

Codifica dei numeri

Codifica dei numeri

Come si rappresentano in un elaboratore digitale

- Numeri naturali
- Numeri interi
- Numeri reali

Numeri naturali

Numeri naturali in varie basi

250 in base 10, in base 2 e in base 16 ($A=10$, $B=11$, $C=12$, ... $F=15$):

$$(250)_{10} = (11111010)_2 = (FA)_{16}$$

Esponente	2	1	0
	2	5	0

 $2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 0 \times 10^0$

Base 10 10 10

Esponente	7	6	5	4	3	2	1	0
	1	1	1	1	1	0	1	0

 $1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

Base 2 2 2 2 2 2 2 2

Esponente	1	0
	F	A

 $15 \times 16^1 + 10 \times 16^0$

Base 16 16

Numeri naturali in un elaboratore digitale



unimc

In un elaboratore digitale, i numeri naturali sono rappresentati dalla loro conversione in binario

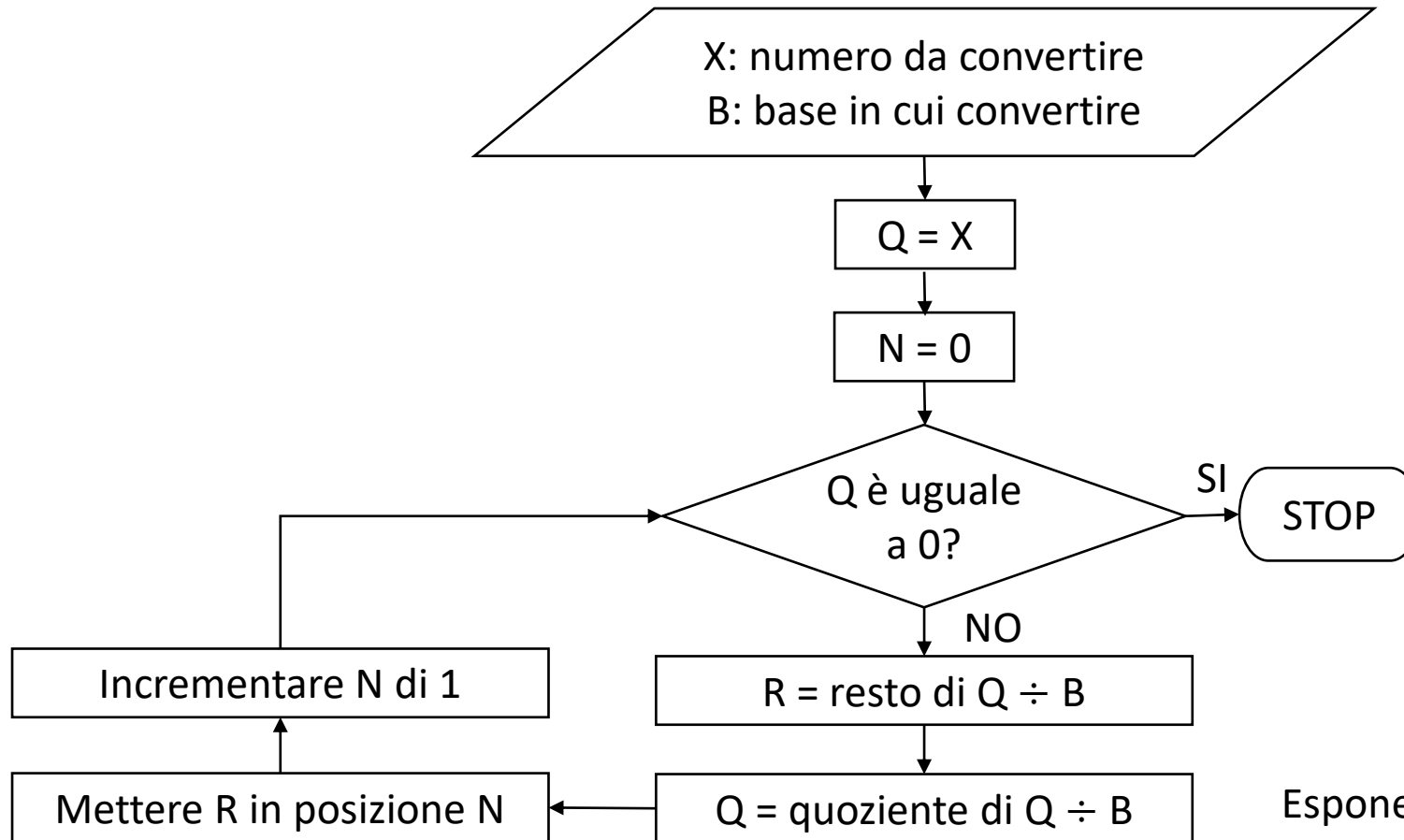
Come convertire un numero da base 10 ad un'altra base B ?

Algoritmo di conversione

Dati in ingresso un numero X (in base 10) da convertire e una base B in cui convertire

1. Assegna X ad una variabile Q
2. Assegna ad un contatore N il valore 0
3. Se Q è uguale a zero ferma l'algoritmo, altrimenti esegui i passi 3a – 3f
 - a) Assegna ad una variabile R il resto della divisione di Q per B
 - b) Metti R in posizione N nel numero in base B prodotto dall'algoritmo
 - c) Incrementa N di 1
 - d) Assegna a Q il quoziente di Q diviso B
 - e) Torna al passo 3

Algoritmo di conversione



Esponente (N)	7	6	5	4	3	2	1	0
	1	1	1	1	1	0	1	0
Base (B)	2	2	2	2	2	2	2	2

Esempio - Metodo «pratico»

Conversione in base due del numero 13 in base dieci

$$13 : 2 = 6 \text{ resto } 1$$

$$6 : 2 = 3 \text{ resto } 0$$

$$3 : 2 = 1 \text{ resto } 1$$

$$1 : 2 = 0 \text{ resto } 1 \rightarrow \textbf{STOP} \text{ (Poiché il quoziente è 0)}$$

La conversione binaria di 13 possiamo ottenerla scrivendo da sinistra a destra i resti presi dal basso verso l'alto

$$(13)_{10} = (1101)_2$$

Esempio - Metodo «pratico» - Prova

Come prova convertiamo 1101 da base due a base dieci. La posizione di ogni bit da destra verso sinistra ci informa dell'esponente da applicare alla base 2, a partire da zero.

$$\begin{aligned}(1101)_2 &= (1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0)_{10} = \\ &= (8 + 4 + 0 + 1)_{10} = (13)_{10}\end{aligned}$$

$$(1101)_2 = (13)_{10}$$

Aritmetica modulare – Modulo 2^N

I numeri naturali sono infiniti, ma la memoria di un elaboratore digitale è finita!

Posto che riserviamo N bit per rappresentare i numeri naturali in un elaboratore digitale, possiamo rappresentare qualunque numero naturale M con la convenzione «modulo 2^N »

$$|M|_{2^N}$$

Se $M_1 = k2^N + M$, con k numero intero, allora $|M_1|_{2^N} = |M|_{2^N}$

In altre parole, se due numeri differiscono di un multiplo di 2^N , allora hanno la stessa rappresentazione.

Modulo 2^N – Esempio

Supponiamo di lavorare con $N = 3$, cioè con 3 bit. In questo caso $2^N = 2^3 = 8$

Dec	Bin	Dec	Bin	Dec	Bin
0	000	8	000	16	000
1	001	9	001	17	001
2	010	10	010	18	010
3	011	11	011	19	011
4	100	12	100	20	100
5	101	13	101	21	101
6	110	14	110	22	110
7	111	15	111	23	111

Addizione numeri naturali

L'addizione segue le regole dell'aritmetica come in base 10!

Supponiamo di dover sommare due numeri naturali X e Y (la loro somma sarà S).

- x_i e y_i rappresentano i bit di X e Y in posizione i
- s_i rappresenta il bit di S in posizione i
- r_i rappresenta il bit del riporto in posizione i

Addizione numeri naturali

	N-1	...	5	4	3	2	1	0	
<i>x</i>	1	...	1	1	1	0	1	0	+
<i>y</i>	0	...	1	1	1	0	1	0	=
<i>s</i>	?	...	1	1	0	1	0	0	

x_i	y_i	r_i
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

s_i	r_{i+1}
0	0
1	0
1	0
0	1
1	0
0	1
0	1
1	1

Sottrazione numeri naturali

Anche la sottrazione seguirebbe le stesse regole della base 10 ma...

Considerando che

- $2^N - 1 - Y$ è il complemento a 1 di Y , cioè il numero risultante dall'inversione dei bit di Y (gli 0 diventano 1 e viceversa)
- $D = |X - Y|_{2^N} = |X - Y + 2^N|_{2^N} = |1 + X - Y + 2^N - 1|_{2^N} = |1 + X + \textit{compl}_1(Y)|_{2^N}$

La sottrazione $X - Y$ può essere implementata come somma di X e del complemento a 1 di Y , più 1. Gli stessi circuiti per l'addizione possono essere usati per la sottrazione.

Numeri interi

Numeri interi in un elaboratore digitale

Come rappresentare i numeri interi {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} in un elaboratore digitale?

La soluzione più semplice sarebbe quella di codificarli esattamente come i numeri naturali, riservando il bit più a sinistra per rappresentare il segno (0 = positivo, 1 = negativo).

Questa codifica è detta modulo e segno e consiste nell'usare un bit per il segno, lasciando gli altri bit a rappresentare il valore assoluto del numero intero...



Modulo e segno

Tale codifica però include una doppia rappresentazione dello 0 che può essere fonte di ambiguità.

Per questo, la codifica in modulo e segno, che sarebbe esprimibile come

$$\text{codifica}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ |x| + 2^{N-1} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

non viene usata. La tabella a lato mostra la codifica modulo e segno con 4 bit ($N = 4$)

Decimale	Mod e segno
7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000
-0	1000
-1	1001
-2	1010
-3	1011
-4	1100
-5	1101
-6	1110
-7	1111
-8	-

Numeri interi in un elaboratore digitale

Come rappresentare i numeri interi {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} in un elaboratore digitale?

Un'altra soluzione sarebbe codificare gli interi positivi come i numeri naturali e i numeri negativi come il complemento a 1 (cioè l'inversione di tutti i bit) dei positivi.

Es: 4 potrebbe essere codificato come 0100, mentre -4 come 1011



Complemento a 1

Anche tale codifica però include una doppia rappresentazione dello 0 che può essere fonte di ambiguità.

Nemmeno la codifica basata sul complemento è adatta per rappresentare i numeri interi in un elaboratore digitale

Decimale	Compl. a 1
7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000
-0	1111
-1	1110
-2	1101
-3	1100
-4	1011
-5	1010
-6	1001
-7	1000
-8	-

Numeri interi in un elaboratore digitale

Come rappresentare i numeri interi {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} in un elaboratore digitale?

Una soluzione al problema delle codifiche in modulo e segno e in complemento a 1 è traslare verso l'alto tutti i valori che possono essere inclusi su N bit.

$$\text{codifica}(x) = \begin{cases} 2^{N-1} + |x| & \text{se } x \geq 0 \\ 2^{N-1} - |x| & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

In questo modo la codifica non è più ambigua: sia 0 che -0 sono rappresentati come 2^{N-1}



Traslazione

Un metodo «intuitivo» è partire a contare dal minimo numero rappresentabile (con $N = 4$ bit tale numero è -8) e ad ogni incremento si aggiunge 1 (-8 = 0000, -7 = 0001, -6 = 0010, ...).

Tuttavia, la somma algebrica di due numeri traslati non è la traslazione della somma

$$\begin{array}{r} 2 + \\ -3 = \\ \hline -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1010 + \\ 0101 = \\ \hline 1111 \end{array}$$

1111 non è la codifica in traslazione di -1! Nemmeno questa codifica si usa per gli interi.

Decimale	Traslazione
7	1111
6	1110
5	1101
4	1100
3	1011
2	1010
1	1001
0	1000
-0	1000
-1	0111
-2	0110
-3	0101
-4	0100
-5	0011
-6	0010
-7	0001
-8	0000

Numeri interi in un elaboratore digitale

Come rappresentare i numeri interi {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} in un elaboratore digitale?

I numeri interi in un elaboratore digitale sono universalmente rappresentati con la codifica in «complemento a 2», definita come segue

$$\text{codifica}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 2^N - |x| & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

In altre parole, su N bit, gli interi positivi sono rappresentati esattamente come i naturali, gli interi negativi sono rappresentati come $2^N - |x|$



Complemento a 2

Si noti che su 4 bit ($N = 4$) nel caso di «-0» la rappresentazione sarebbe $2^N - |x|$ e cioè $(16)_{10} = (10000)_2$.

Tuttavia, non c'è posto per il bit più a sinistra. Dunque -0 continua ad essere 0000 (si ricordi l'aritmetica modulare...).

Inoltre la somma algebrica di due numeri in complemento a 2 restituisce il risultato già correttamente codificato!

Decimale	Compl. a 2
7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000
-0	0000
-1	1111
-2	1110
-3	1101
-4	1100
-5	1011
-6	1010
-7	1001
-8	1000

Complemento a 2

- Se R_x e R_y sono le rappresentazioni ad N bit in complemento a 2 di due numeri interi x ed y , allora la rappresentazione della loro somma s è data da

$$R_s = |R_x + R_y|_{2^N}$$

- Analogamente, la loro differenza d è data da

$$R_d = |R_x - R_y|_{2^N}$$

- In altre parole, i circuiti che servono a compiere operazioni di addizione e sottrazione fra numeri naturali sono utilizzabili anche per compiere le stesse operazioni fra numeri interi.

Per questo motivo i numeri interi sono universalmente rappresentati nei calcolatori in complemento a 2.

Complemento a 2

C'è un metodo intuitivo per calcolare il complemento a 2 di un intero negativo. Data la rappresentazione binaria di un numero positivo

- Esamino il numero bit per bit da destra verso sinistra
- Per scrivere il complemento a 2 del numero negativo lascio ogni bit invariato fino al primo 1 compreso
- Inverto tutti i bit che seguono il primo 1 da destra verso sinistra.

Complemento a 2 – Esempio

Esempio: -2 rappresentato su 4 bit ($N = 4$)

- L'intero positivo $(2)_{10}$ in base due vale $(0010)_2$
- Applicando da destra verso sinistra quanto spiegato nella slide precedente per il «complemento a 2» in un elaboratore digitale si ha che $(-2)_{10} = (1110)_2$. Applicando a 0010 passaggio per passaggio quanto descritto:

—	—	—	0
—	—	1	0
—	1	1	0
1	1	1	0

Complemento a 2 - Esempio

Esempio: -5 rappresentato su 4 bit ($N = 4$)

- L'intero positivo $(5)_{10}$ in base due vale $(0101)_2$
- Applicando il «complemento a 2» si ha che $(-5)_{10} = (1011)_2$.
Applicando a 0101 passaggio per passaggio quanto descritto:

—	—	—	1
—	—	1	1
—	0	1	1
1	0	1	1

Numeri interi - Riepilogo

Decimale	Mod e segno	Compl. a 1	Traslazione	Compl. a 2
7	0111	0111	1111	0111
6	0110	0110	1110	0110
5	0101	0101	1101	0101
4	0100	0100	1100	0100
3	0011	0011	1011	0011
2	0010	0010	1010	0010
1	0001	0001	1001	0001
0	0000	0000	1000	0000
-0	1000	1111	1000	0000
-1	1001	1110	0111	1111
-2	1010	1101	0110	1110
-3	1011	1100	0101	1101
-4	1100	1011	0100	1100
-5	1101	1010	0011	1011
-6	1110	1001	0010	1010
-7	1111	1000	0001	1001
-8	-	-	0000	1000

Numeri reali

Numeri reali in un elaboratore digitale

Come rappresentare i numeri reali in un elaboratore digitale?

Fanno parte dei numeri reali:

- I numeri naturali
- I numeri interi
- I numeri razionali (cioè i numeri esprimibili come frazione)
- I numeri irrazionali (es. $\sqrt{2}$, π , e)

Numeri reali – Virgola mobile

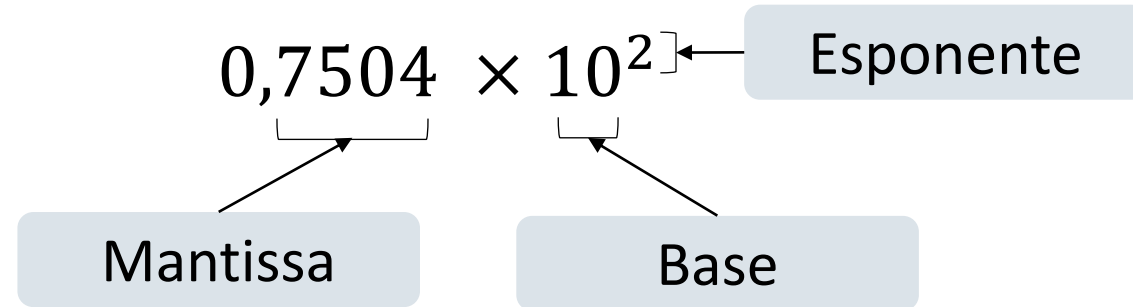
La memoria di un elaboratore digitale è finita, mentre i numeri reali sono infiniti (l'insieme dei reali è anche non numerabile...). Serve un compromesso tra il *range* di valori rappresentabili e la *precisione*.

Negli elaboratori digitali si usa la rappresentazione in virgola mobile, stabilendo un numero fisso di cifre significative e scalando l'esponente della base di conseguenza.

Ad esempio, tutte le seguenti notazioni esprimono la stessa quantità

$$75,04 = 75,04 \times 10^0 = 7,504 \times 10^1 = 0,7504 \times 10^2 = 7504 \times 10^{-2}$$

Numeri reali – Virgola mobile



La mantissa è la parte frazionaria di un numero reale. Dato un reale x , la mantissa è la differenza tra x e la sua parte intera.

In un elaboratore digitale i numeri reali sono rappresentati in virgola mobile (*floating point*). Ovviamente, la base è 2 anziché 10.



Numeri reali – Conversione in base 2

Convertiamo separatamente la parte intera e la parte decimale.

Esempio: 6,625.

Per la parte intera:

$$6 : 2 = 3 \text{ resto } 0$$

$$3 : 2 = 1 \text{ resto } 1$$

$$1 : 2 = 0 \text{ resto } 1 \rightarrow \mathbf{STOP} \text{ (Poiché il quoziente è 0)}$$

$$(6)_{10} = (110)_2$$

Numeri reali – Conversione in base 2

Per la parte frazionaria, anziché dividere per 2 si moltiplica per 2

$0,625 \times 2 = 1,250 \rightarrow 1$ sarà la prima cifra dopo la virgola. Si prosegue con la parte frazionaria 0,250

$0,250 \times 2 = 0,5 \rightarrow 0$ sarà la seconda cifra dopo la virgola. Si prosegue con la parte frazionaria 0,5

$0,5 \times 2 = 1,0 \rightarrow \mathbf{STOP}$ 1 sarà la terza cifra dopo la virgola. Ci si ferma, in quanto la parte frazionaria restante è 0.

$$(0,625)_{10} = (0,101)_2$$

Le cifre dopo la virgola esprimono le potenze negative.

Numeri reali – Conversione in base 2

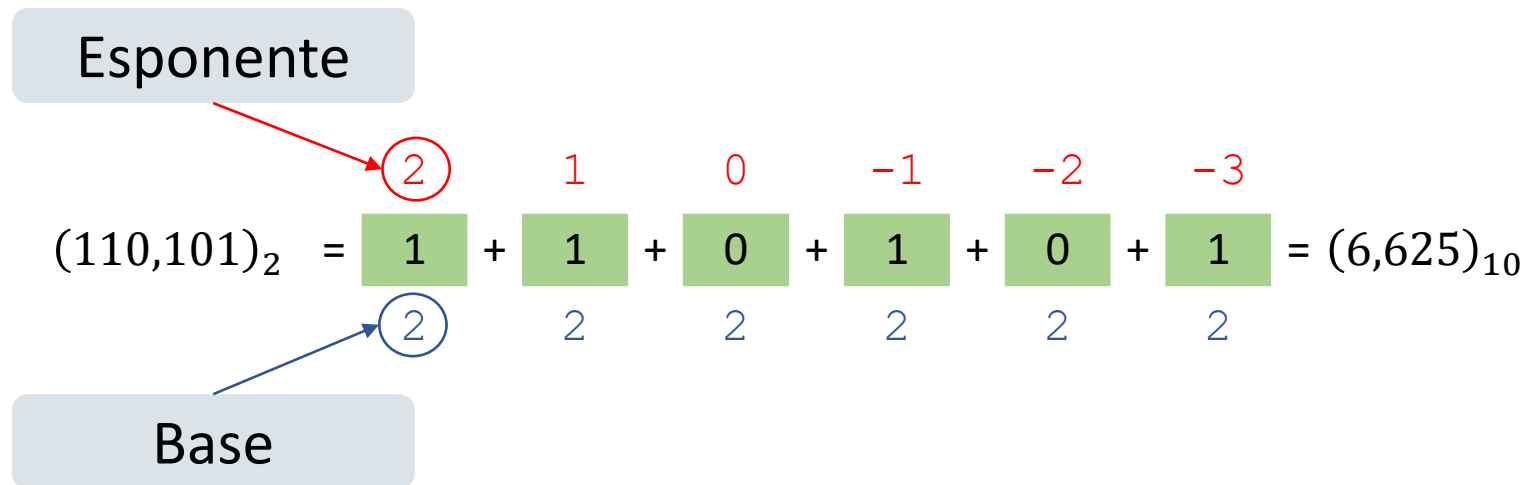
Le posizioni dopo la virgola rappresentano gli esponenti negativi della base, che decrementano di 1 da sinistra verso destra, a partire da -1.

$$\begin{aligned} 0,101 &= 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \\ &= 0,5 + 0 + 0,125 = 0,625 \end{aligned}$$

Esponente

(110,101)₂ = $\overset{1}{\underset{2}{\boxed{1}}} + \overset{0}{\underset{2}{\boxed{1}}} + \overset{-1}{\underset{2}{\boxed{0}}} + \overset{-2}{\underset{2}{\boxed{1}}} + \overset{-3}{\underset{2}{\boxed{0}}} + \overset{-4}{\underset{2}{\boxed{1}}} = (6,625)_{10}$

Base



Numeri reali – Conversione in base 2

Non tutte le parti frazionarie finite in base 10 sono finite anche in base 2... Ad esempio, proviamo a convertire 0,6 e 0,85

$$0,6 \times 2 = 1,2$$

$$0,2 \times 2 = 0,4$$

$$0,4 \times 2 = 0,8$$

$$0,8 \times 2 = 1,6$$

$$0,6 \times 2 = 1,2$$

$$0,2 \times 2 = 0,4$$

$$0,4 \times 2 = 0,8$$

$$0,8 \times 2 = 1,6$$

$$0,6 \times 2 = 1,2$$

... ..

$$(0,6)_{10} = (0, \overline{1001})_2$$

$$(0,85)_{10} = (0,11\overline{0110})_2$$

In base 2 diventano periodici!

$$0,85 \times 2 = 1,7$$

$$0,7 \times 2 = 1,4$$

$$0,4 \times 2 = 0,8$$

$$0,8 \times 2 = 1,6$$

$$0,6 \times 2 = 1,2$$

$$0,2 \times 2 = 0,4$$

$$0,4 \times 2 = 0,8$$

$$0,8 \times 2 = 1,6$$

$$0,6 \times 2 = 1,2$$

... ..

Numeri reali – Virgola mobile

Come i numeri in base dieci, anche quelli in base due possono essere espressi in virgola mobile

$$\begin{aligned} 110,101 &= 110,101 \times \textit{due}^0 = 11,0101 \times \textit{due}^1 = 1,10101 \times \textit{due}^2 \\ &= 11010,1 \times \textit{due}^{-2} \end{aligned}$$

Standard IEEE 754

Standard per l'aritmetica in virgola mobile definito dall'*Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE) nel 1985.

Stabilisce regole per la rappresentazione floating point, le operazioni eseguibili, gli arrotondamenti e la gestione delle eccezioni

- Numeri reali in virgola mobile
- Numero di bit per segno, esponente, mantissa
- Precisione singola (32 bit), doppia (64 bit), quadrupla (128 bit), precisione estesa e estendibile

IEEE 754 a precisione singola

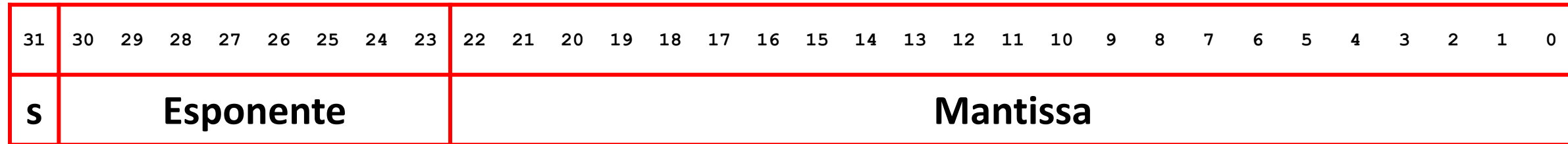
- 32 bit per rappresentare i numeri reali
- 1 bit, quello più a sinistra per il segno (0 positivo, 1 negativo)
- I successivi 8 bit contengono l'esponente, rappresentato come *intero in traslazione* di 127 (cioè viene memorizzato il valore dell'esponente + 127)
- I restanti 23 bit contengono la mantissa

IEEE 754 a precisione singola

Per calcolare la rappresentazione binaria di un numero in IEEE 754 a precisione singola:

- Si convertono parte intera e parte frazionaria in base due
- Si sposta la virgola lasciando un solo 1 a sinistra della stessa, cambiando l'esponente in maniera coerente
- Si trasla l'esponente di 127 e se ne calcola la rappresentazione binaria
- Si riporta nel bit più a sinistra il segno (0 positivo, 1 negativo)
- Nei successivi 8 bit si scrive l'esponente traslato
- Nei successivi 23 bit si scrive la mantissa, sottintendendo l'1 a sinistra della virgola

IEEE 754 a precisione singola



Segno
0 (+)
1 (-)

Vero esponente
+
127
(traslazione)

Numero naturale che corrisponde alla componente frazionaria del numero in virgola fissa con una sola cifra a sinistra del punto decimale

$$23,85 = 10111,110110 = \underbrace{1,0111110110}_{\text{Viene sottinteso}} \times \text{due}^4$$

L'esponente viene traslato di 127, dunque sarà rappresentato come $(131)_{10} = (10000011)_2$

0100000110111101100110011001101



IEEE 754 a precisione singola – Esempio

Calcoliamo la rappresentazione IEEE 754 a precisione singola di 12,75. Cominciamo dalla rappresentazione binaria di 12 e di 0,75, cioè della parte intera e di quella frazionaria.

$$12 : 2 = 6 \text{ resto } 0$$

$$6 : 2 = 3 \text{ resto } 0$$

$$3 : 2 = 1 \text{ resto } 1$$

$$1 : 2 = 0 \text{ resto } 1 \rightarrow (12)_{10} = (1100)_2$$

IEEE 754 a precisione singola – Esempio

$$0,75 \times 2 = 1,5$$

$$0,5 \times 2 = 1,0 \rightarrow (0,75)_{10} = (0,11)_2$$

A questo punto abbiamo che

$$(12,75)_{10} = (1100,11)_2$$

Dobbiamo spostare la virgola verso sinistra fino al primo 1, cioè di tre posizioni

$$1100,11 = 1,10011 \times \text{due}^3$$

Viene sottinteso

IEEE 754 a precisione singola – Esempio

Dobbiamo ora traslare l'esponente di 127:

$$3 + 127 = 130$$

Non ci resta che convertirlo in base due

$$130 : 2 = 65 \text{ resto } 0$$

$$8 : 2 = 4 \text{ resto } 0$$

$$65 : 2 = 32 \text{ resto } 1$$

$$4 : 2 = 2 \text{ resto } 0$$

$$32 : 2 = 16 \text{ resto } 0$$

$$2 : 2 = 1 \text{ resto } 0$$

$$16 : 2 = 8 \text{ resto } 0$$

$$1 : 2 = 0 \text{ resto } 1$$

$$(130)_{10} = (10000010)_2$$

IEEE 754 a precisione singola – Esempio

Considerando che 12,75 è positivo, il bit del segno è 0.

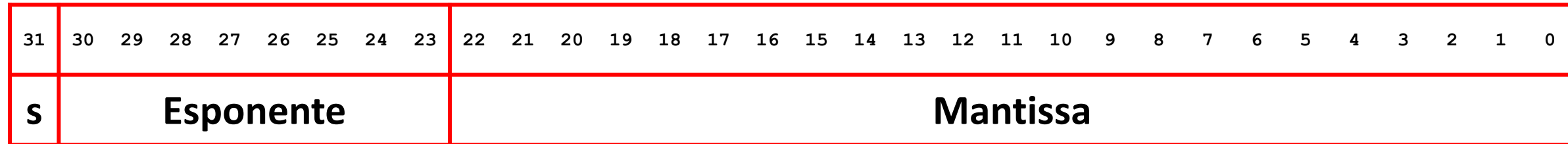
Dunque la rappresentazione in IEEE 754 a precisione singola di 12,75 è

s	Esponente	Mantissa
0	1 0 0 0 0 0 1 0	1 0 0 1 1

I bit restanti sono 0 (Gli zero a destra dell'ultima cifra significativa non cambiano il valore. Es: 1,575 = 1,5750000).

0	1 0 0 0 0 0 1 0	1 0 0 1 1 0
---	-----------------	---

IEEE 754 a precisione singola



Segno
0 (+)
1 (-)

Vero esponente
+
127
(traslazione)

Numero naturale che corrisponde alla componente frazionaria del numero in virgola fissa con una sola cifra a sinistra del punto decimale

$$23,85 = 10111,110110 = \underbrace{1,0111110110}_{\text{Viene sottinteso}} \times \text{due}^4$$

L'esponente viene traslato di 127, dunque sarà rappresentato come $(131)_{10} = (10000011)_2$

01000001101111101100110011001101

Arrotondamento

IEEE 754 – Arrotondamento

Mode	Example value			
	+11.5	+12.5	-11.5	-12.5
to nearest, ties to even	+12.0	+12.0	-12.0	-12.0
to nearest, ties away from zero	+12.0	+13.0	-12.0	-13.0
toward 0	+11.0	+12.0	-11.0	-12.0
toward $+\infty$	+12.0	+13.0	-11.0	-12.0
toward $-\infty$	+11.0	+12.0	-12.0	-13.0

- *To nearest, ties to even* → arrotondamento convergente (default per binari)
- *To nearest, ties away from zero* → arrotondamento commerciale
- *Toward 0* → troncamento
- *Toward $+\infty$* → arrotondamento per eccesso
- *Toward $-\infty$* → arrotondamento per difetto

IEEE 754 – Arrotondamento

To nearest, ties to even

Troncamento all'i-esima cifra (base 10)

- Se la cifra in posizione $i+1$ è ≤ 4 , arrotonda per difetto (in valore assoluto)
- Se la cifra in posizione $i+1$ è ≥ 6 , arrotonda per eccesso (in valore assoluto)
- Se la cifra in posizione $i+1$ è $= 5$ e ci sono altre **cifre diverse da 0 nelle posizioni successive**, arrotonda per eccesso (in valore assoluto)
- Se la cifra in posizione $i+1$ è $= 5$ e le cifre **successive sono 0**
 - Se la cifra in posizione i è **pari**, arrotonda per difetto (in valore assoluto)
 - Se la cifra in posizione i è **dispari**, arrotonda per eccesso (in valore assoluto)

IEEE 754 – Arrotondamento

To nearest, ties to even

Troncamento all'i-esima cifra (base 2)

- Se la cifra in posizione $i+1$ è **0**, arrotonda per difetto (in valore assoluto)
- Se la cifra in posizione $i+1$ è **1** e **ci sono altri 1 nelle cifre successive** arrotonda per eccesso (in valore assoluto)
- Se la cifra in posizione $i+1$ è **1** e le **cifre successive sono tutte 0**
 - Se la cifra in posizione i è **0**, arrotonda per difetto (in valore assoluto)
 - Se la cifra in posizione i è **1**, arrotonda per eccesso (in valore assoluto)

IEEE 754 – Arrotondamento

To nearest, ties to even

Esempi base 10

6,3421 $\rightarrow$ 6,34

8,2764 $\rightarrow$ 8,28

4,3254 $\rightarrow$ 4,33

9,1250 $\rightarrow$ 9,12

9,1350 $\rightarrow$ 9,14

Esempi base 2

0,1101 $\rightarrow$ 0,11

0,1011 $\rightarrow$ 0,11

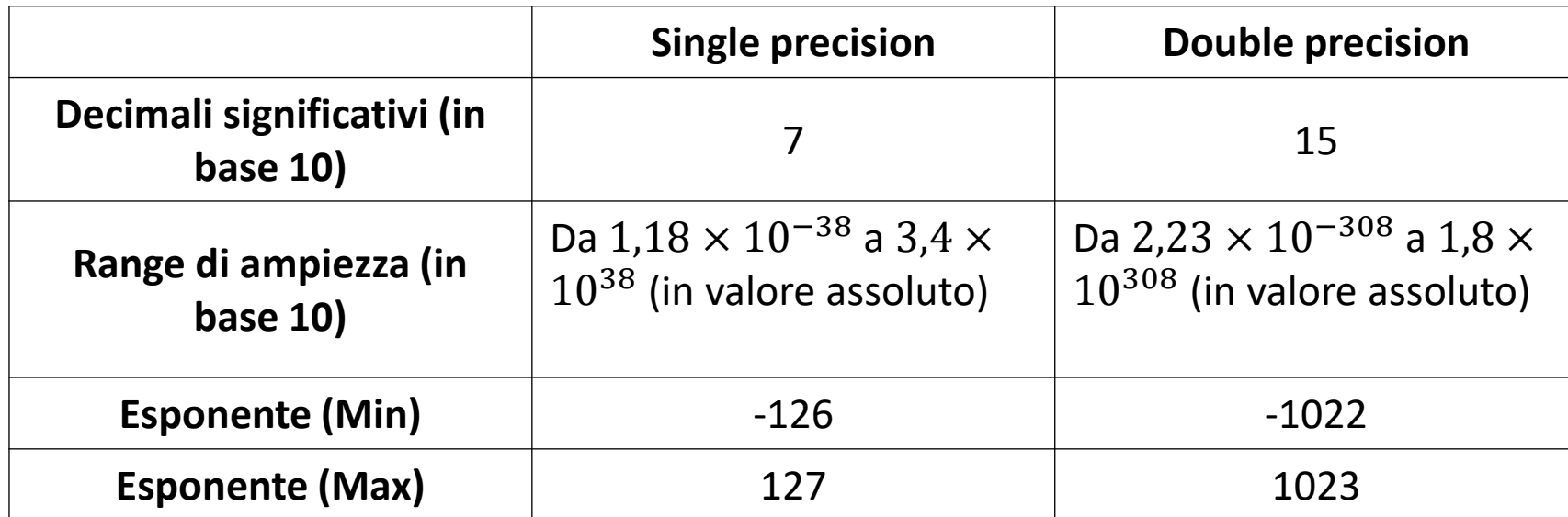
0,1111 $\rightarrow$ 1,00

0,1010 $\rightarrow$ 0,10

0,1110 $\rightarrow$ 1,00

IEEE 754 a precisione doppia

- 64 bit per rappresentare i numeri reali
- 1 bit, quello più a sinistra per il segno (0 positivo, 1 negativo)
- I successivi 11 bit contengono l'esponente, rappresentato come *intero in traslazione* di 1023 (cioè viene memorizzato il valore dell'esponente + 1023)
- I restanti 52 bit contengono la mantissa



Standard IEEE 754

Lo zero non sarebbe rappresentato... ma è un numero troppo importante!



Si effettua una denormalizzazione dello standard

Standard IEEE 754 - Denormalizzazione

- 32 bit (a precisione singola) e 64 bit (a precisione doppia) tutti a 0 rappresentano lo zero anziché $1,0 \times due^{-126}$
- I numeri in IEEE 754 in cui la mantissa è composta da tutti 0 e l'esponente da tutti 1 rappresentano $+\infty$ (segno 0) e $-\infty$ (segno 1)
- I numeri in IEEE 754 in cui la mantissa contiene cifre diverse da 0 e l'esponente è composto da tutti 1, rappresentano «Not a number» (NaN)
- I numeri in IEEE 754 in cui la mantissa contiene cifre diverse da 0 e l'esponente è composto da tutti 0 sono «denormalizzati», cioè non viene sottinteso «1,», ma «0,»



Standard IEEE 754 - Denormalizzazione

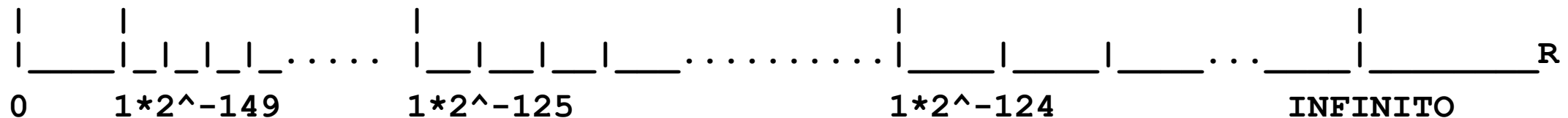
000000000000000000000000000000000000	<u>rappresenta lo 0</u>
011111111000000000000000000000000000	rappresenta $+\infty$
111111111000000000000000000000000000	rappresenta $-\infty$
011111111--- non tutti zero ----	NaN (Not a number)
111111111--- non tutti zero ----	NaN (Not a number)
000000000--- non tutti zero ----	<u>denormalizzato (pos)</u>
100000000--- non tutti zero ----	<u>denormalizzato (neg)</u>

Esempio di numero denormalizzato:

$$\begin{aligned} &000000000000000000000000000000000001 = \\ &= 0.00000000000000000000000000000001 \times 2^{-126} = 2^{-23} \times 2^{-126} = 2^{-149} \end{aligned}$$

[illegible]

Tra di essi ci sono infiniti valori non rappresentabili (come, d'altro canto, tra 0 e 2^{-149}). L'intervallo di valori non rappresentabile cresce al crescere della potenza di 2 considerata



Standard IEEE 754

L'aritmetica in virgola mobile è sempre un'approssimazione