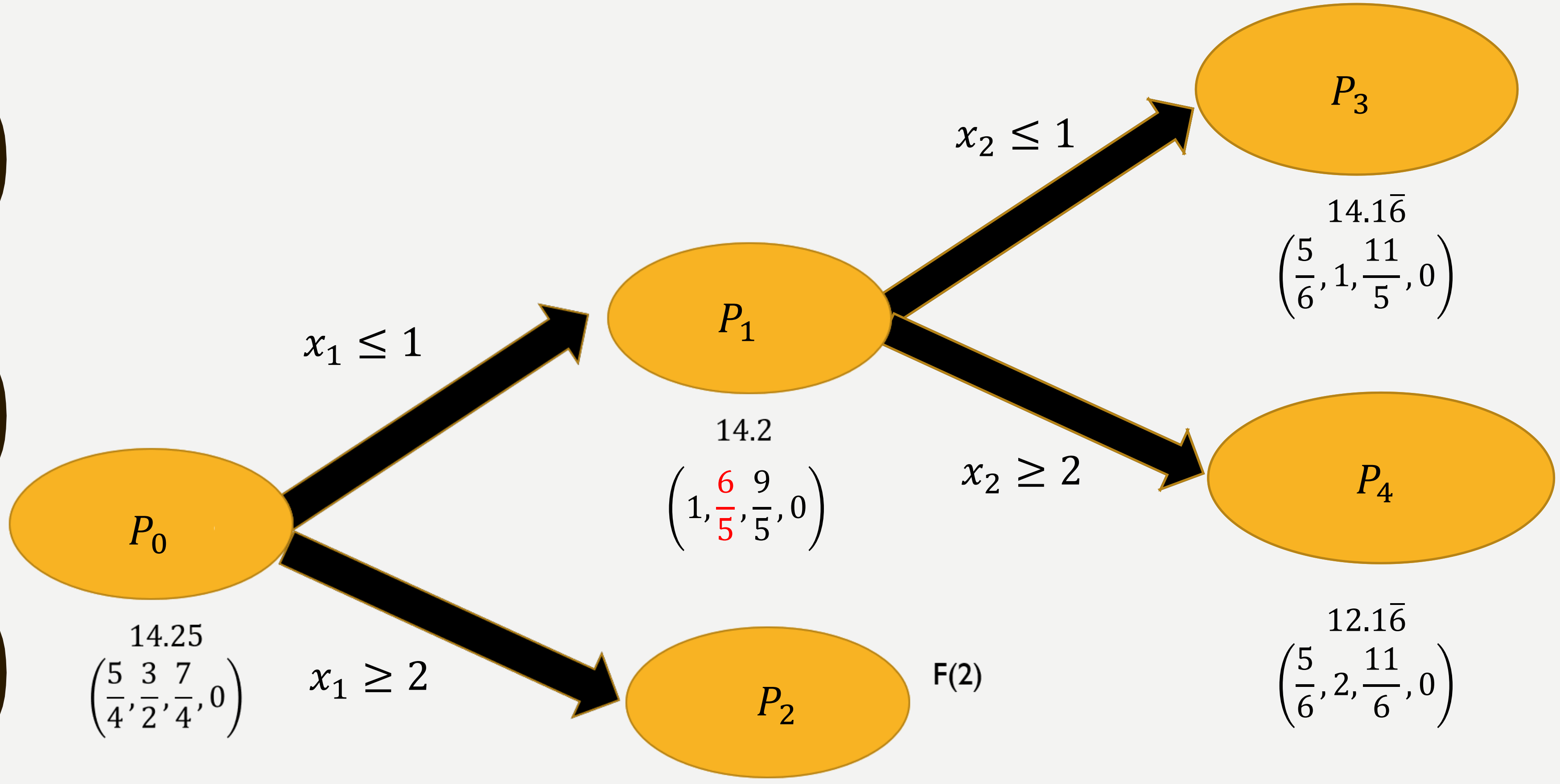
➢ Per il sotto-problema 3 abbiamo che:
  - $z^* = -\infty$
  - il rilassamento lineare ha soluzione ammissibili
  - la soluzione ottima del rilassamento lineare ha le componenti di $x_1$ e $x_3$ non intere

➢ Per il sotto-problema 4 abbiamo che:
  - $z^* = -\infty$
  - il rilassamento lineare ha soluzione ammissibili
  - la soluzione ottima del rilassamento lineare ha le componenti di $x_1$ e $x_3$ non intere

→Possiamo applicare Branching nei due nuovi problemi!

# Nuovo albero delle soluzioni e test di ottimalità

- Otteniamo il seguente albero delle soluzioni




- **test di ottimalità**: Poiché vi sono ancora 2 sotto-problemi (il 3 ed il 4) la soluzione incombente non è ottima e bisogna eseguire un ulteriore iterazione del B & B

# iterazione 3: branching

- Abbiamo due sotto-problemi rimanenti (3 e 4) generati simultaneamente
  → selezioniamo il sotto-problema 3 per l'operazione di branching essendo $z_3 = 14.1\bar{6} > z_4 = 12.1\bar{6}$

- La soluzione del rilassamento lineare di $P_3$ è $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5}{6}, 1, \frac{11}{5}, 0\right)$ e $x_1, x_2, x_3$ DEVONO essere intere

- Selezioniamo $x_1$ come «nuova» variabile di branching considerando i due seguenti intervalli per generare due nuovi sotto-problemi $P_5$ e $P_6$:
  - $P_5$: $x_1 \leq \left\lfloor \frac{5}{6} \right\rfloor \rightarrow x_1 \leq 0$
  - $P_6$: $x_2 \geq \left\lfloor \frac{5}{6} \right\rfloor + 1 \rightarrow x_1 \geq 1$

$P_3$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$

- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 \leq 1$
- $x_2 \leq 1$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_3 \in \mathbb{Z}$

$x_1 \leq 0$ → Problema $P_3$ con l'aggiunta di $x_1 \leq 0$

$x_1 \geq 1$ → Problema $P_3$ con l'aggiunta di $x_1 \geq 1$

# iterazione 3: bounding

- Per ogni nuovo sotto-problema, consideriamo il rispettivo rilassamento lineare…

$P_5$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$
- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 = 0$
- $x_2 \leq 1$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$

$P_6$

$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$
- $x_1 + 5x_3 \leq 10$
- $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$
- $6x_1 - 5x_2 \leq 0$
- $-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 = 1$
- $x_2 \geq 2$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$

$P_5$ rilassato

$\max z = -2x_2 + 7x_3 - x_4$
- $5x_3 \leq 10$
- $x_2 - x_3 \leq 1$
- $-5x_2 \leq 0$
- $2x_3 - 2x_4 \leq 3$
- $x_1 = 0$
- $x_2 \leq 1$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$P_6$ rilassato

$\max z = 4 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$
- $5x_3 \leq 9$
- $x_2 - x_3 \leq 0$
- $-5x_2 \leq -5$
- $2x_3 - 2x_4 \leq 4$
- $x_1 = 1$
- $x_2 \geq 2$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

- …ed applichiamo il metodo del simplesso per stimare un bound per ogni sotto-problema
  - **$P_5$ rilassato**: La soluzione del problema è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0,0,2,\frac{1}{2}\right)$ con $z_5 = 13.5$
  - **$P_6$ rilassato**: Il problema non ha soluzioni ammissibili

# iterazione 3 : fathoming

- $\boldsymbol{P_5}$ **rilassato**: La soluzione del problema è data da $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0,0,2,\frac{1}{2}\right)$ con $z_5 = 13.5$
- $\boldsymbol{P_6}$ **rilassato**: Il problema non ha soluzioni ammissibili
- Attualmente si ha $z^* = -\infty$

- Per il sotto-problema 5 abbiamo che:
  - la soluzione ottima del rilassamento lineare ha le componenti di $x_1$ $x_2$ e $x_3$ intere quindi può essere tagliato via
  - inoltre essendo $z_5 = 13.5 \geq z^* = -\infty$ questa diventa la nuova (e prima) soluzione incombente e $z^* = 13.5$

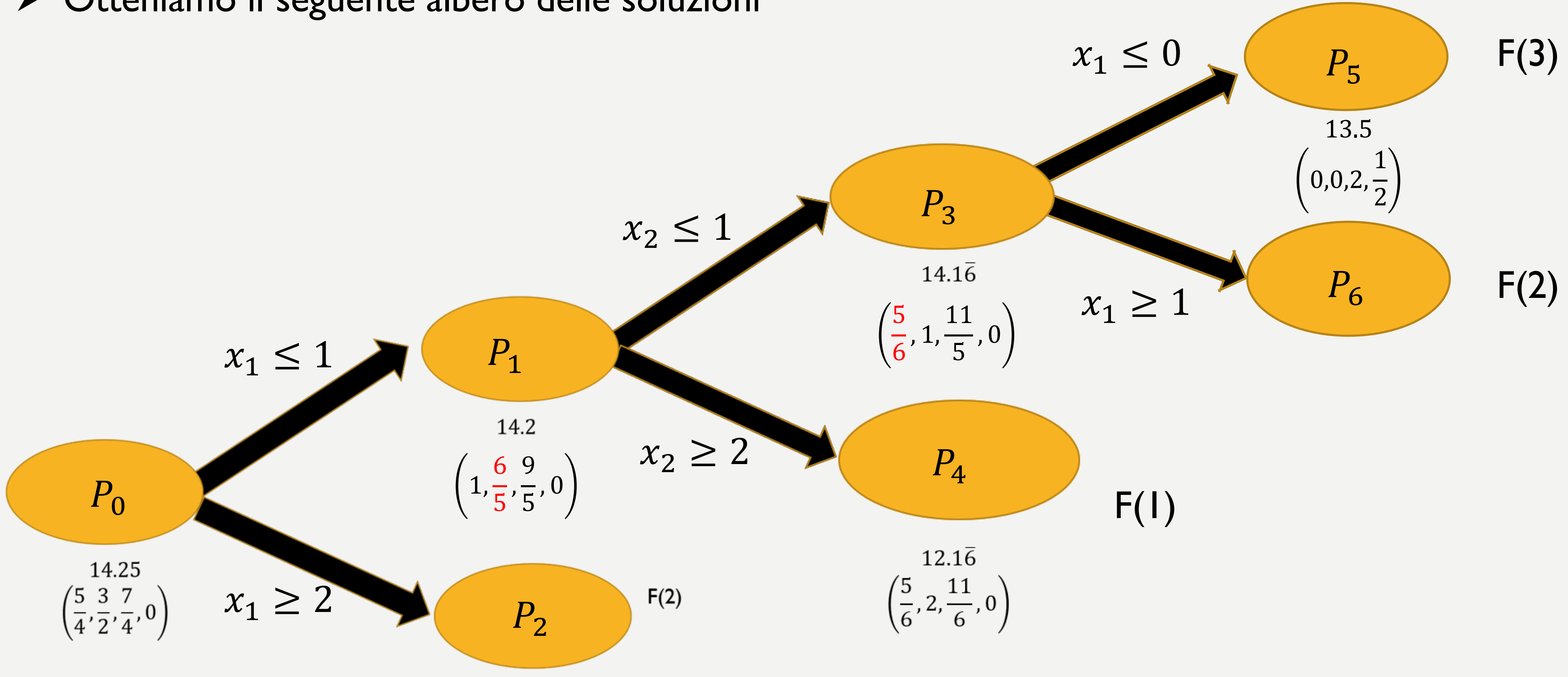
- Il sotto-problema 6 non ha soluzione ammissibili e può quindi essere tagliato

- Il sotto-problema 4 può essere escluso ora in quando $z_4 \leq z^* = 13.5$

→Abbiamo ora che tutti e tre i sotto-problemi sono eliminati!!!

# Nuovo albero delle soluzioni e test di ottimalità

- Otteniamo il seguente albero delle soluzioni




- **test di ottimalità**: Poiché non vi sono sotto-problemi aperti allora l'attuale soluzione incombente è la soluzione ottima del problema

# Riassumendo...

- 3 iterazioni del metodo del Branch and Bound

- 7 sotto-problemi generati (compreso il problema originale) di cui:
  - 1 sotto-problema è stato tagliato poiché il suo bound non è migliore di $z^*$ F(1)
  - 2 sotto-problemi sono stati tagliati a causa della non-ammissibilità del rilassamento lineare F(2)
  - 1 sotto-problema è stato tagliato in quanto la soluzione ottima del rilassamento ha $x_1, x_2$ e $x_3$ interi F(3)