Capitolo 8
Il modello di crescita neoclassico

7.1 Il modello di Solow-Swan

Robert Solow e T. W. Swan indipendentemente l'uno dall'altro svilupparono un modello di crescita neoclassico per mostrare che il pieno impiego è compatibile con una crescita da *steady state*, cioè stabile. Il modello di Solow-Swan assume, come il modello calssico, che gli investimenti programmati e i risparmi programmati sono sempre identici, cosicché esso non affronta direttamente il problema della stabilità del sentiero effettivo di crescita. Il modello di Solow-Swan è ora una spiegazione teorica canonica del perché alcuni paesi crescono più velocemente di altri, e gioca un ruolo importante in molte discussioni politiche che si riferiscono al significato di lungo periodo dei risparmi e degli investimenti.

Il modello di Solow-Swan si completa assumendo la piena occupazione. Essa è raggiunta scegliendo la tecnica di produzione appropriata da una funzione di produzione, attraverso le variazioni del salario reale. Il modello di Solow-Swan assume anche che esista una famiglia rappresentativa tipica che risparmia e investe una frazione costante del suo reddito lordo.

7.2 La funzione di produzione intensiva

Quando si hanno rendimenti costanti di scala nella produzione un incremento proporzionale di tutti gli i servizi dei fattori produttivi ha come conseguenza un incremento dell'output della stessa proporzione. Se possiamo produrre una tonnellata di grano usando un quintale di grano come sementi ed un lavoratore, dovremmo essere in grado di replicare questo risultato impiegando un lavoratore in più con un ulteriore quintale di semi per produrre in totale due tonnellate di grano. Questo argomento rende attraente l'ipotesi dei rendimenti costanti. Ci sono tuttavia forti prove che la produzione reale sia sottoposta a *rendimenti crescenti di scala* perché è possibile adottare nuove tecniche di produzione che permettono una divisione del lavoro più dettagliata con una scala più larga di produzione.

Come abbiamo visto nel capitolo 2, i rendimenti costanti di scala ci permettono di lavorare con la funzione di produzione intensiva, cioè basata sull'intensità del capitale associato ad un'unità di lavoro, $x=f(k)$, che nel caso della funzione di Cobb-Douglas diviene $x=Ak^{\alpha}$. Il grafico di questa funzione, mostrato in figura 7.1, è concavo verso il basso. Si ricorda che la funzione di produzione di Cobb-Douglas, scritta nel modo usuale è $X=AK^{\alpha}N^{1-\alpha}$. Economicamente, la funzione intensiva di produzione mostra rendimenti marginali decrescenti: aumentando l'ammontare di capitale per lavoratore fa crescere il prodotto per lavoratore, ma gli incrementi sono progressivamente più piccoli. Questa è la ragione per cui la funzione è concava.

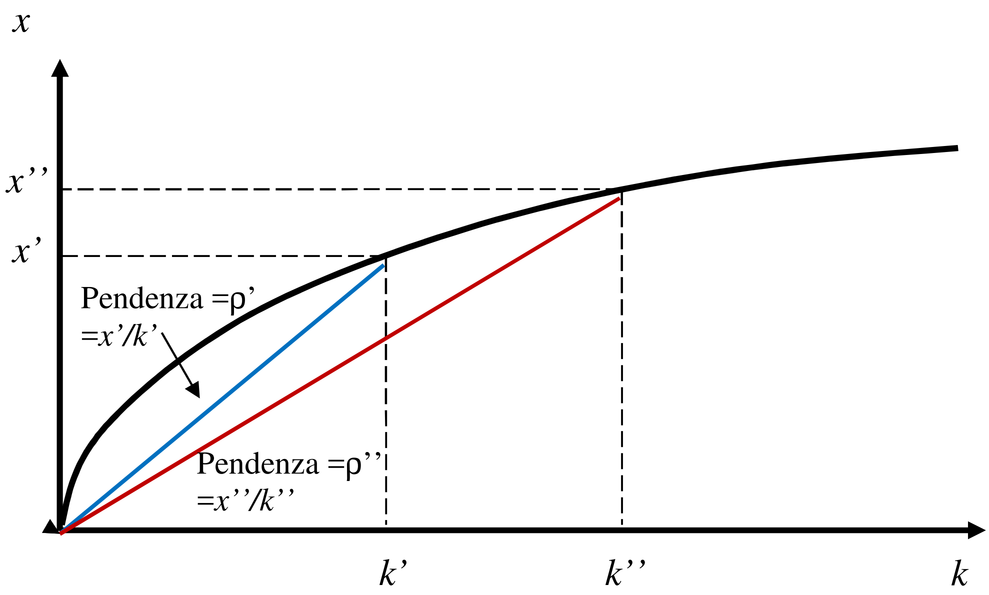

Figura 7.1: La funzione intensiva di produzione

La funzione di produzione neoclassica in generale e la funzione di produzione di Cobb-Douglas in particolare può essere vista come il risultato dell'incremento del numero di tecniche disponibili fino al punto in cui c'è un continuo infinito di tecniche. Per questo motivo ogni punto nella funzione di Cobb Douglas rappresenta una singola tecnica (x, ρ). Una tecnica possibile è stata indicata dalla curava blu nella figura 7.1. La pendenza della curva fino al valore della intensità di capitale k' rappresenta il saggio prodotto capitale ($\rho = x/k$) per quella tecnica.

Mentre la teoria classica del cambiamento tecnico vede l'adozione di tecniche con più intensità di capitale come il risultato storico dell'innovazione tecnologica, la funzione di produzione neoclassica implica che un ampio spettro di tecniche di qualsiasi intensità di capitale sono state già inventate e sono disponibili in ogni dato periodo.

Un importante corollario dell'assunzione dei rendimenti marginali decrescenti del capitale è che la produttività del capitale, il saggio prodotto-capitale ρ è una funzione decrescente del rapporto tra capitale e lavoro k . Questo punto può essere visto geometricamente nella figura 7.1: il raggio che parte dall'origine e giunge alla al livello di prodotto per unità di lavoro ha una pendenza minore per la curva 1 (curva blu) che per la curva 2 (curva rossa). La curva rossa ha quindi un valore più alto per quanto riguarda il capitale per unità di prodotto della curva rossa ($k'' > k'$), ma rappresenta un valore minore per quanto riguarda il rapporto prodotto capitale ($\rho'' < \rho'$).

Nel caso della funzione di produzione di Cobb Douglas, la relazione tra la produttività del capitale e l'intensità del capitale è descritta dalla funzione $\rho = Ak^{\alpha-1}$, che è decrescente quando $\alpha < 1$.

Si ricorda che la funzione intensiva di Cobb Douglas è $x = Ak^{\alpha}$ e dunque $x/k = Ak^{\alpha-1}/k = Ak^{\alpha-1}$.

7.3 Risparmi, popolazione e crescita di steady state.

Il modello di crescita di Solow-Swan assume che nell'economia il risparmio sia una frazione costante, data, del reddito e che la popolazione e l'offerta di lavoro crescono ad un tasso costante esogenamente determinato. Si noti che il modello di Solow-Swan, assumendo che le famiglie salvino la stessa proporzione del loro reddito, sia esso formato da salari o profitti, astrae dalla distinzione tra lavoratori e capitalisti che è invece centrale nel modello classico.

$S = sX$

Qui S rappresenta il flusso di risparmio lordo e s è la frazione del prodotto lordo che è risparmiata, il tasso di risparmio, anche chiamato *propensione al risaprmio*. Si noti che il risparmio nel modello di Solow-Swan è una frazione costante *del flusso del prodotto*, piuttosto che una frazione costante dello stock di ricchezza come nel modello classico.

Il modello di Solow-Swan assume, come il modello classico, che il risparmio è identico all'investimento:

$K_{+1} - K = sX$

Dividendo entrambi i lati di questa equazione per K, si ottiene un'equazione per il saggio di accumulazione del capitale g_K

$$g_K = \frac{sX}{K} = s\rho \qquad (7.1)$$

Poiché il tasso prodotto-capitale ρ è una funzione decrescente del capitale per unità di lavoro, anche il tasso di accumulazione del capitale è una funzione decrescente del capitale per unità di lavoro. Nel caso della funzione di produzione di Cobb-Douglas, avremo:

$g_K = sAk^{\alpha-1}$

La funzione è mostrata nella figura 7.2

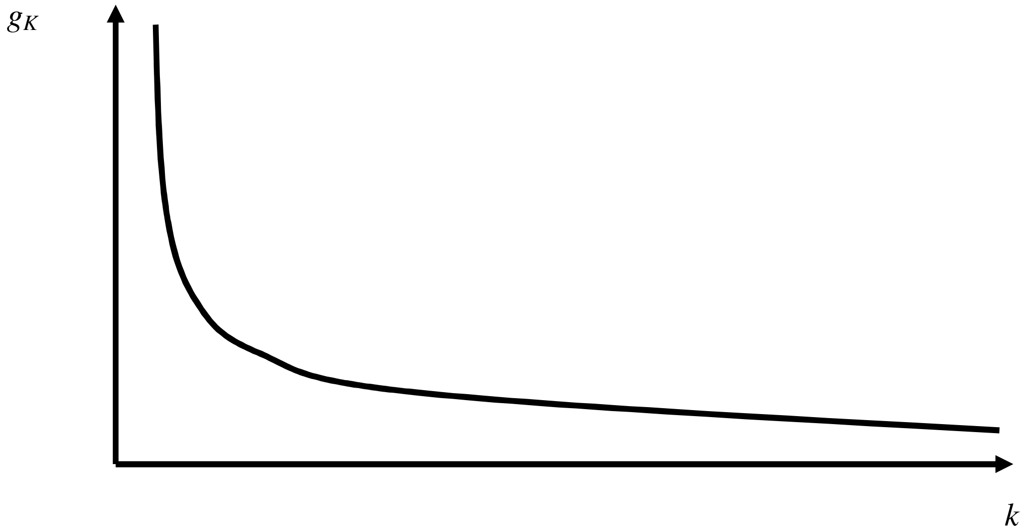

Figura 7.2: Il tasso di accumulazione del capitale è una funzione decrescente del rapporto capitale lavoro nel modello di crescita Solow-Swan

Il modello assume che la forza lavoro cresca ad un tasso costante *n*, che è un parametro esogeno nel modello. Il modello Solow-Swan assume che il lavoro sia pienamente impiegato in ogni momento. Il meccanismo che assicura che ogni eccesso di offerta di lavoro sia assorbito dalla domanda è il costante aggiustamento dei salari, cosicché la scelta della tecnica che massimizza il profitto da parte degli imprenditori crea una domanda di lavoro sufficiente ad assicurare la piena occupazione. Quando inizia ad apparire disoccupazione il salario reale diminuisce, incentivando gli imprenditori ad adottare tecniche maggiormente intensive di lavoro e a assumere lavoratori. L'esistenza di tecniche con intensità di capitale arbitrariamente alta o bassa come nel caso della funzione di produzione di Cobb-Douglas o di simili funzioni continue, garantisce che ci sarà sempre una tecnica che permette di raggiungere la piena occupazione, non importa quanto alto o basso sia lo stock di capitale ereditato dal passato.

Per poter prevedere la direzione della scelta delle tecniche in un contesto dinamico, dobbiamo sapere quale grandezza, tra l'offerta di lavoro o l'offerta di capitale, stia crescendo più velocemente.

Intuitivamente è facile capire che quando il tasso di accumulazione g_K è uguale al tasso di crescita dell'occupazione, l'intensità di capitale (il rapporto capitale-occupazione) resta costante.

Abbiamo quindi in questo caso:

$$s\rho = n \qquad (7.2)$$

e, nel caso della funzione di Cobb Douglas

$$sAk^{\alpha-1} = n$$

Supponiamo ora che sρ>n: il capitale cresce più rapidamente del lavoro (g_K>n) il salario è spinto verso l'alto, poiché la domanda di lavoro tende ad eccedere l'offerta, e tecniche a più alta intensità di capitale divengono profittevoli. Questo sentiero di aumento dell'intensità di capitale è conosciuto come *capital deepening*.

Nel caso opposto, quando l'offerta di lavoro cresce più del capitale, il salario tende a scendere perché si forma eccesso di offerta di lavoro. In questo caso le imprese sceglieranno tecniche di produzione a maggior intensità di lavoro.

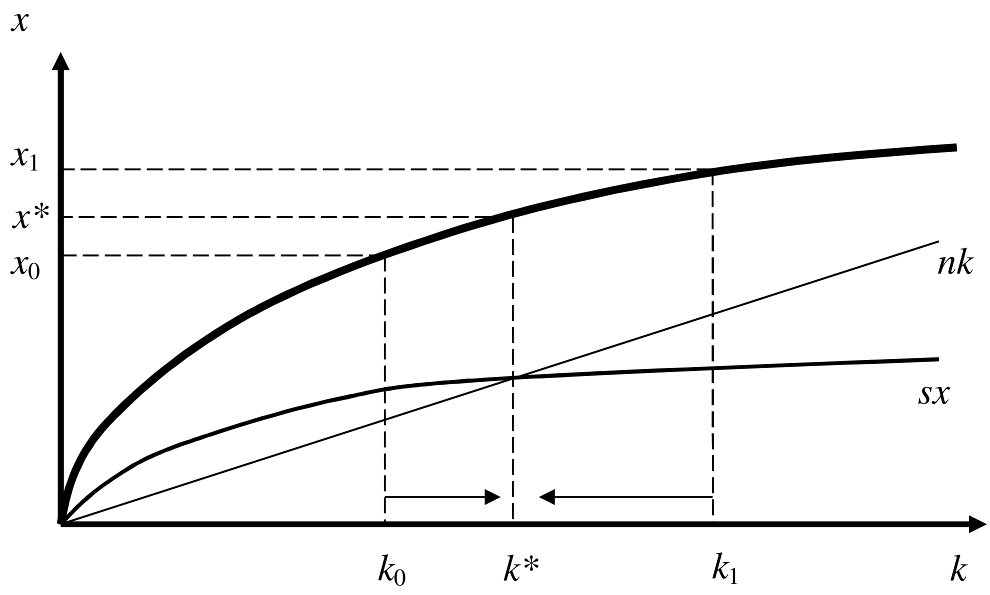

Figura 7.3: L'equilibrio *steady state* nel modello di Solow-Swan.

La figura 7.3 mostra la funzione di produzione di Cobb-Douglas, il risparmio per unità di lavoro $sx=sX/N$ e l'investimento per lavoratore che lascia inalterato il capitale per unità di lavoro nell'economia nk. Se infatti a livello aggregato l'investimento è pari a nK, il capitale è ricostruito e il nuovo capitale può equipaggiare i nuovi lavoratori lasciando inalterato il rapporto capitale-lavoro k. Il saggio di crescita del capitale in questo caso è appunto $g_K=n$. Ne deriva che l'investimento per unità di lavoro necessario a mantenere costante k, in un'economia in cui l'occupazione cresce al tasso n, è $nK/N=nk$.

Quando $nk=sx$ la curva di risparmio per unità di lavoro sx incontra la curva dell'investimento per unità di lavoro che lascia inalterato il capitale per unità di lavoro poiché $g_K= n$ e quindi il capitale per unità di lavoro resta costante: $g_k= 0$.

Se gli investimenti effettivi sX sono superiori agli investimenti che lasciano inalterato il capitale per unità di lavoro in condizioni di piena occupazione (nel grafico siamo a sinistra del punto di incontro tra le curve *sx* e *nk*)), la domanda di lavoro tende a salire più dell'offerta, i salari crescono e gli imprenditori tendono ad aumentare il rapporto capitale lavoro, cioè a adottare tecniche a più alta intensità di capitale, quindi *k* cresce. Il caso opposto avviene quando gli investimenti sono minori di quelli che lascerebbero inalterato il rapporto capitale lavoro in condizioni di piena occupazione (siamo a destra del punto di incontro tra le curve *sx* e *nk*): si crea disoccupazione e diminuisce il saggio di salario, rendendo più vantaggiose le tecniche ad alta intensità di lavoro, cioè che richiedono un *k* minore che quindi diminuisce. Si crea quindi un equilibrio quando al livello *k** del capitale per unità di lavoro gli investimenti per unità di lavoro sono esattamente uguali a *nk* e *k* rimane stabile.

Dall'equazione 7.2, possiamo scrivere:

$$s\rho = n$$

$$s\frac{x^*}{k^*} = n$$

$$sx^* = k^* n$$

$$k^* = \frac{s}{n}x^*$$

L'equazione mostra la relazione esistente tra intensità di capitale (k^*) e prodotto per unità di lavoro (x^*) in un'economia che cresce in condizioni di *steady state*. L'asterisco indica appunto che i valori delle variabili sono valori di *steady state*.

Nel caso della funzione di Cobb-Douglas possiamo definire esplicitamente i valori di k^* e x^*:

$$sAk^{*\alpha-1} = n$$

$$k^{*a-1} = \frac{n}{sA}$$

$$k^{*1-\alpha} = \frac{sA}{n}$$

$$k^* = \left(\frac{sA}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

e

$$x^* = Ak^{*\alpha}$$

La curva più spessa e più alta nella figura 7.3 mostra la produzione per unità di lavoro nella funzione di Cobb-Douglas. Le due curve più basse mostrano rispettivamente i risparmi per lavoratore e gli investimenti per lavoratore richiesti per mantenere lo stock di capitale per lavoratore costante. Quando le due curve si intersecano si determina l'intensità di capitale da *steady state* k^*. Corrispondentemente al livello dell'intensità di capitale da *steady state* k^* troviamo sulla funzione di Cobb-Douglas il livello di prodotto per unità di lavoro x^*

Lo *steady state* (k^*, x^*) è stabile, perché se l'economia parte da un livello più basso di capitale per lavoratore, come k_0 nella figura 7.3, il capitale crescerà più velocemente della forza lavoro e k cresce. Il contrario avviene quando l'economia parte da un'intensità di capitale alta come k_1. Le frecce vicino all'asse delle ascisse indicano la direzione del cambiamento nel tempo di k. Nel lungo periodo il sistema converge su (k^*, x^*).

7.4 Il modello di Solow-Swan e la scheda crescita-distribuzione

Il modello di Solow-Swan può essere analizzato per mezzo della curva crescita-distribuzione, come nelle figura 7.4 e 7.5.

Si ricordi che la frontiera di efficienza contiene le stesse informazioni della funzione intensiva di produzione: ogni tecnica è rappresentata da una curva distribuzione-sviluppo che ha un punto in comune con la frontiera. La tecnica che massimizza il profitto per ogni livello del salario reale w è rappresentata dalla curva crescita-distribuzione tangente alla frontiera nel punto corrispondente a w e la pendenza della curva è uguale al valore negativo del corrispondente tasso capitale-lavoro, k. Nel modello classico, il saggio di salario è dato esogneamente e determina la tecnica in uso e la sua intensità di capitale. Nel modello Solow-Swan, per contrasto, l'intensità di capitale $\bar{k}$ è data esogenamente in ogni periodo dalla crescita nel passato della popolazione e dall'accumulazione passata del capitale. Se la frontiera di efficienza è concava verso l'alto, come nella figura 7.4, vi sarà una tangente alla frontiera la cui pendenza è uguale a $-\bar{k}$. Questa tangente è la curva crescita distribuzione per la tecnica in uso, e determina il salario e il saggio di profitto per quel periodo. Il consumo per lavoratore è $c=(1-s)x$ e il tasso di crescita dello stock di capitale g_K è determinato dalla curva crescita-distribuzione.

La figura 7.4 mostra anche la crescita della forza lavoro n. Nel caso illustrato dalla figura il tasso di accumulazione del capitale g_K eccede n, cosicché l'intensità di capitale del periodo successivo, k_{+1} sarà più alta di k.

$k_{+1}= k+\Delta k=(1+g_K-n)k.$

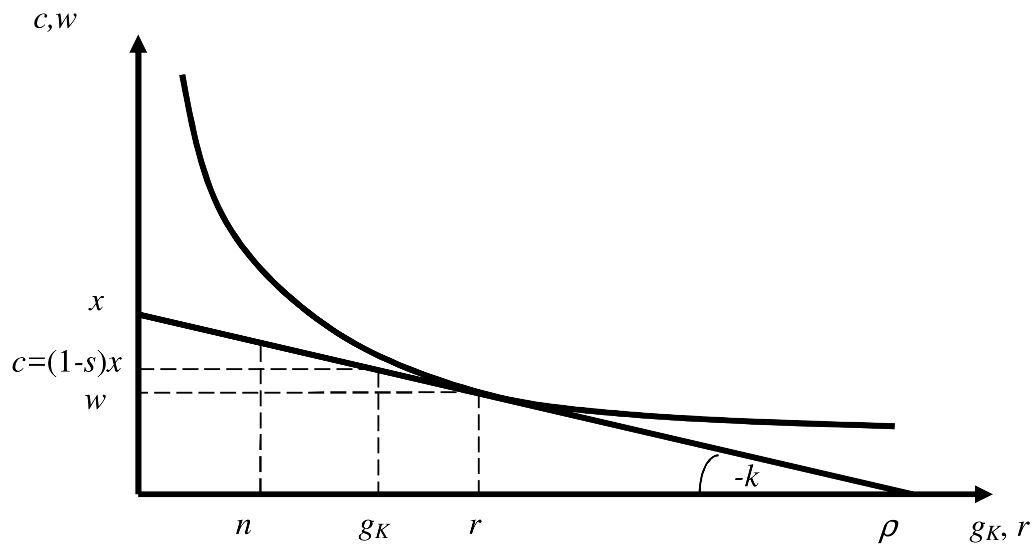

Figura 7.4: Il modello Solow-Swan prende il rapporto capitale –lavoro in ogni periodo $\overline{k}$ come dato esogenamente dalla crescita della popolazione e dall'accumulazione del capitale verificatesi nel passato. La tecnica in uso, il saggio di salario e il saggio di profitto sono determinati dal punto nella frontiera di efficienza in cui il valore della pendenza della tangente è uguale a – $\overline{k}$. La propensione al risparmio s determina il consumo per lavoratore e il tasso di crescita dello stock di capitale.

Dunque, in questo caso, nel periodo successivo l'economia si muoverà verso un punto lungo la frontiera di efficienza con una pendenza maggiore, il saggio di profitto più basso il salario reale più alto e il tasso di accumulazione più basso. Questo processo continuerà fino a quando l'economia raggiunge *l'intensità del capitale dello steady state k**. Lo *steady state* è rappresentato nella figura 8.5, che mostra la frontiera di efficienza e la curva crescita distribuzione associata con la tecnica dello *steady state*. La pendenza della curva è uguale al valore negativo dell'intensità di capitale dello *steady state*, o - $\overline{k}$. L'intercetta verticale eguaglia la produttività del lavoro dello *steady state* x^* e l'intercetta orizzontale eguaglia il rapporto reddito capitale dello *steady state* ρ^*.

Una volta che qualsiasi tecnica produttiva sia stata scelta dagli imprenditori, la sua curva di crescita-distribuzione determina il *trade-off* tra consumo sociale per lavoratore e sviluppo. Nello *steady state*, il saggio di crescita del capitale sarà il saggio di crescita esogenamente determinato della forza lavoro, n. Il saggio di crescita del prodotto aggregato, poiché $X=xN$, sarà dato dalla crescita del prodotto per unità di lavoro e della occupazione. Poiché nello *steady state* x^* è costante, anche il saggio di crescita del prodotto è uguale a l tasso di crescita della popolazione: $g_X=n$.

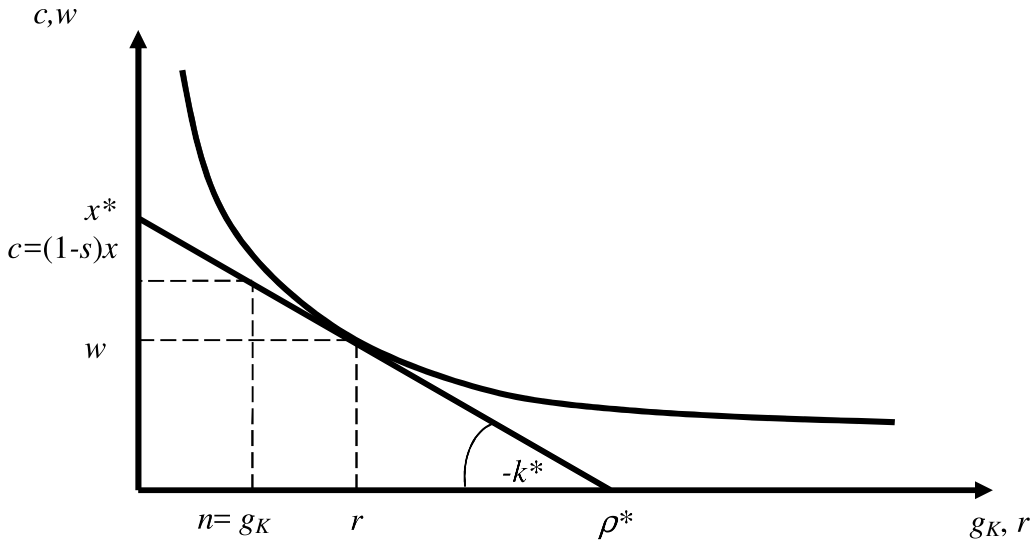

Figura 7.5: Il modello di Solow-Swan raggiunge uno *steady state* quando l'intensità di capitale sale al punto in cui i risparmi finanziano abbastanza investimenti da recuperare il deprezzamento e da eguagliare la crescita della forza lavoro.

7.5 Il modello completo

Sciviamo il modello di crescita in equilibrio di *steady state*.

L'intensità di capitale in condizione di crescita di *steady state* nel modello di Solow-Swan k^* è definita dalla condizione $g_k=sf(k^*)-nk^*=0$, dove ovviamente $sf(k^*)=sx^*$. Le condizioni di steady state per una funzione generale di produzione sono riportate nella tavola 7.1.

Con la funzione di produzione di Cobb-Douglas, possiamo usare queste equazioni per risolvere esplicitamente le variabili di *steady state* in termini dei parametri esogeni nella tabella 7.2.

Tabella 7.1 **La crescita di *steady state* nel modello Solow-Swan**	
Variabili endogene: $k^*, x^*, w^*, r^*, c^*, g^*_K$	
Parametri esogeni: s, n	
$sf(k^*)-nk^*=0$	(7.3)
$x^*=f(k^*)$	(7.4)
$r^*=f'(k^*)$	(7.5)
$c^*=(1-s)x^*$	(7.6)
$w^*=x^*-r^*k^*$	(7.7)
$g^*_K=n$	(7.8)

Tabella 7.2 **La crescita di steady state nel modello Solow-Swan con la funzione di produzione di Cobb-Douglas**	
Variabili endogene: k^*, x^*, w^*, r^*, c^*, ρ^*, g_K^* Parametri esogeni: A, α, s, n	
$k^* = \left(\frac{sA}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$	(7.9)
$x^*=Ak^{*\alpha}$	(7.10)
$\rho^*=Ak^{\alpha-1}$	(7.11)
$w^*=(1-\alpha)x^*$	(7.12)
$r^*=\alpha\rho^*$	(7.13)
$c^*=(1-s)x^*$	(7.14)
$g_K^*=n$	(7.15)

7.6 Statica comparata e la *Golden Rule*

Come con il modello classico, è utile comparare un equilibrio di *steady state* nel modello di Solow-Swan con un altro equilibrio, quando solo un parametro del modello è cambiato. Questa comparazione può essere sviluppata per mezzo dei grafici presentati nella sezione 7.3 e per mezzo delle equazioni del modello con la funzione di Cobb-Douglas della sezione 7.5.

Per esempio, consideriamo gli effetti di un incremento della propensione al risparmio da s a s'. Un incremento nella propensione al risparmio incrementa il risparmio per lavoratore per ogni livello del rapporto capitale-lavoro k, come mostrato nella figura 7.6. Nel nuovo equilibrio di *steady state* l'intensità di capitale sarà perciò più alta. Con più capitale per lavoratore, l'economia raggiunge un prodotto per unità di lavoro più alto.

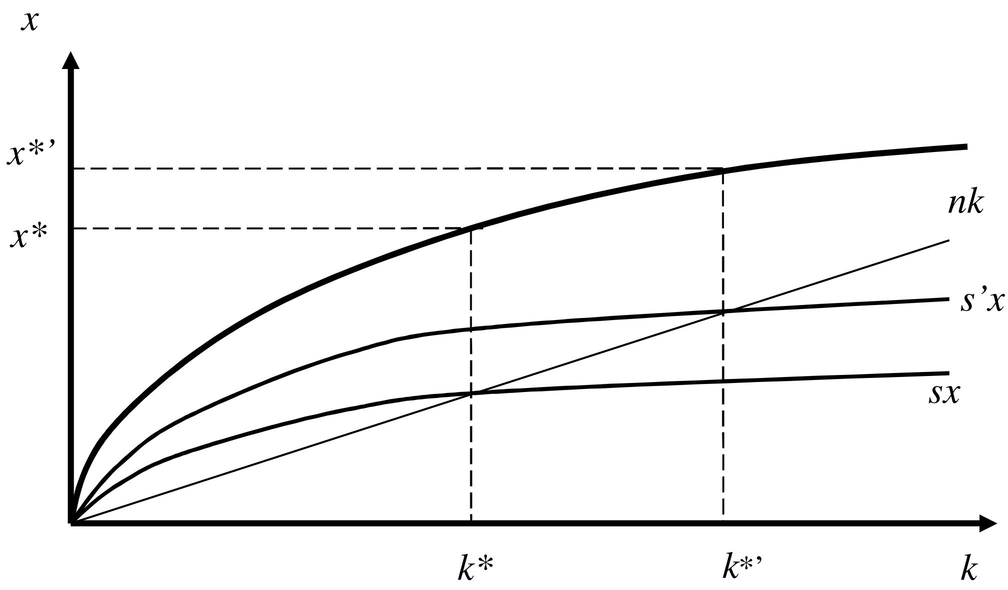

Figura 7.6: gli effetti di una crescita nella propensione al risparmio sull'equilibrio di *steady state* nel modello di Solow-Swan

E' importante capire che l'incremento nella propensione al risparmio non influenza il tasso di crescita di *steady state*, che nel lungo periodo è determinato al di fuori del modello, dal tasso di crescita esogeno della popolazione *n*. Questo risultato in qualche modo sorprendente è determinato dalla caratteristica di fondo del modello, che è si risolve in una *teoria della crescita esogena*, in cui il tasso di crescita è determinato dalla crescita esogena di un input della produzione, nel nostro caso il lavoro. L'incremento del risparmio ha come conseguenza solo un aumento temporaneo della crescita economica, nel periodo in cui il sistema converge verso un nuovo equilibrio di steady state.

Un incremento del tasso di risparmio ha però conseguenze compensative nel consumo sociale per unità di lavoro di steady state. Da una parte l'incremento della produttività del lavoro conseguente alla più alta intensità di capitale causata dalla cresciuta propensione al risparmio tende a far crescere il consumo sociale per lavoratore. Dall'altra parte, però, la crescita della propensione al risparmio tende a far diminuire direttamente il consumo sociale per lavoratore. Ci si può chiedere quale di queste due tendenze prevale alla fine. In realtà c'è un solo equilibrio di *steady state* al quale il consumo sociale per lavoratore è massimizzato nel modello di Solow-Swan. Quando l'intensità del capitale è bassa, un incremento dell'intensità di capitale tende a far crescere il consumo sociale per lavoratore. Infatti, con bassa intensità di capitale la produttività marginale è alta, il prodotto per unità di lavoro cresce in modo consistente e l'effetto sulla produzione tende a prevalere. Viceversa, quando l'intensità del capitale è alta, la sua produttività marginale è bassa, cosicché il prodotto cresce di poco quando k aumenta. Di conseguenza, in questo caso un incremento della propensione al risparmio ha come conseguenza una diminuzione del consumo per lavoratore.

Edmund Phelps ha chiamato lo stock di capitale per lavoratore di equilibrio al quale il consumo sociale per lavoratore è massimizzato lo stock di capitale della "regola d'oro" (*the Golden Rule*). L'equilibrio di *Golden Rule* che massimizza il consumo sociale per unità di lavoro è quello al quale il saggio di profitto r eguaglia il tasso di crescita della popolazione, cioè $r=n$.

Nell'equilibrio di steady state, come sappiamo, $sx(nk^*$, cioè $sf(k^*)=nk^*$. Poiché $c=(1-s)f(k^*)$ (il consumo sociale per unità di lavoro è uguale alla propensione al consumo moltiplicata per il prodotto per unità di lavoro), ad ogni diverso livello della propensione al risparmio corrisponde un diverso equilibrio di *steady state*, come abbiamo visto nella figura 7.6. Tra tutti i possibili *steady state* ne esiste uno e uno solo che massimizza il consumo sociale per lavoratore, in corrispondenza di una particolare propensione al risparmio che chiameremo s_G.

Il consumo per unità di lavoro c può essere determinato anche come la differenza tra il prodotto per unità di lavoro x e la parte del prodotto che permette di fornire i nuovi lavoratori, che stanno crescendo al tasso n, dello stock di capitale di *steady state*. Abbiamo quindi: $c=f(k^*)-nk^*$. Questa funzione si massimizza ponendo uguale a zero la derivata per k, cioè ponendo $f'(k)-n=0$. Come sappiamo, la derivata della funzione intensiva di produzione è il prodotto marginale del capitale, che è uguale al saggio di profitto lordo. Ne deriva che la *Golden Rule* è soddisfatta quando $r=n$. Di conseguenza il consumo sociale per unità di lavoro coincide con il saggio di salario. Infatti $w=x-rk^*$ e quando vale la *Golden Rule* possiamo sostituire r con n: $w=f(k^*)-nk^*$. La parte a destra del segno uguale dell'equazione non è altro che la funzione del consumo scritta sopra. Di conseguenza, quando è rispettata la *Golden Rule* si avrà $w=c$.

Se utilizziamo la funzione di produzione di Cobb-Douglas possiamo scrivere la funzione del consumo sociale: $c=\mathrm{A}k^{\alpha}-nk$. Questa funzione è massimizzata quando $\alpha Ak^{\alpha-1}-n=0$ cioè quando $\alpha Ak^{\alpha-1}=n$. Ma come sappiamo il termine a sinistra del segno uguale è la produttività marginale del capitale, cioè il saggio di profitto r.

L'incremento della propensione al risparmio ha sempre come conseguenza una diminuzione del saggio di profitto ed un incremento del saggio di salario. Infatti la crescita della propensione al risparmio fa aumentare il capitale per unità di lavoro. Poiché la produttività marginale del capitale è decrescente, il saggio di profitto con una più alta intensità di capitale cade e, di conseguenza, il saggio di salario cresce.

Capitolo 8
Il cambiamento tecnologico nel modello neoclassico

8.1 Il cambiamento tecnico e la funzione di produzione.

Il modello di Solow-Swan prevede che, poiché la funzione di produzione ha rendimenti marginali del capitale decrescenti, la crescita del prodotto per lavoratore cessa quando l'economia ha finalmente raggiunto l'equilibrio di *steady state*. Poiché nessuna economia avanzata mostra segni di aver raggiunto questo punto, il modello di Solow-Swan ha bisogno di essere sviluppato per spiegare la crescita del prodotto per lavoratore anche quando l'equilibrio di *steady state* è stato raggiunto. Questo può essere fatto, semplicemente assumendo l'operare di un cambiamento tecnologico esogeno.

I modelli di crescita con cambiamento tecnologico convergono verso lo *steady state* quando il cambiamento tecnologico è del tipo neutrale di Harrod, cioè comporta cambiamenti puramente *labour saving* in tutte le singole tecniche che compongono la funzione di produzione, senza effetti sulla "produttività del capitale" associata ad ogni tecnica. Per questo motivo il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod, quando è riferito all'intera funzione di produzione è chiamato cambiamento tecnologico *labour augmenting*, nel senso che aumenta *l'efficienza* del lavoro.

Ricordiamo che il cambiamento neutrale di Harrod comporta la crescita della produttività del lavoro, mentre il rapporto prodotto-capitale resta costante. Di conseguenza il capitale per unità di lavoro cresce proporzionalmente alla produttività del lavoro. Più precisamente il cambiamento tecnologico di Harrod è neutrale perché *lascia invariata la distribuzione del reddito tra lavoro e capitale, cioè le quote dei salari e dei profitti dopo la sua adozione*.

Il cambiamento neutrale di Harrod è illustrato nella figura 8.1, dove una singola tecnica particolare è individuata dalla retta che parte dall'origine. Il cambiamento neutrale di Harrod lascia invariato il rapporto prodotto capitale ρ. Di conseguenza, quando la produttività del lavoro cresce, spostando verso l'alto la funzione intensiva di produzione, è come se la vecchia tecnica (x, k), fosse sostituita da una nuova tecnica (x', k') illustrata dalla figura 8.1. Infatti il punto corrispondente alla nuova tecnica sulla funzione di produzione con cambiamento tecnologico giace sulla stessa retta che partendo dall'origine degli assi incontra anche la funzione di produzione originale nel punto corrispondente alla vecchia tecnica. Nel passaggio dalla vecchia alla nuova tecnica, quindi, il rapporto prodotto-capitale, che è la pendenza della retta che parte dall'origine, non varia. Lo stesso ragionamento vale per tutte le tecniche possibili, che quindi nel complesso, subiscono un mutamento neutrale di Harrod.

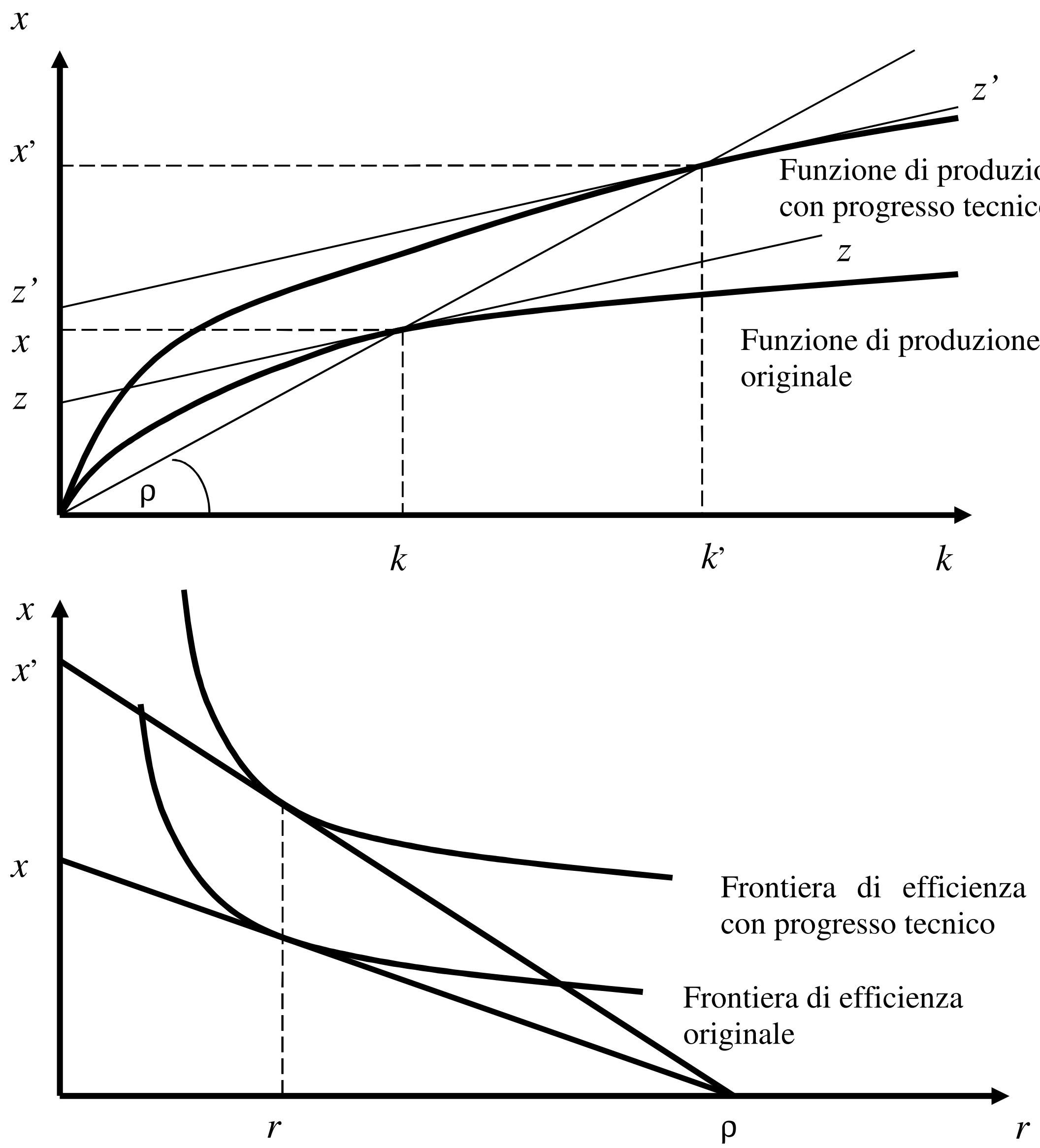

Figura 8.1 Il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod. La figura mostra la funzione di produzione che si sposta verso l'alto. Le tecniche corrispondenti hanno lo stesso rapporto prodotto capitale. Questo si vede tanto con la funzione di produzione, quanto con le frontiere di efficienza e le curve crescita-distribuzione relative, che hanno la stessa intercetta sull'asse delle ascisse.

Inoltre, nei punti che indicano le tecniche corrispondenti, con lo stesso rapporto prodotto-capitale, le due funzioni hanno la stessa pendenza. Poiché la pendenza delle funzioni di produzione rappresenta il prodotto marginale del capitale, le due tecniche corrispondenti hanno lo stesso prodotto marginale del capitale. Come abbiamo visto è conveniente adottare una tecnica che fa parte di una funzione di produzione quando il saggio di profitto è proporzionale alla produttività marginale del capitale. Di conseguenza se il saggio di profitto non varia, la tecnica più conveniente con la nuova funzione di produzione è proprio quella che mantiene lo stesso rapporto prodotto-capitale nel caso del progresso tecnologico neutrale di Harrod. Nella figura le pendenze delle funzioni di produzione nei punti corrispondenti alle due tecniche, rappresentate dalle rette parallele tangenti zz e z'z', non varia. La quota dei profitti sul reddito è data dall' equazione $\pi = r\rho$. Poiché il saggio di profitto non varia nel passaggio tra le due tecniche, mentre il capitale per unità di lavoro cresce proporzionalmente al prodotto per unità di lavoro, la quota dei profitti sul capitale resta costante nel passaggio tra le tecniche corrispondenti da una funzione all'altra, e quindi è rispettata la condizione di neutralità di Harrod.

La figura mostra anche la frontiera di efficienza e le curve crescita-distribuzione relative alle due tecniche associate secondo la classificazione del cambiamento tecnologico neutrale di Harrod. Come si vede le due tecniche hanno la stessa intercetta con l'asse delle ascisse, cioè il medesimo rapporto prodotto capitale, mentre l'intercetta con l'asse delle ordinate, cioè il prodotto per unità di lavoro, cresce in conseguenza della maggiore produttività del lavoro nel passaggio dalla vecchia tecnica alla nuova. Come si vede le due curve crescita-distribuzione sono tangenti alle frontiere di efficienza in corrispondenza dello stesso saggio di profitto.

In sostanza, data una tecnica nella funzione di produzione, il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod comporta una crescita al tasso γ del prodotto per unità di lavoro:

$x_{+1} = x(1+\gamma)$

Il rapporto prodotto capitale resta costante:

$\rho_{+1} = \rho$

Di conseguenza il capitale per unità di lavoro cresce allo stesso tasso del prodotto per unità di lavoro:

$k_{+1} = k(1+\gamma)$

Il saggio di salario cresce allo stesso tasso:

$w_{+1} = w(1+\gamma)$

Anche il consumo sociale per unità di lavoro cresce allo stesso tasso

$c_{+1} = c(1+\gamma)$.

Il saggio di profitto resta invece costante

$r_{+1} = r$

La quota dei profitti sui salari resta costante

$\pi_1 = (r_1 k_1)/x_1 = [rk(1+\gamma)]/x(1+\gamma) = rk/x = \pi$

La quota dei salari resta costante

$w_{+1}/k_{+1} = 1 - \pi_{+1} = 1 - \pi$

Come abbiamo visto nel capitolo 2, il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod è mostrato matematicamente dalla seguente uguaglianza, in cui $F(.)$ è la funzione di produzione originaria e $F'(.)$ la funzione che mostra il cambiamento tecnologico e $\hat{\gamma}$ il tasso di variazione della produttività del lavoro.

$F'(K,N)=F[K, (1+\hat{\gamma})N]$ (8.1)

Il cambiamento tecnologico neutrale di Hicks invece è espresso dalla seguente equazione, indicando con ζ il tasso di crescita della produttività del lavoro e del capitale:

$F'(K,N)=(1+\zeta)F(K, N)$

Nel caso della funzione di Cobb-Douglas, con il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod, il prodotto X nella nuova funzione di produzione è:

$X=AK^{\alpha}[(1+\hat{\gamma})N]^{1-\alpha}$ (8.2)

Nel caso del cambiamento tecnologico neutrale di Hicks avremo invece:

$X=(1+\zeta)AK^{\alpha}N^{1-\alpha}$

Nel caso della funzione di produzione di Cobb-Douglas un cambiamento tecnologico neutrale di Harrod è contemporaneamente anche un cambiamento tecnologico neutrale di Hicks. Infatti possiamo scrivere:

$AK^{\alpha}[(1+\hat{\gamma})N]^{1-\alpha}=(1+\hat{\gamma})^{1-\alpha}AK^{\alpha}N^{1-\alpha}$

In questa equazione $(1+\hat{\gamma})^{1-\alpha}=(1+\zeta)$

Il fatto che il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod è anche un cambiamento tecnologico neutrale di Hicks nel caso della funzione di produzione di Cobb-Douglas può essere interpretato intuitivamente nel seguente modo: per ciascuna delle tecniche di produzione che compongono la vecchia tecnologia possiamo individuare sulla nuova funzione di produzione sia una tecnica che ha una produttività del lavoro più alta, una intensità di capitale più alta, ma lo stesso rapporto prodotto capitale (cambiamento tecnologico neutrale di Harrod), sia un'altra tecnica che mostra una crescita proporzionale della produttività del lavoro e del capitale, ma che ha la stessa intensità di capitale (cambiamento tecnologico neutrale di Hicks).

Matematicamente è facile dimostrare che quando due tecniche hanno lo stesso rapporto prodotto-capitale (ρ) in due diverse funzioni di Cobb-Douglas che differiscono tra loro in conseguenza di un cambiamento tecnologico neutrale di Harrod, la produttività marginale del capitale è la stessa per entrambe le curve. Infatti, come sappiamo, la produttività marginale del capitale è $\alpha Ak^{\alpha-1}$. Considerando che $\rho= Ak^{\alpha-1}$ $PM_K=\alpha\rho$. Poiché il parametro α non cambia, come si vede dall'equazione (8.2), e per ipotesi ρ resta costante con il cambiamento tecnologico neutrale di

Harrod, le funzioni di produzione mantengono la stessa produttività marginale del capitale in corrispondenza delle tecniche corrispondenti.

Come nel capitolo 5, è conveniente riscrivere il modello di Solow-Swan con il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod in termini di "unità efficienza di lavoro". Continuiamo ad usare la tilde sopra una variabile per indicare la sua misurazione in termini di unità efficienza di lavoro. La forma matematica del modello di Solow-Swan rimane la stessa quando le variabili per lavoratore nelle corrispondenti variabili per unità di lavoro di efficienza. L'unità efficienza di lavoro $\tilde{N}$ è ottenuta moltiplicando il numero di lavoratori realmente impiegati al tempo 0 N per $(1+\hat{\gamma})^t$, cioè rappresenta la quantità di lavoro che sarebbe stata necessaria, prima del cambiamento tecnico, per ottenere il prodotto totale X^t. In altre parole definiamo la quantità di lavoro di efficienza come una variabile determinata sia dalla quantità di lavoro effettiva N che dalla sua qualità determinata dal progresso tecnico $(1+\hat{\gamma})$. Se quindi poniamo come unità efficienza un'unità di lavoro al tempo 0 al tempo 1 un'unità di lavoro effettivo vale $(1+\gamma)$ unità di lavoro di efficienza e al tempo t $(1+\hat{\gamma})^t$ unità.

La forza lavoro in unità efficienza, tenendo conto anche del tasso di crescita della popolazione, cresce ad un tasso pari a $(\hat{\gamma}+n)$. $(\hat{\gamma}+n)$ gioca lo stesso ruolo del saggio naturale di crescita n nel modello di base, quando consideriamo anche il cambiamento tecnologico esogeno. Le variabili misurate in termini di valore reale x, w, e c sono trasformate nelle corrispondenti variabili misurate in termini di unità efficienza di lavoro dividendole per $(1+\hat{\gamma})^t$. Infatti, poiché $x=X/N$, e per definizione $\tilde{x}=X/\tilde{N}=X/N(1+\hat{\gamma})^t$, allora $\tilde{x}=x/(1+\hat{\gamma})^t$.

La funzione intensiva di produzione di Cobb-Douglas con il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod può essere scritta nei seguenti termini:

$$\tilde{x}=A\tilde{k}^{\alpha}$$

$$\rho(\tilde{k})= A\tilde{k}^{\alpha-1}$$

Il modello neoclassico con cambiamento tecnologico neutrale di Harrod differisce concettualmente dal modello classico. L'approccio neoclassico considera la sostituzione tra capitale e lavoro come un processo di spostamento lungo una funzione di produzione statica o priva di tempo, mentre l'approccio classico la considera come un processo storico di scoperta di nuove tecniche. L'approccio neoclassico considera il cambiamento tecnologico come globale, nel senso che riguarda esattamente nello stesso modo tutte le tecniche, da quelle con poco capitale e molto lavoro a quelle con molto capitale e poco lavoro. L'approccio classico considera il cambiamento tecnico come una sequenza di miglioramenti localizzati delle tecniche storicamente in uso.

8.2 Lo *steady state* modello di Solow-Swan con il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod

Possiamo ora riformulare le equazioni sviluppate nel capitolo precedente utilizzando le definizioni delle variabili in unità efficienza di lavoro per riformulare il modello di Solow-Swan nel caso in cui vi sia mutamento tecnologico di Harrod.

Innanzitutto osserviamo che il tasso di crescita del prodotto aggregato in un sistema in *steady state* è dato dalla combinazione della crescita della forza lavoro occupata e dalla crescita della produttività del lavoro. Come abbiamo già visto:

$g_X=\hat{\gamma}+n$

La condizione di *steady state* nel modello senza cambiamento tecnologico è, come abbiamo visto, la invariabilità dell'intensità del capitale. Nel caso del progresso tecnologico esogeno questa condizione non è più valida, dato che per definizione il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod conduce alla crescita di k. Tuttavia possiamo interpretare in questo caso lo *steady state* come quella situazione di equilibrio dinamico in cui il sistema cresce mantenendo le stesse proporzioni. In particolare, come abbiamo visto nella figura 8.1, il sistema economico passa da una tecnica giacente su una determinata funzione di produzione alla tecnica corrispondente sulla nuova funzione di produzione lasciando invariato ρ, cioè il rapporto prodotto reddito, e il prodotto marginale del capitale. Perché questo possa accadere, per definizione la produttività del lavoro e l'intensità di capitale devono crescere allo stesso tasso $\hat{\gamma}$. Espressa in termini di unità efficienza di lavoro, invece, l'intensità del capitale resta costante. Vediamo a quali condizioni questo può accadere.

Come si ricorderà la condizione di equilibrio di *steady state* era: $s\rho=n$, (si ricordi che $s\rho$ è il tasso di accumulazione del capitale) che indica che la crescita dello stock di capitale permette di equipaggiare ciascun nuovo lavoratore con un capitale per unità di lavoro costante. Considerando che la crescita nel nuovo modello non dipende solo dal tasso di crescita esogeno della popolazione, ma anche dal tasso di crescita esogeno della produttività del lavoro, la condizione di crescita di *steady state* è,

$$s\rho=n+\hat{\gamma} \qquad (8.3)$$

In questo caso lo stock di capitale cresce in modo da accrescere la dotazione di capitale per lavoratore, considerando anche la nuova occupazione, al tasso $\hat{\gamma}$. L'investimento per unità di lavoro che permette di rispettare questa condizione è $(n+\hat{\gamma})k$.

Come sappiamo, il cambiamento tecnologico neutrale di Harrod implica una crescita del valore del prodotto per unità di lavoro reale pari a $\hat{\gamma}$. Poiché ρ resta costante anche il capitale per unità di lavoro deve crescere allo stesso tasso e quindi, quando vale la condizione scritta sopra, $\tilde{k}=k/(1+\hat{\gamma})^t$ resta costante. In altre parole $\tilde{k}$ non cambia da un equilibrio di breve periodo ad un altro (ovvero la variabile misurata in termini di lavoro reale k cresce ad un tasso costante) e siamo in una condizione di *crescita* di *steady state*. La differenza tra l'equilibrio di *steady state* senza cambiamento tecnologico e l'equilibrio di *steady state* con cambiamento tecnologico neutrale di Harrod è che nel primo caso k resta costante, nel secondo cresce al tasso costante $\hat{\gamma}$.

La somiglianza tra la condizione di equilibrio di *steady state* senza considerare il cambiamento tecnologico e la condizione che $\tilde{k}$ resti costante nel modello con cambiamento tecnologico ci suggerisce che è semplice estendere la maggior parte dell'apparato analitico sviluppato nel capitolo precedente, definendo le variabili in termini di unità efficienza di lavoro. Come nel capitolo precedente, l'equazione (8.3) ci permette di affermare che l'economia converge verso un equilibrio di *steady state* ($\tilde{x}^*$, $\tilde{k}^*$), quando la funzione di produzione esibisce rendimenti marginali decrescenti del capitale. L'intensità di capitale equivalente di equilibrio $\tilde{k}^*$ e la produttività del lavoro equivalente di equilibrio $\tilde{x}^*$ sono in relazione tra loro secondo l'equazione:

$$\tilde{k}^* = \frac{s}{n+\hat{\gamma}}\tilde{x}^*$$

La soluzione dei valori di $\tilde{x}^*$ e $\tilde{k}^*$ con la funzione di produzione di Cobb-Douglas è

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{sA}{n+\hat{\gamma}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\tilde{x}^*=A(\tilde{k}^*)^{\alpha}$$

L'equilibrio è mostrato nella figura 8.3 che mostra come possiamo continuare ad usare lo stesso apparato geometrico sviluppato nel capitolo 7, una volta che misuriamo le variabili in termini di unità efficienza di lavoro.

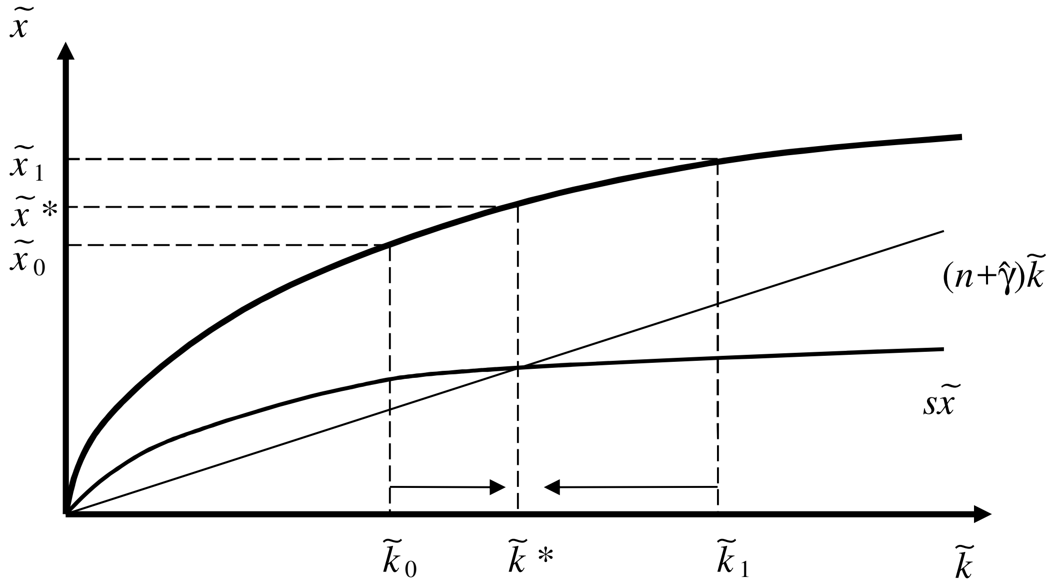

Figura 8.3: Il modello di Solow-Swan con cambiamento tecnologico neutrale di Harrod

Il ragionamento che dimostra come il sistema tenda effettivamente all'equilibrio di *steady state* è lo stesso di quello svolto nel modello senza cambiamento tecnologico. Se gli investimenti effettivi sono superiori a quelli che renderebbero la crescita dello stock di capitale coerente con il tasso di crescita esogeno dell'economia, determinato dalla crescita della offerta di lavoro e della produttività del lavoro, cioè ci troviamo a destra di $\tilde{k}^*$, si crea una scarsità di offerta di lavoro, i salari tendono a crescere e gli imprenditori sono incentivati a adottare tecniche in cui il rapporto prodotto capitale cresce ad un tasso superiore a $\hat{\gamma}$. Viceversa, se gli investimenti effettivi sono inferiori a quelli che renderebbero la crescita dello stock di capitale coerente con il tasso di crescita esogeno dell'economia, cioè ci troviamo a sinistra di $\tilde{k}^*$, si crea un eccesso di offerta di lavoro, i salari tendono a diminuire e gli imprenditori sono incentivati ad adottare tecniche in cui il rapporto prodotto capitale cresce meno di $\hat{\gamma}$. Il sistema trova il suo sentiero di crescita in equilibrio di *steady state* quando gli investimenti effettivi sono esattamente uguali a quelli che rendono la crescita dello stock di capitale coerente con il tasso di crescita esogeno dell'economia.

Occorre comunque ricordarsi che nello *steady state* il prodotto per unità efficienza di lavoro è costante, mentre il prodotto per lavoratore reale cresce al tasso $\hat{\gamma}$. Allo stesso modo anche l'intensità di capitale reale sale al tasso $\hat{\gamma}$, nonostante l'intensità del capitale misurata in termini unità efficienza di lavoro resti costante. Il prodotto aggregato e il capitale aggregato si espandono al tasso naturale $n+\gamma$.

9.3. Statica comparata di *steady state* nel modello di Solow-Swan

Nell'analizzare lo *steady state* nel modello con cambiamento tecnologico neutrale di Harrod, le variabili endogene sono $\tilde{k}^*$, $\tilde{x}^*$, r^*, $\tilde{w}^*$, g_K^* e $\tilde{c}^*$. I parametri esogeni, data la funzione di produzione $f(.)$, sono n, $\hat{\gamma}$, e s. L'analisi comparata di diversi *steady state* studia questo problema: quale effetto ha sulle variabili endogene il cambiamento di un parametro esogeno? Questa analisi è svolta comparando gli *steady state* prima e dopo il cambiamento, sia risolvendo la soluzione matematica che interpretando il grafico rilevante. Le equazioni per lo *steady state* del modello di Solow-Swan con cambiamento tecnologico neutrale di Harrod e la funzione di produzione di Cobb Douglas sono:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{sA}{n+\hat{\gamma}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$x^*=A(\tilde{k}^*)^{\alpha}$$

$$\rho^*= A(\tilde{k}^*)^{\alpha-1}$$

$$\tilde{w}^*= (1-\alpha)\, \tilde{x}^*$$

$$r^*=\alpha\rho^*$$

$$\tilde{c}^*=(1-s)\, \tilde{x}^*$$

$$g_K^*=n+\hat{\gamma}$$

Una possibile spiegazione per il declino nella crescita della produttività del lavoro sperimentata da molte economie sviluppate negli ultimi anni è la diminuzione del saggio di variazione del cambiamento tecnologico *labour augmenting*. E' istruttivo analizzare gli effetti di un declino del saggio di crescita di $\hat{\gamma}$, sul sentiero di crescita in equilibrio di *steady state* nel modello di Solow-Swan.

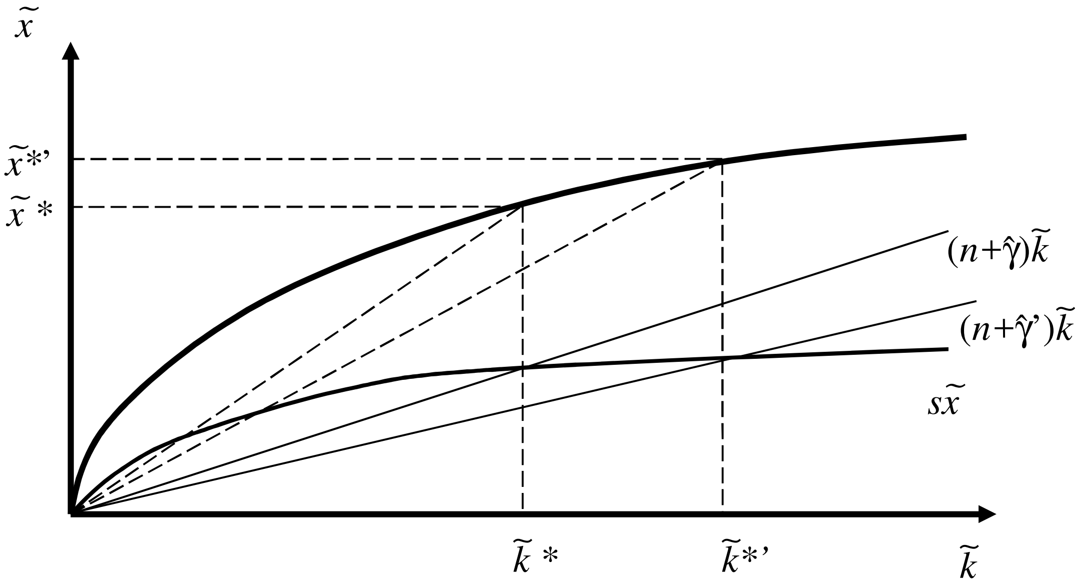

Figura 8.4: la diminuzione della crescita della produttività del lavoro nel modello di Solow e Swan

Nella figura 8.4 è rappresentato il vecchio e il nuovo equilibrio di *steady state* con il vecchi e il nuovo saggio di cambiamento tecnico $\hat{\gamma}$ e $\hat{\gamma}'$. Si ricordi che le quantità misurate sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate sono il capitale e il prodotto per unità efficienza di lavoro. Un tasso ridotto di cambiamento tecnico neutrale alla Harrod fa ruotare la retta che rappresenta l'investimento richiesto per unità di lavoro di efficienza verso il basso. Dunque un più basso $\hat{\gamma}$ induce un aumento del capitale per unità di lavoro di efficienza.

La crescita del capitale per unità di lavoro di efficienza riduce il prodotto marginale del capitale, in conformità con il principio dei rendimenti marginali decrescenti. Come si può vedere dalle rette tratteggiate che partono dall'origine e raggiungono i punti rilevanti sulla funzione di produzione, lala cui pendenza rappresenta il rapporto prodotto-capitale, ρ diminuisce a causa del rallentamento dell'incremento della produttività del lavoro. Questo cambiamento può essere analizzato anche attraverso il grafico della frontiera di efficienza. La figura 8.5 mostra la frontiera di efficienza con le grandezze misurate in termini di unità efficienza di lavoro.

Possiamo vedere che l'economia è spinta verso l'alto lungo la sua frontiera di efficienza, e il salario misurato in termini di unità di efficienza di lavoro cresce.

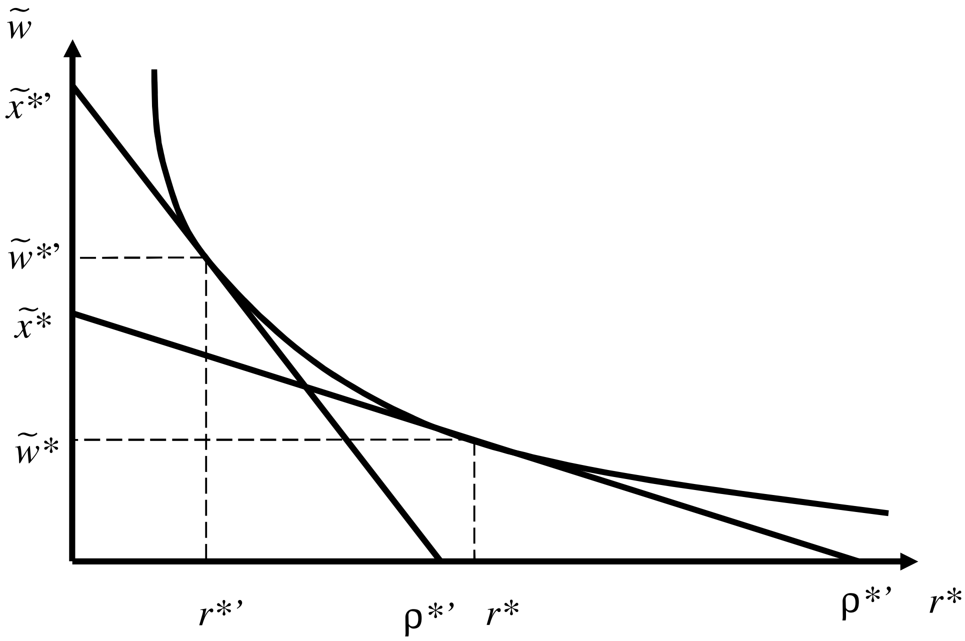

Figura 8.5: il saggio di salario di *steady state* misurato in termini di unità di lavoro di efficienza cresce con un rallentamento della crescita della produttività del lavoro.

Attenzione però a non confondere l'andamento delle quantità misurate in termini di unità efficienza di lavoro con le quantità misurate in lavoro reale. Infatti in questo caso abbiamo la situazione piuttosto paradossale che la crescita del salario effettivamente ricevuto da ciascun lavoratore reale rallenta, mentre il saggio di salario misurato in termini di unità di lavoro di efficienza cresce. Si può capire il paradosso ricordandoci che le grandezze in termini di unità efficienza di lavoro non sono altro che le grandezze misurate in termini di lavoro reale divise per $1+\hat{\gamma}$. Se $\hat{\gamma}$ diminuisce, $\tilde{w}^* = w/(1+\hat{\gamma})$ cresce, ma poiché il tasso di crescita del salario è $\hat{\gamma}$, la sua crescita diminuisce.

Similmente la crescita del prodotto per lavoratore rallenta, mentre il prodotto misurato in termini di unità efficienza di lavoro cresce.

Occorre quindi sottolineare la necessità di distinguere gli effetti dell'analisi di dinamica comparativa sulle variabili misurate in termini di lavoro reale e di unità efficienza di lavoro.

Per comparare i risultati del modello ai dati delle economie reali, guardiamo all'andamento dei tassi di crescita del prodotto per unità di lavoro (reale) e del salario reale nelle usuali economie che abbiamo studiato in questo corso.

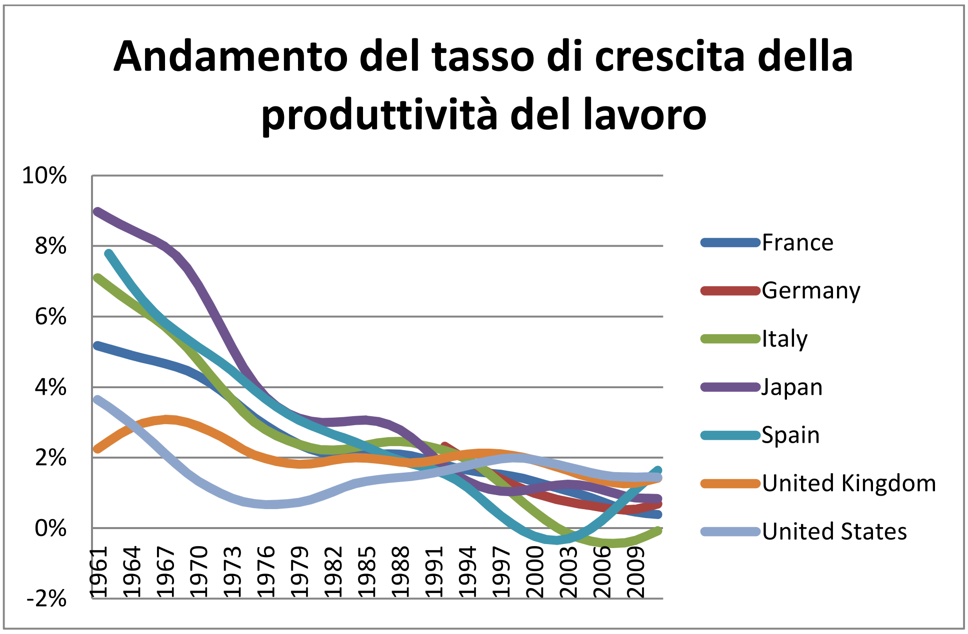

Grafico 8.1: Fonte OCSE. I dati sono stati filtrati con il metodo Holdrick-Prescott per eliminare le oscillazioni di breve periodo.

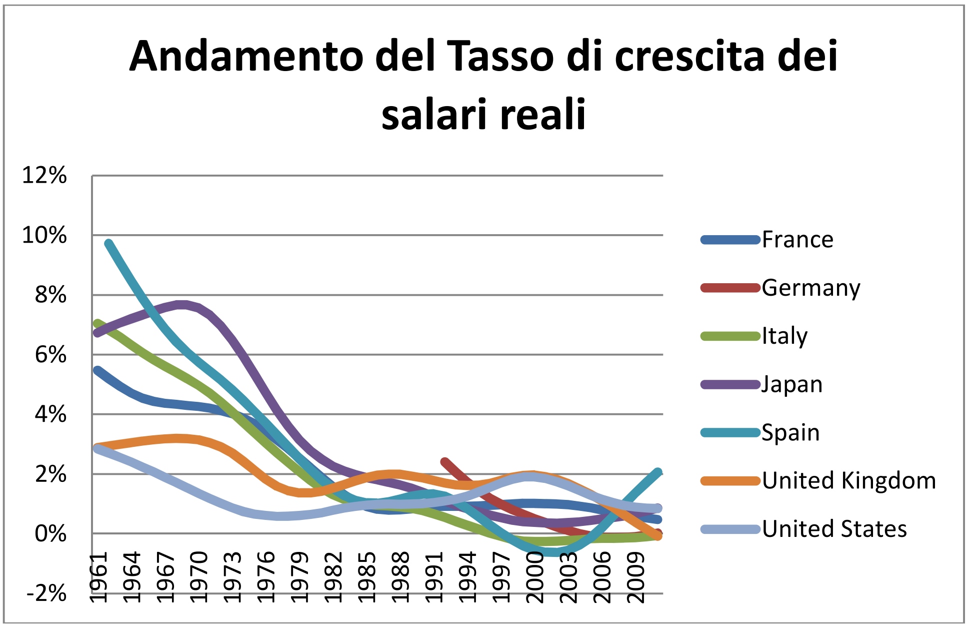

Grafico 8.2: Fonte OCSE. I dati sono filtrati con il metodo Holdrick-Prescott per eliminare le oscillazioni di breve periodo.

Come si vede dal grafico 8.1 le economie hanno sperimentato dal 1960 tassi via via minori di crescita della produttività del lavoro. Il fenomeno è meno accentuato per le economie anglo-sassoni. In particolare gli Stati Uniti d'America hanno visto il tasso di crescita del PIL per addetto diminuire notevolmente nel decennio 1960 e nella prima parte degli anni 70. Dalla fine degli anni 70 al 2000 i tassi sono stati crescenti e hanno ripreso a diminuire successivamente. Per gli altri paesi la diminuzione dei tassi, pur con oscillazioni, è stata più consistente.

Anche i tassi di crescita dei salari reali hanno subito un andamento simile decrescente. Questi andamenti sono compatibili con le conclusioni che abbiamo visto sopra per il modello di Solow-Swan con cambiamento tecnologico che rallenta.

Infine nel grafico 8.3 sono mostrati gli andamenti del tasso di crescita del capitale per lavoratore. L'andamento delle curve non coincide con l'andamento del rapporto prodotto-lavoro, anche se è chiaramente collegato a questo andamento. In particolare, mentre per la maggior parte dei paesi è chiaro un andamento decrescente, gli Stati Uniti mostrano un andamento del tasso moderatamente crescente fino al 2000, e solo in seguito un andamento più marcatamente decrescente. Per il Regno Unito il tasso di crescita del capitale per lavoratore è in media stabile.

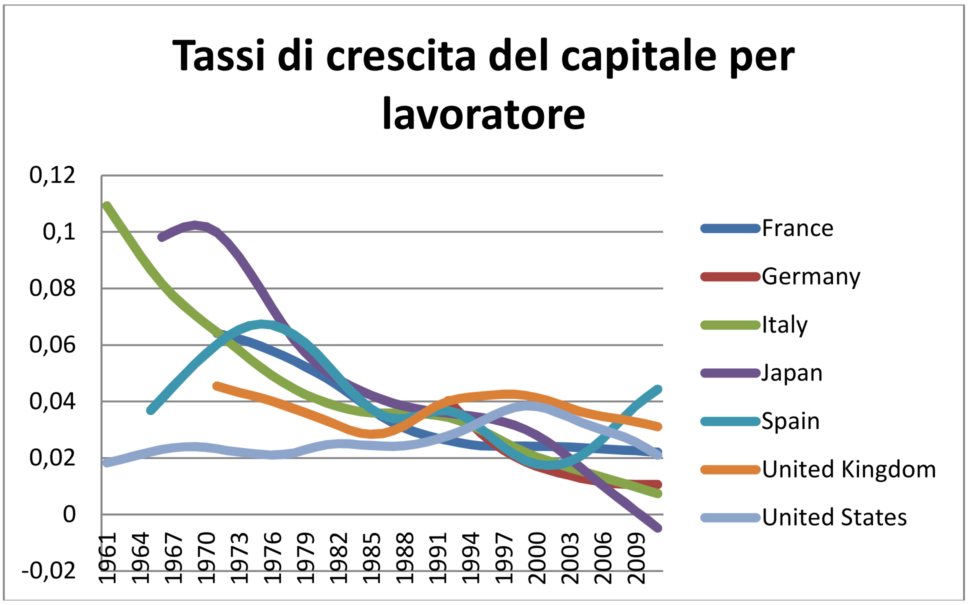

Grafico 8.3: Fonte OCSE. I dati sono filtrati con il metodo Holdrick-Prescott per eliminare le oscillazioni di breve periodo.

Gli andamenti dei tassi di crescita del prodotto per unità di lavoro e del tasso di crescita dei salari reali sono compatibili con le conclusioni che abbiamo visto sopra del il modello di Solow-Swan con cambiamento tecnologico che rallenta.