Capitolo 2
Modelli di produzione

2.1 Schemi di contabilità e modelli esplicativi

La descrizione è un passo importante verso una comprensione completa del processo di crescita economica. Ma gli economisti desiderano andare oltre la mera descrizione, per spiegare e anche prevedere le conseguenze dei cambiamenti storici e delle politiche nel sentiero di crescita economica. Per dare spiegazioni e fare predizioni, gli economisti hanno bisogno di un *modello* completo del processo di sviluppo, in cui i fattori da spiegare e predire sono le *variabili endogene*, determinate all'interno del modello, e i fattori che spiegano o predicono le conseguenze sono i *parametri esogeni*. Il modello deve specificare sufficienti relazioni tra variabili endogene e parametri esogeni, cosicché una volta conosciuti i parametri esogeni possiamo calcolare matematicamente (o graficamente) i corrispondenti valori delle variabili endogene.

La *spiegazione* in questo modello consiste nel mostrare quale cambiamento nei parametri esogeni conduce al cambiamento osservato nella realtà empirica nelle variabili endogene.

La *predizione* consiste nel calcolare gli effetti sulle variabili endogene di un cambiamento ipotetico nei parametri esogeni. Come primo passo per sviluppare modelli completi di sviluppo economico, abbiamo bisogno di sviluppare un *modello della produzione*.

Come vedremo i modelli teorici spesso differiscono le assunzioni da cui partono, perché si ritengono essenziali certi fatti o relazioni e si ritiene possibile astrarre da altri.

2.2 Un modello della produzione

Nel nostro modello, come nello schema di contabilità, considereremo il tempo in unità discrete (di solito anni), t = 1990, 1991, …. Le decisioni economiche, come le decisioni di produrre o consumare, e i prezzi sono fissati all'inizio di ciascun periodo, e non possono cambiare sino al prossimo periodo. Lo schema periodale ci costringe a concepire tutte le decisioni economiche come se procedessero sincronicamente nella stessa scala di tempo.

Nello schema di contabilità X è il PIL, il valore di mercato di tutti i vari beni e servizi prodotti effettivamente in un'economia. Nel nostro modello, per semplificare il più possibile, assumeremo ci sia un solo bene prodotto, *output*, che sarà anche indicato come X, e che questo bene può essere accumulato come un singolo tipo di capitale K. (Nel mondo reale, naturalmente, K è il valore di molti beni capitale di differente natura). Il capitale *K* e il lavoro *N* insieme producono l'output *X*. Assumeremo che gli *inputs* siano impiegati all'inizio del periodo, mentre l'output diviene disponibile alla fine del periodo.

Una *tecnica di produzione* può essere descritta specificando quanto capitale è necessario all'inizio del periodo produttivo per equipaggiare un'unità di lavoro, quanto output è prodotto alla fine del periodo. Assumeremo che le tecniche mostrano *rendimenti di scala costanti*, cioè che è possibile produrre esattamente il doppio di output con il doppio di entrambi gli input (lavoro e capitale).

Una tecnica di produzione può essere descritta da due numeri (*k, x*), dove *k* è il capitale per lavoratore, *x* l'output per lavoratore È anche possibile descrivere la tecnica come (ρ, *k*), perché se conosciamo almeno due dei parametri (*k, x,* ρ) possiamo derivare il parametro rimanente. Infatti, per definizione:

$$k = \frac{x}{\rho}; x = \rho k \ e \ \rho = \frac{x}{k}$$

La tecnica di produzione determina le relazioni tra l'output e gli input di capitale e lavoro:

$$N = \frac{X}{x}$$

$$K = \frac{K}{X} X = \frac{X}{\rho}$$

La tecnica in uso determina la produttività del lavoro e del capitale e il rapporto capitale-lavoro nell'economia. Ogni tecnica di produzione corrisponde ad una particolare scheda crescita-distribuzione, come quella della figura 2.5

La *tecnologia* di un'economia è la collezione di tutte le tecniche conosciute che possono essere usate. Potremmo rappresentare la tecnologia come una matrice, ogni colonna della quale è una tecnica di produzione. Ad ogni dato salario reale, le differenti tecnologie disponibili garantiranno saggi di profitto differenti.

Assumiamo che la tecnologia definita dai coefficienti input-output sia un parametro esogeno in ogni periodo. Nello sviluppo dell'economia reale un ruolo cruciale è giocato dal *cambiamento tecnologico*, che appare nel modello come un cambiamento nella collezione di tecniche da periodo a periodo.

2.3 Agenti e distribuzione

Per chiarificare il meccanismo esatto attraverso il quale la produzione capitalistica funziona, distingueremo tre tipi di agenti nel nostro modello. In primo luogo abbiamo i *lavoratori*, che offrono forza lavoro per un salario. Poi abbiamo i *capitalisti*, che possiedono il capitale. Infine vi sono gli *imprenditori*, che per conto dei capitalisti impiegano i lavoratori, organizzano la produzione, vendono l'output e consegnano il reddito residuo ai capitalisti come profitto, dopo aver pagato ai lavoratori i loro salari. Nelle economie capitalistiche del mondo reale queste funzioni sono qualche volta combinate in vario modo. I lavoratori possono possedere una parte del capitale come membri di cooperative di produzione, ad esempio. I capitalisti possono agire come imprenditori, sia possedendo il capitale e al tempo stesso organizzando la produzione (e veramente, questa era la situazione comune nelle prime fasi del capitalismo industriale). Ma anche se la stessa persona può qualche volta agire in tutti e tre i ruoli, la nostra analisi sarà più chiara se li separiamo attentamente.

Assumeremo sempre che c'è un largo numero di tutti e tre i tipi di agenti, anche se sono tutti simili, cosicché c'è concorrenza ed ogni agente, capitalista, lavoratore o imprenditore, prende i prezzi del prodotto e i salari come dati.

In questo modello gli imprenditori assumono i lavoratori in cambio di un salario misurato in termini del prodotto (*output*) w, pagato alla fine del periodo e li organizzano al fine di ottenere la produzione. Gli imprenditori debbono scegliere una tecnica produttiva definita dai coefficienti k (o ρ) e x tra le tecnologie disponibili, determinate dalle conoscenze tecniche e scientifiche e dalle pratiche sociali e culturali e istituzionali che limitano le possibili tecniche produttive. Per esempio la legislazione sanitaria e sulla sicurezza possono prevenire gli imprenditori dall'utilizzare tecniche che causano malattie professionali o incidenti evitabili.

Data la tecnica scelta (ρ, x), per produrre l'output X in un periodo, l'imprenditore deve assumere $N=X/x$ lavoratori in quel periodo. Il monte salari sarà $W=wX/x$. L'imprenditore deve anche assicurarsi i servizi del capitale uguale a X/ρ dai proprietari del capitale. La concorrenza forzerà gli imprenditori a pagare il reddito residuo dopo il pagamento dei salari, cioè il *profitto*, ai capitalisti alla fine del periodo. Poiché la quota dei profitti è $\pi=(1-\frac{w}{x})$, il profitto sarà:

$$P = X - W = \left(1 - \frac{w}{x}\right)X = \pi X$$

Il *saggio di profitto* r sarà:

$$r = \frac{P}{K} = \rho\left(1 - \frac{w}{x}\right) = \pi\rho \qquad (2.1)$$

Il saggio di profitto r è ciò che gli imprenditori pagano ai capitalisti per l'uso del capitale per un periodo, alla fine del quale il capitale diminuito dell'ammortamento ritorna in possesso dei capitalisti.

2.4 La scelta delle tecniche e la funzione di produzione

Ogni combinazione dei parametri k e x definisce una singola tecnica di produzione, un particolare metodo di combinare il lavoro e il capitale per produrre l'output, e perciò una scheda crescita-distribuzione. Si supponga che c'è un altro modo possibile di produrre l'output, nel quale ogni lavoratore è equipaggiato con k' unità di capitale e produce x' unità di output. La tecnica alternativa ha una sua propria scheda crescita-distribuzione. Nella figura 2.1 disegniamo le schede salario reale-saggio di profitto per la tecnica originale definita da k e x e per la tecnica alternativa definita da k' e x'. Dal punto di vista dell'imprenditore la scheda salario reale-saggio di profitto mostra l'altezza del saggio di profitto che può assicurare al capitalista per ogni livello del salario reale. La concorrenza spinge gli imprenditori a scegliere la tecnica che assicura il saggio di profitto più alto.

Nel caso illustrato dalla figura 2.1, la tecnica alternativa pagherà un saggio di profitto più alto dell'originale quando il saggio di salario è alto, ma un saggio di profitto più basso quando il salario è più basso. Un imprenditore che può scegliere di usare una qualsiasi delle due tecniche di produzione, userà la tecnica alternativa quando il salario è alto, e la tecnica originale quando è basso.

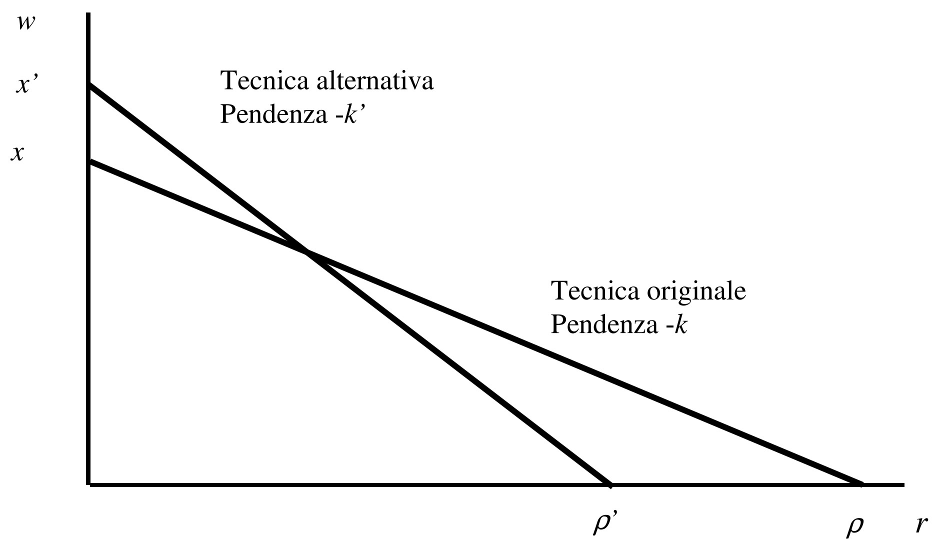
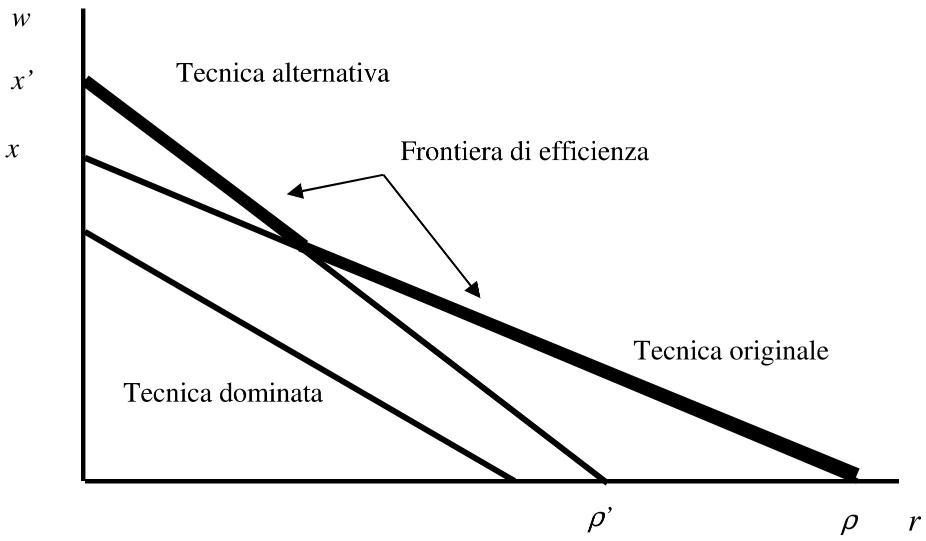


Figura 2.1: Quando sono disponibili due o più tecniche produttive, ciascuna ha la propria scheda salario reale-saggio del profitto

Una tecnica è invece *dominata* da un'altra tecnica quando la scheda salario reale-saggio di profitto della prima giace interamente al di sotto e alla sinistra della corrispondente scheda della seconda. La terza tecnica illustrata nella Figura 2.2 è dominata sia dalla tecnica originale che dalla tecnica alternativa.

Non massimizza il saggio di profitto un imprenditore che usa una tecnica dominata ad ogni saggio di salario. La *frontiera di efficienza* per una tecnologia è il confine nord-est delle schede salario reale-saggio del profitto ed è formata dalla combinazione delle tecniche non dominate prese nei tratti in cui assicurano un saggio di profitto più alto delle tecniche alternative. La frontiera di efficienza è mostrata come la spezzata più spessa nella Figura 2.2. La condizione di efficienza di cui stiamo parlando è economica, riferita ad un'economia capitalista, e non puramente tecnica o ingegneristica.

Il punto A nella figura 2.2 rappresenta il salario reale al quale le due tecniche non dominate danno lo stesso saggio di profitto ed è chiamato il punto di *scambio* tra le due tecniche. Gli imprenditori selezioneranno la tecnica originale per salari sotto il punto di scambio e la tecnica alternativa per salari sopra il punto di sostituzione.



2.2: le scelte delle tecniche rilevanti sono quelle sulla frontiera di efficienza, che è il confine nord-est delle schede salario reale-saggio di profitto corrispondenti alle tecniche disponibili.

Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per un numero differente di tecniche, fino ad arrivare ad un continuo con un numero infinito di tecniche disponibili. Ogni tecnica corrisponde ad una scheda salario reale-saggio di profitto, e il confine nord-est delle schede salari reali-saggio del profitto delle tecniche disponibili è la frontiera di efficienza dell'economia. Gli imprenditori che massimizzano il profitto sceglieranno la tecnica sulla frontiera di efficienza per ogni livello del saggio di salario reale.

Gli economisti neoclassici spesso assumono una *funzione di produzione* che mostra l'output X che può essere prodotto da input arbitrari di capitale K e lavoro N.

$X = F(K, N)$ (2.2)

Se la funzione di produzione ha rendimenti costanti di scala, ciò significa che è possibile aumentare l'output per ogni dato indice, ad esempio $1/N$, incrementando entrambi gli input per lo stesso indice. Si può dire che in questo modo si descrive una tecnologia, cioè una collezione di tecniche di produzione. Un paio di numeri (k, x) indica una tecnologia data la funzione di produzione $F(K, N)$ se

$$x = \frac{X}{N} = F\left(\frac{K}{N}, \frac{N}{N}\right) = F(k, 1) = f(k)$$

Questo significa che k unità di capitale e un'unità di lavoro possono essere combinate per produrre x unità di output. La funzione $f(k) \equiv F(k, 1)$ è chiamata la *funzione di produzione intensiva* e mostra come varia il prodotto al variare della quantità di capitale per unità di lavoro. Se la funzione di produzione è una funzione liscia e continua, la corrispondente tecnologia è un insieme infinito di tecniche. La frontiera di efficienza per una funzione di produzione liscia e continua è anche essa liscia e continua, come si vede nella figura 2.3.

Quando la frontiera di efficienza è una curva liscia e continua derivante da una tecnologia descritta da una funzione di produzione liscia e continua, ogni punto della frontiera di efficienza è un punto di scambio. Un piccolo incremento nel salario reale cambierà la tecnica massimizzante ad una che impiega una piccola quantità di capitale in più per lavoratore.

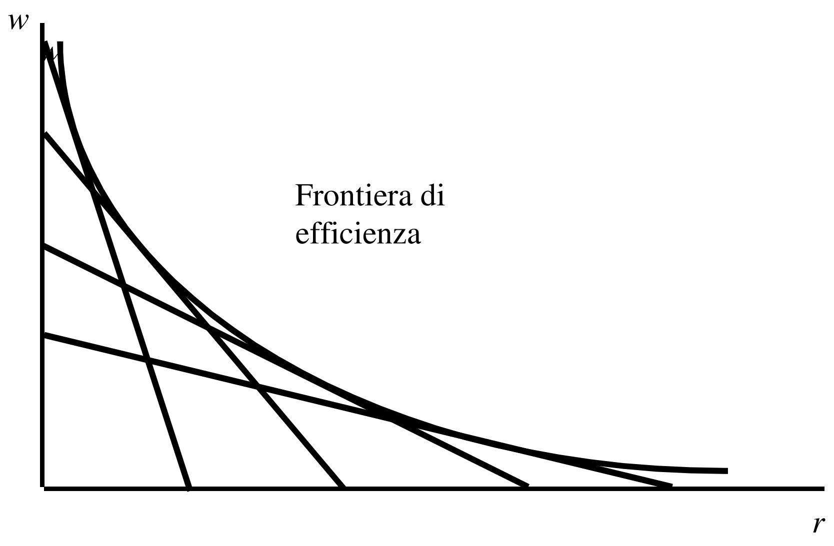


Figura 2.3: Una funzione di produzione liscia descrive una tecnologia con un insieme infinito di tecniche. Le schede salario reale-saggio di profitto sono ciascuna tangente alla frontiera di efficienza in un punto. Solo quattro del numero infinito di schede salario reale-saggio del profitto sono disegnate nella figura. In realtà la frontiera è l'inviluppo dell'infinto numero delle schede della tecnologia corrispondente

Come abbiamo visto, gli imprenditori che massimizzano il profitto sceglieranno la tecnica che garantisce il saggio di profitto più alto per ciascun salario. Se la funzione di produzione è liscia, la tecnica di produzione che massimizza il saggio di profitto ad un dato livello del salario reale combina il lavoro e il capitale in proporzioni tali che il prodotto marginale del lavoro è uguale al salario e il prodotto marginale del capitale è uguale al saggio di profitto. Quindi l'eguaglianza dei prodotti marginali ai prezzi dei fattori è semplicemente un modo diverso di descrivere la scelta degli imprenditori della tecnica di produzione più profittevole.

Per vedere questo punto, si consideri che il profitto è semplicemente l'output meno i salari:

$$P = rK = X - wN = F(K, N) - wN$$

Per un certo ammontare di capitale impiegato l'imprenditore vorrà scegliere la tecnica di produzione in modo da massimizzare questo profitto. Tenendo *K* costante, se l'imprenditore può variare la quantità di lavoro impiegata con l'ammontare dato di capitale in modo continuo, la condizione per la massimizzazione è:

$$\frac{dZ}{dN} = \frac{\partial(K, N)}{\partial N} - w = 0$$

Ne consegue che l'imprenditore deve scegliere una tecnica alla quale:

$$w = \frac{\partial F(K, N)}{\partial N}$$

Il membro a destra del segno di uguaglianza, la derivata parziale della funzione di produzione, è il prodotto marginale del lavoro.

La scelta della tecnica che massimizza il profitto ad ogni salario reale possibile è il principio fondamentale qui al lavoro, non l'eguaglianza del prodotto marginale del lavoro al salario reale. Se ci fosse solo un numero finito di tecniche disponibili, non sarebbe possibile determinare il prodotto marginale del lavoro, ma l'imprenditore potrebbe ancora scegliere la tecnica disponibile che garantisce il saggio di profitto più alto. La scheda crescita-distribuzione per quella tecnica determinerà quindi la produttività media del lavoro x e la produttività media del capitale ρ. Useremo la scheda crescita-distribuzione particolare scelta per analizzare le relazioni tra consumi e investimenti aggregati. Il salario reale determina, attraverso la massimizzazione del profitto, la tecnica in uso, e la scheda crescita distribuzione per quella tecnica determina il *trade off* sociale tra investimento lordo e consumo.

La figura 2.4 riassume la situazione quando c'è un continuo infinito di tecniche rappresentate da una funzione di produzione liscia. Dato il salario (o alternativamente il saggio di profitto) c'è una tecnica di produzione che massimizza il saggio di profitto. La scheda crescita distribuzione corrispondente alla tecnica scelta è tangente alla frontiera di efficienza nel punto corrispondente al saggio di salario prevalente.

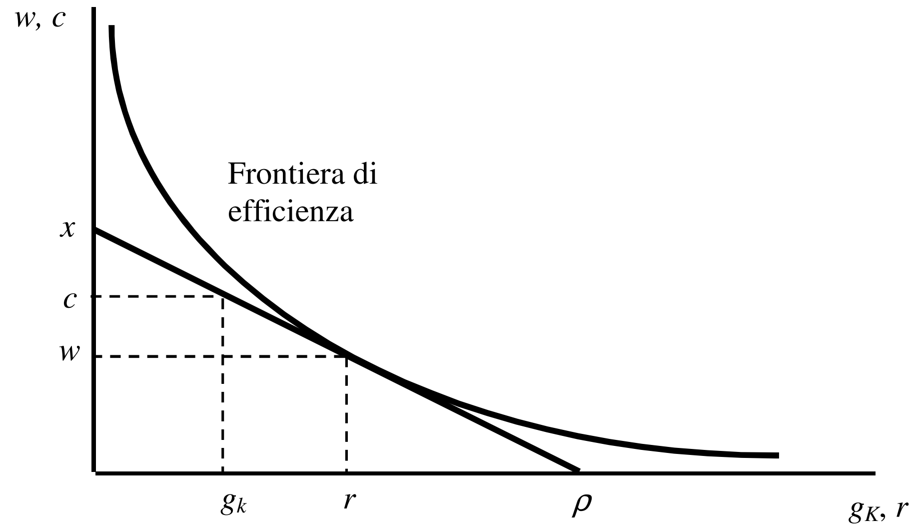


Figura 2.4: Il salario determina la tecnica che massimizza il profitto, che stabilisce la scheda crescita-distribuzione di un'economia

2.5 Funzioni di produzione particolari

Useremo in quanto segue due funzioni di produzioni particolari

2.5.1 La funzione di produzione di Leontief

La prima è chiamata la funzione di produzione di Leontief o a coefficienti fissi. La funzione di produzione a coefficienti fissi suppone che il capitale e il lavoro possono essere combinati solo in una certa proporzione tra loro per produrre l'output, cosicché corrisponde interamente a un'unica tecnica di produzione. La funzione di produzione di Leontief è scritta in termini matematici nel modo seguente:

$$X = \min(\rho K, xN) \quad (2.3)$$

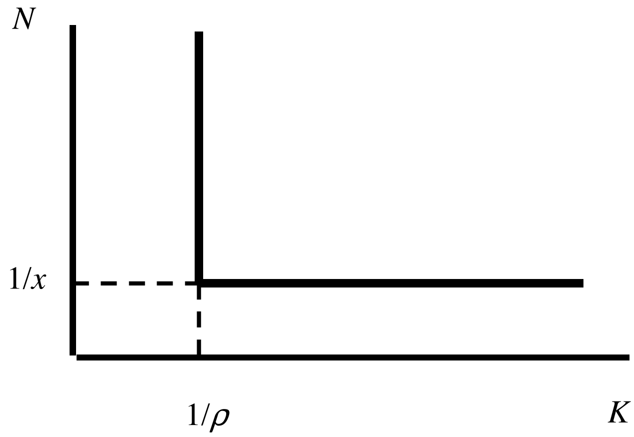
Dividendo per *N,* possiamo scrivere la funzione di produzione intensiva in questo modo:

$$x = \min(\rho k, x)$$

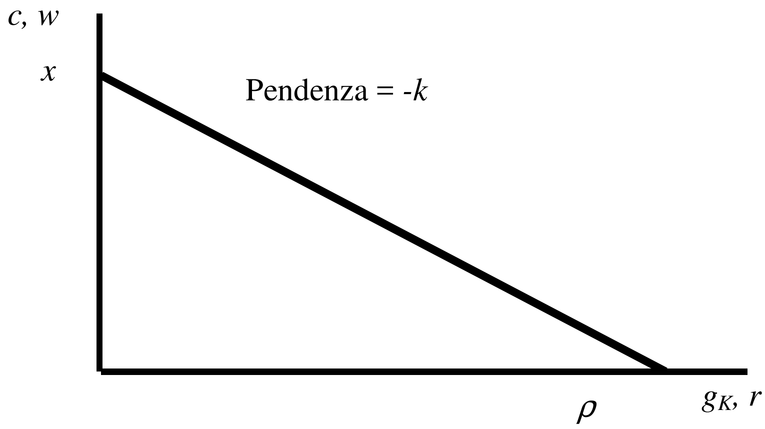
Questo tipo di funzione composta da due numeri prende sempre il valore del numero più piccolo. Quindi questa funzione di produzione ci dice che l'output *X* è limitato o dal prodotto del capitale impiegato o dal prodotto del lavoro impiegato, secondo quale dei due sia il più basso. In altre parole, per ogni *x* unità di output l'imprenditore deve avere almeno ρk unità di capitale e un'unità di lavoro. La funzione di produzione a coefficienti fissi descrive una e una sola tecnica produttiva.

Con la tecnologia descritta da una funzione di produzione a coefficienti fissi c'è una sola tecnica, cioè un solo possibile modo di combinare lavoro e capitale per produrre l'output. Se c'è un solo modo di combinare lavoro e capitale, la produttività marginale del lavoro e del capitale non sono ben determinate. Aggiungendo più lavoro ad una data quantità di capitale darà una quantità pari a zero di prodotto aggiuntivo, mentre sottraendo il lavoro il prodotto si ridurrà proporzionalmente.

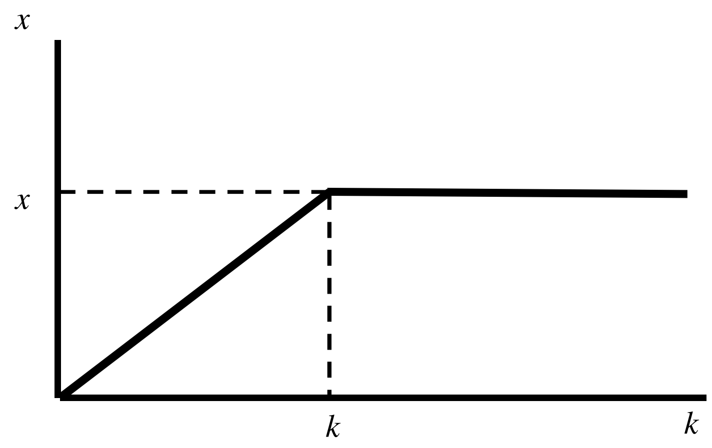
L'isoquanto unitario (da non confondere con la frontiera di efficienza: l'isoquanto unitario mostra le diverse quantità di capitale e lavoro necessarie a produrre un'unità di output) della funzione di produzione di Leontief ha la forma della lettera "L" come nella figura 2.5a. L'angolo corrisponde ai punti $1/\rho$ e $1/x$ (si ricordi, come mostrato a p. 3, che $N=X/x$ e $K=X/\rho$. Nel nostro caso $X=1$). La frontiera di efficienza corrispondente è una retta rappresentante una singola scheda crescita-distribuzione con intercetta orizzontale ρ e intercetta verticale x, come mostrato nella figura 2.5b. La funzione di Leontief intensiva è un segmento che parte dall'origine per raggiungere il punto (k,x) e una semiretta orizzontale al livello di x per valori più alti di k come mostrato dalla figura 2.5c. Nella prima parte della funzione di produzione di Leontief intensiva il prodotto è limitato dall'input di capitale, ed è proporzionale a k, e nella seconda parte è limitato dall'input di lavoro ed è uguale a x, non importa quanta quantità di capitale maggiore sia disponibile.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.5: (a) La funzione di produzione di Leontief ha un isoquanto a forma di “L”, con l’angolo corrispondente alle proporzioni degli input (1/ρ, 1/*x*). (b) la frontiera di efficienza corrispondente è una singola scheda salario reale-saggio di profitto con intercetta orizzontale ρ e intercetta verticale *x*. (c) La funzione intensiva di produzione corrispondente consiste di due segmenti, uno che parte dall’origine fino al punto (*k,x*), l’altro orizzontale al livello *x*.

2.5.2 la funzione di produzione di Cobb-Douglas

Un'altra funzione di produzione largamente usata è la funzione di produzione di Cobb-Douglas, che presuppone una sostituzione continua tra capitale e lavoro nell’economia. Matematicamente è scritta nel seguente modo:

$X = AK^{\alpha}N^{1-\alpha}$ (2.5)

α è un parametro che ha un valore tra 0 e 1, e *A* è un fattore di scala usato per rendere consistenti le unità di misura. Usando la 2.5 possiamo vedere che una tecnica (*k,x*) è ammessa nella funzione di produzione di Cobb-Douglas se:

$x = Ak^{\alpha}(1)^{1-\alpha}$ o

$x = Ak^{\alpha}$ (funzione di produzione intensiva) (2.6)

Con la funzione di produzione di Cobb-Douglas è possibile scegliere qualsiasi quantità di capitale *k* da associare ad un’unità di lavoro e trovare la quantità di output *x* che un’unità di lavoro può produrre con quella quantità di capitale dall’equazione 2.6. Si noti che la funzione di produzione di Cobb-Douglas implica un gado molto alto di sostituibilità tra capitale e lavoro, perché un incremento nella quantità di lavoro può sempre compensare qualsiasi riduzione del capitale per ottenere lo stesso output (e viceversa).

L’isoquanto unitario per la funzione di produzione di Cobb-Douglas è l’iperbole asintotica agli assi mostrata nella figura 2.6a. Ogni punto, come *A*¸ *B* o *C* sull’isoquanto corrisponde ad una particolare tecnica di produzione, definito da (ρ, *x*) e ad una particolare scheda salario reale-saggio del profitto, come mostrato dalla figura 2.6b. La frontiera dell'efficienza è l'inviluppo di queste funzioni crescita-distribuzione.

Con la funzione di produzione di Cobb-Douglas (o con ogni funzione di produzione che mostra un isoquanto liscio) è possibile definire il prodotto marginale del lavoro o del capitale come l'incremento dell'output che può essere raggiunto con un piccolo incremento di un fattore di produzione, tenendo l'altro costante. In termini matematici il prodotto marginale di un fattore è la derivata parziale della funzione di produzione rispetto a quel fattore. I prodotti marginali del lavoro e del capitale con la funzione di produzione di Cobb-Douglas sono:

$$PM_N = \frac{\partial X}{\partial N} = AK^{\alpha}(1-\alpha)N^{-\alpha} = (1-\alpha)A(\frac{K}{N})^{\alpha} = (1-\alpha)Ak^{\alpha}$$

$$PM_K = \frac{\partial X}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha} = \alpha A(\frac{K}{N})^{-(1-\alpha)} = \alpha Ak^{\alpha-1}$$

Con la funzione di produzione di Cobb-Douglas le tecniche che massimizzano il saggio di profitto, ricordando la funzione intensiva di produzione, debbono soddisfare la condizione:

$$w = (1-\alpha)Ak^{\alpha} = (1-\alpha)x$$

Conoscendo k possiamo risolvere x e ρ. Dalla funzione di produzione intensiva di Cobb-Douglas vediamo che:

$$x=Ak^{\alpha}$$

Dividendo la funzione di produzione intensiva per k si ottiene

$$\rho = \frac{x}{k} = \frac{Ak^{\alpha}}{k} = Ak^{\alpha-1}$$

Come abbiamo visto il saggio di profitto è uguale al prodotto marginale del capitale,

$$r = \alpha Ak^{\alpha-1} = \alpha\rho$$

Dalla 2.1 vediamo che, poiché $r=\pi\rho$: $\alpha=\pi$, cioè il parametro α nella funzione di Cobb-Douglas è la quota dei profitti.

Inoltre possiamo vedere che w e r soddisfano l'equazione della scheda crescita-distribuzione per questi particolari valori di k e di x:

$$w+rk=(1-\alpha)x+\alpha x=x$$

Il saggio di salario più il profitto per unità di lavoro esauriscono il prodotto per unità di lavoro.

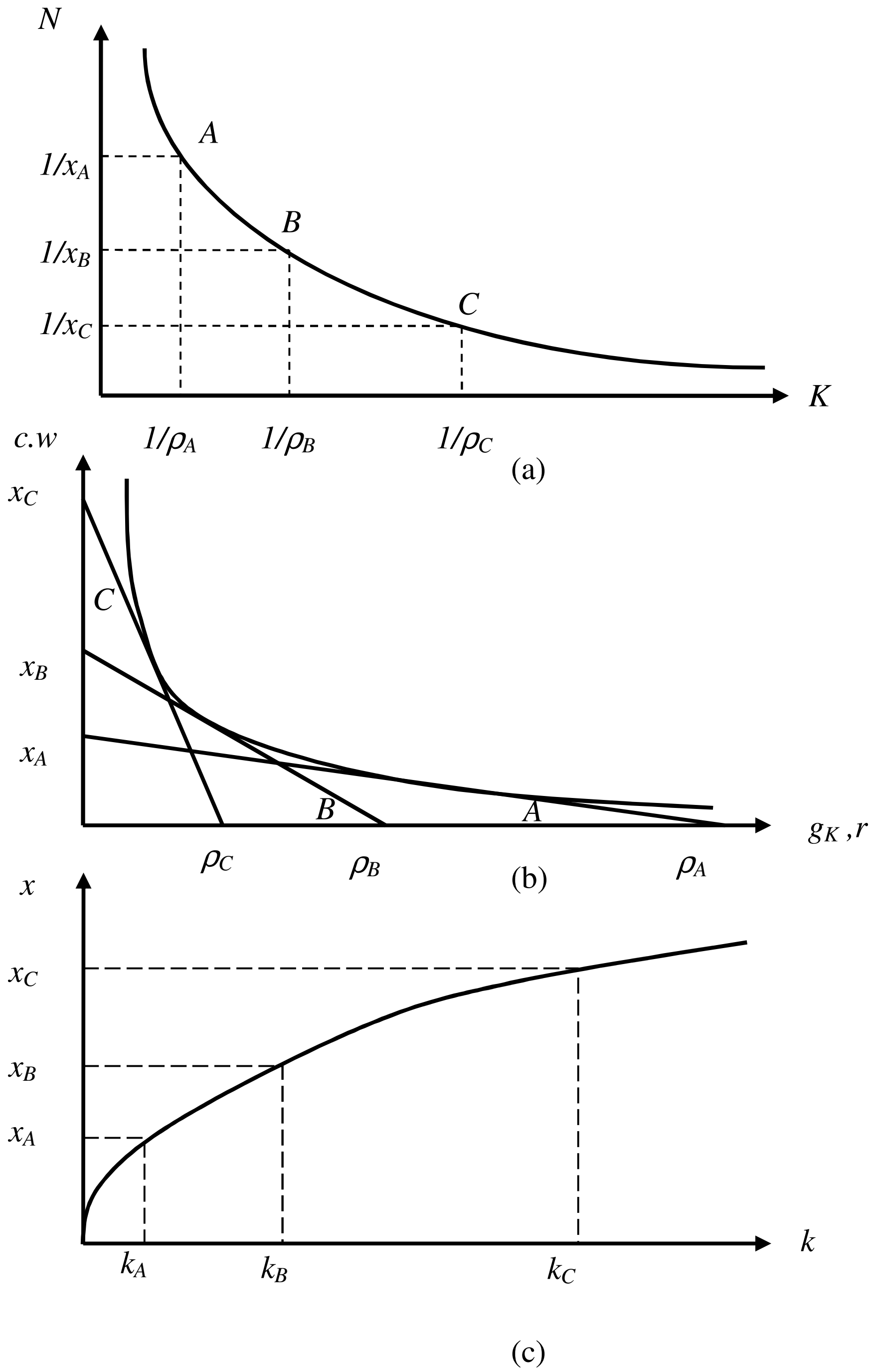


Figura 2.6: (a) la *funzione di produzione di Cobb-Douglas* ha un isoquanto unitario liscio, che rappresenta un continuo di tecniche, tre delle quali sono mostrate nei punti *A, B* e *C*. (b) La frontiera di efficienza è l'inviluppo delle schede crescita-distribuzione delle tecniche di produzione rappresentate nell'isoquanto. Le schede crescita-distribuzione per i punti *A, B,* e *C* sono disegnate nella figura. (c) L'intensità di capitale e la produttività del lavoro per i punti *A, B* e *C* sono mostrati sulla funzione di produzione intensiva.

2.6 Classificare il cambiamento tecnologico

Una singola tecnica di produzione è determinata dalle sue produttività del capitale ρ e produttività del lavoro *x*. Un cambiamento nella tecnica può perciò essere descritto in termini del cambiamento di questi due parametri. Per esempio un cambiamento tecnico puramente *labour* *saving* corrisponde ad uno spostamento verso l'alto di x mentre ρ rimane immutato. Come nel capito 2, si misura il grado di cambiamento tecnico o fattore di crescita *labour saving* in funzione del saggio di crescita della produttività del lavoro g_x:

$$1 + g_x = \frac{x_{+1}}{x}$$

La scheda crescita distribuzione corrispondente alla tecnica di produzione ruota in senso orario facendo perno sull'intercetta ρ sull'asse delle ascisse quando si verifica un cambiamento tecnologico puramente *labour saving*, come nella figura 2.7.

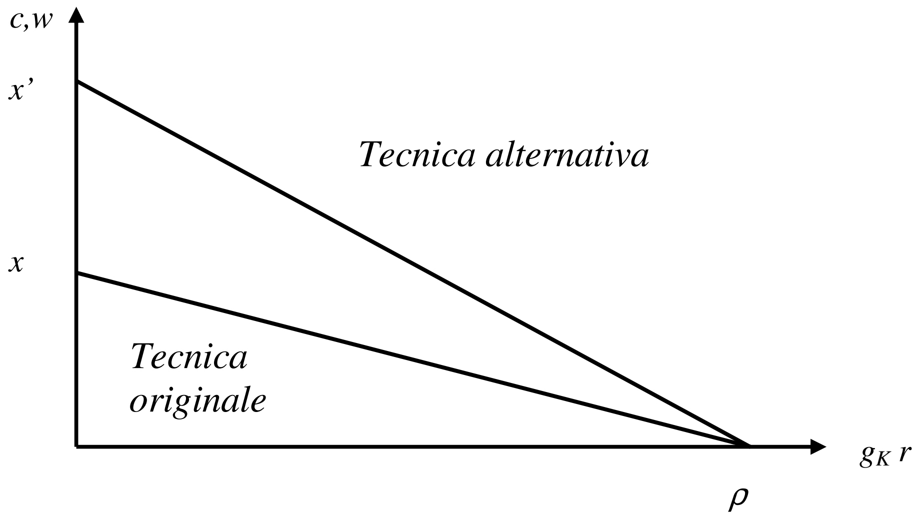


Figura 2.7: Un cambiamento tecnico puramente *labour saving* corrisponde ad una rotazione nella scheda crescita-distribuzione facendo perno sull'intercetta sull'asse delle ascisse (ρ)

Allo stesso modo un cambiamento tecnico puramente *capital saving* corrisponde ad un incremento in ρ mentre x resta immutato. Possiamo misurare il grado di cambiamento tecnico *capital saving* con il saggio di crescita della produttività del capitale g_ρ:

$$1 + g_\rho = \frac{\rho_{+1}}{\rho}$$

Cambiamenti tecnici puramente *capital saving* ruotano la scheda crescita-distribuzione in senso orario attorno alla sua intercetta sull'asse delle ordinate (w), come nella figura 2.8.

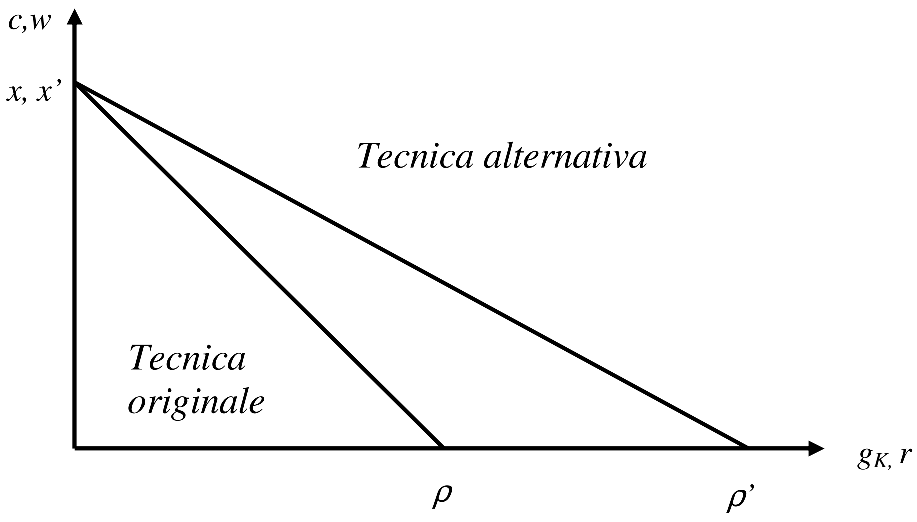


Figura 2.8: cambiamenti tecnici puramente *capital saving* ruotano la scheda crescita-distribuzione facendo perno sull'asse delle ordinate al punto *w*.

Se il cambiamento tecnico fa risparmiare sia il capitale che il lavoro nella stessa misura, la scheda crescita-distribuzione muove verso l'alto e l'esterno parallelamente a se stessa, come illustrato dalla figura 2.9. In questo caso $g_x=g_\rho$, cosicché entrambe le intercette si muovono nella stessa misura. Questa forma di cambiamento tecnologico si chiama *factor saving*. Il cambiamento tecnologico *factor saving* può essere anche descritto come un cambiamento di scala del prodotto stesso. Le stesse quantità di input di capitale e lavoro producono più output.

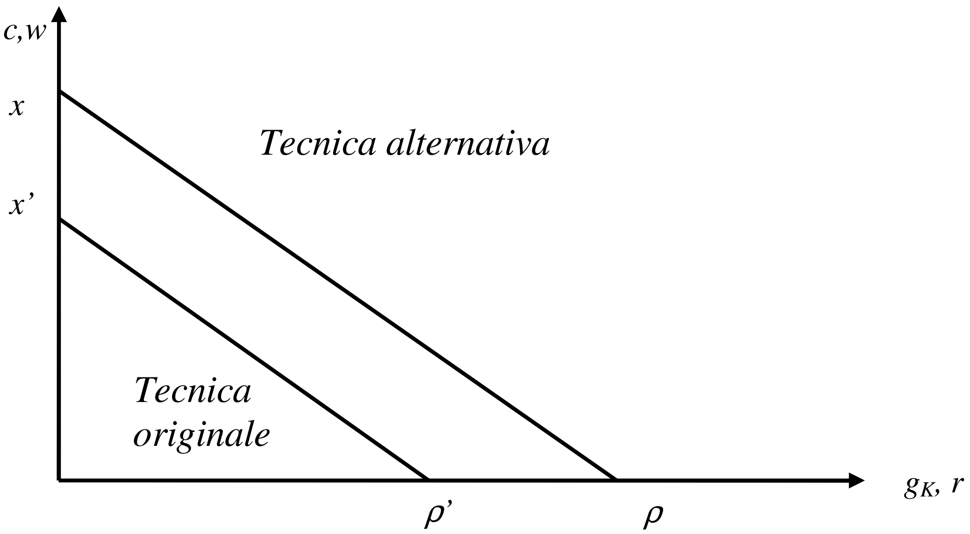


Figura 2.9: Un cambiamento tecnologico *factor saving* sposta la scheda crescita-distribuzione verso l'alto parallelamente a se stessa

Una breve riflessione mostra che si può rappresentare *qualsiasi* schema di cambiamento tecnico per una singola tecnica sia da una combinazione di cambiamento tecnologico puramente *labour* *saving* e *capital saving* sia con una combinazione di cambiamento tecnico puramente *labour saving* e *factor saving*.

È più complicato in generale descrivere il cambiamento tecnologico quando la tecnologia consiste in una collezione di molte tecniche, come nel caso della funzione di produzione neoclassica. In linea di principio il cambiamento tecnologico può influenzare ciascuna delle tecniche differentemente, portando ad una tecnologia interamente nuova. La situazione è più semplice se assumiamo che le differenti tecniche all'interno della tecnologia siano sottoposte alle stesse caratteristiche di cambiamento tecnologico.

Se tutte le tecniche in una tecnologia mostrano lo stesso grado di cambiamento tecnologico *labour saving*, il risultato è un cambiamento *labour* (*productivity*) *augmenting*, che è anche chiamato cambiamento neutrale di Harrod. Il cambiamento puramente *labour augmenting* può essere rappresentato moltiplicando l'input di lavoro nella funzione di produzione originaria del fattore $1+\gamma$.

$$F'(K,N)=F(K,(1+\gamma)N$$

Un altro modo di pensare al cambiamento tecnologico *labour augmenting* o neutrale di Harrod è un cambiamento di scala della misura dell'input di lavoro: ogni lavoratore dopo il cambiamento tecnologico produce come se il suo sforzo fosse potenziato da un fattore rappresentante la grandezza del cambiamento. Gli economisti spesso fanno questa trasformazione e si riferiscono all' *input di lavoro effettivo*, che significa moltiplicare il numero dei lavoratori in ogni anno per un fattore rappresentante il grado del cambiamento *labour augmenting* che ha avuto luogo dall anno base. Ogni lavoratore, dopo il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod è l'equivalente di più di un lavoratore effettivo dell'anno base. Se il saggio di salario aumenta della stessa proporzione della produttività del lavoro, il saggio di profitto rimane costante con il cambiamento tecnologico puramente *labour-augmenting*, e questa è la ragione per cui Harrod ha chiamato questo cambiamento tecnologico neutrale.

Il cambiamento tecnologico *capital augmenting* è definito analogamente al cambiamento tecnologico *labour augmenting*. In questo caso ogni unità di capitale agisce come se la sua produttività fosse moltiplicata per il fattore $1+\chi$.

Il cambiamento tecnologico *factor augmenting* consiste nella combinazione di una cambiamento *labour augmenting* e *capital augmenting* equivalenti, e può essere rappresentato moltiplicando l'intera funzione di produzione dal fattore $1+\gamma=1+\chi$, sotto l'assunzione che la funzione mostri rendimenti costanti di scala.

$$F'(K,N)=(1+\gamma)F(K,N)=F((1+\gamma)K,(1+\gamma)N)$$

Il cambiamento tecnologico *factor augmenting* è spesso chiamato *neutrale di Hicks*. Il cambiamento tecnologico *factor augmenting* può essere anche pensato come un cambiamento di scala dello stesso output. Le stesse quantità di lavoro e capitale producono più output, e questa è la ragione per cui Hicks considerò il cambiamento neutrale.

Si noti che questi vari tipi di cambiamento tecnologico neutrale assumono che *ciascuna* tecnica mostri lo stesso grado e tipo di cambiamento tecnologico. Questo non è necessariamente vero nella realtà, poiché il cambiamento tecnologico può influenzare alcune tecniche differentemente dalle altre.

E' utile distinguere i parametri γ e χ dai saggi di crescita g_x *e* g_ρ. Per la funzione di produzione di Leontief, che ha una sola tecnica, essi saranno equivalenti, ma per una funzione di produzione neoclassica x e ρ cambieranno non solo a causa del cambiamento tecnologico, ma anche per il cambiamento della tecnica in uso, cosicché g_x *e* g_ρ possono non essere uguali a γ e χ.